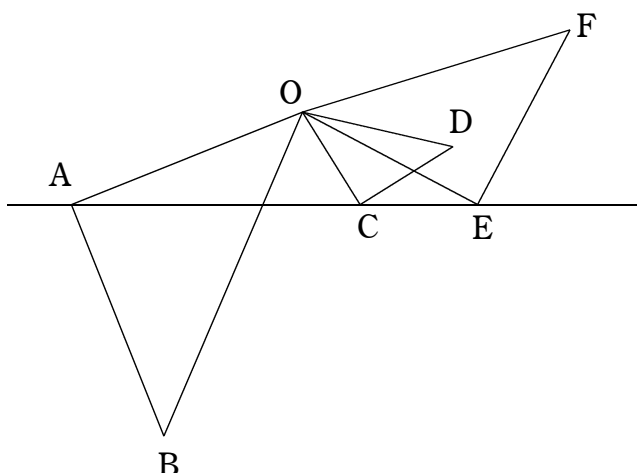


高数模試③の問題(再掲, 追加あり)

【問題】 $\angle OAB$,
 $\angle OCD$, $\angle OEF$
 を直角とする 3 つ
 の直角二等辺三角
 形 $\triangle OAB$,
 $\triangle OCD$, $\triangle OEF$
 が右図のように並
 び, 3 点 A , C , E
 が 1 直線上にあ
 る.



- (1) $\triangle OAC \sim \triangle OBD$ であることを証明せよ.
 (2) 3 点 B , D , F が 1 直線上にあることを証明せよ.
 (追加) $AC : CE = BD : DF$ であることを証明せよ.

動画では PDF の後ろで…といいましたが, 詳しい解答は省略します.

(2) と(追加)は, (1) と同様の手法で, $\triangle OCE \sim \triangle ODF$ を示すのがよいでしょう.

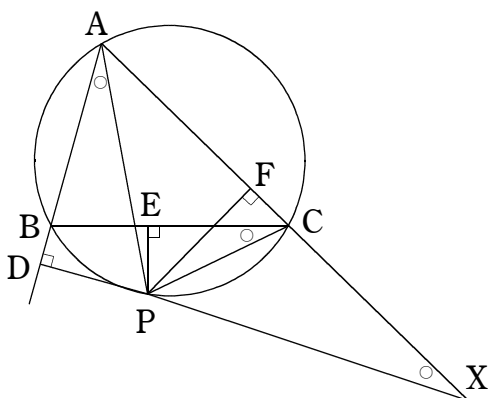
直角二等辺三角形は, 「 45° の回転, $\sqrt{2}$ 倍」を引き起こす図形です.

一直線上の 3 点 A , C , E は「 45° の回転, $\sqrt{2}$ 倍」によって, E , D , F になっても, 一直線上のままです. しかも, 2 点で作る距離の比も保たれます.

シムソンの定理

1 次の問いに答えよ.

(1) 三角形の外接円周上の点から，三角形の各辺またはその延長に下ろした垂線の足は一直線上にある(**シムソンの定理**)ことを右図で前ページの欄外の「回転，拡大・縮小」の考え方をを用いて証明せよ.



(2) ある点から三角形の各辺に下ろした垂線の足が一直線上ならば，その点は三角形の外接円周上にある(**シムソンの定理の逆**)ことも証明せよ.

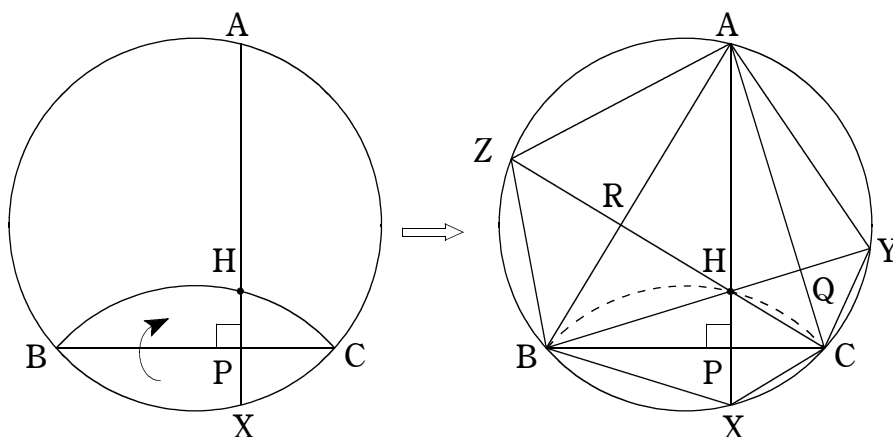
→上図で，直線 DEF を**シムソン線**，点 P を**シムソン線の極**(英語圏の幾何の本では“Simson line pole”という用語が時折登場しますが，日本の幾何の本ではそれに対応した“シムソン線の極”という用語はほとんど見られません．また，“シムソン線の直極点”という用語もありますが，それは別物です)といいます．

よく知られたシムソンの定理の共円を用いた証明と，シムソンの定理の逆の証明は PDF の p.8 ～ p.9 で解説します．

円の折り紙→垂心

2 下左図は、円形の紙に直交弦がかかれており、一方の弦で折り返したものである。下左図をもとにした下右図で

$\triangle AHC \equiv \triangle AYC$, $\triangle AHB \equiv \triangle AZB$ であることを証明しなさい。



→高数模試 2501 動画(<https://t-s.ink/jgC7pN/>)でも扱った問題です。

H を $\triangle ABC$ の**垂心**といいます。

～高数模試 2501 動画で扱った続きの問題～

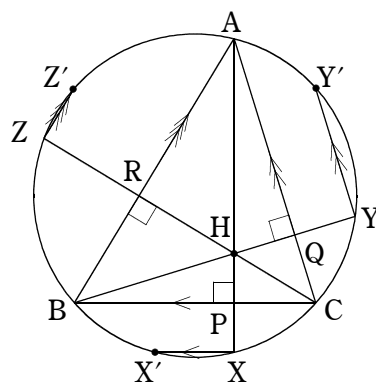
【問題】右図で、次の問いに答えよ。

(1) 線分 HA, HB, HC, HX, NY, HZ, HX', HY', HZ'の各中点をとりなさい。

(2) 円 ABC の中心を O とする。線分 HO の中点は (1) でとった 9 つの点とどのような関係か述べなさい。

→**九点円**と呼ばれるものが現れます。

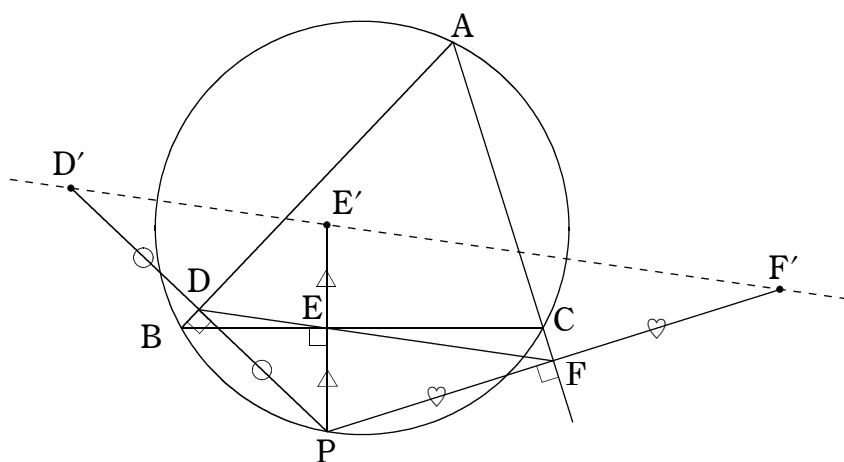
高数模試 2501 動画で解説します。



シュタイナーの定理

3 シムソン線と平行な直線をいろいろな方法で作ることを考える．次の各問いに答えよ．

(1) 下図で，線分 PD ， PE ， PF をそれぞれ 2 倍に延長して，点 D' ， E' ， F' をとる．これらの点が一直線上であることと，直線 $D'E'F'$ // 直線 DEF であることを証明せよ．

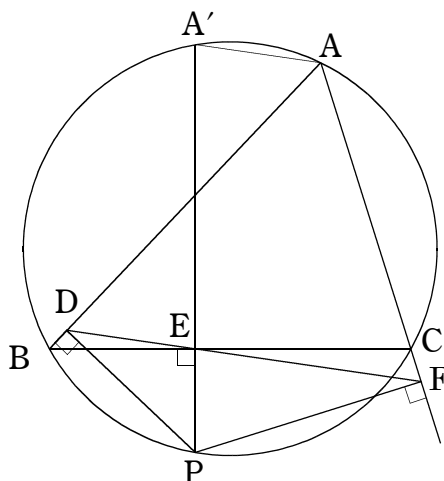


→ 中点連結定理で簡単に示せます．動画でも詳しくは解説しません．

直線 $D'E'F'$ はシムソン線 DEF を極 P を中心に 2 倍に相似拡大したものといえます．直線 $D'E'F'$ を P を極とする **シュタイナー線** といいます．

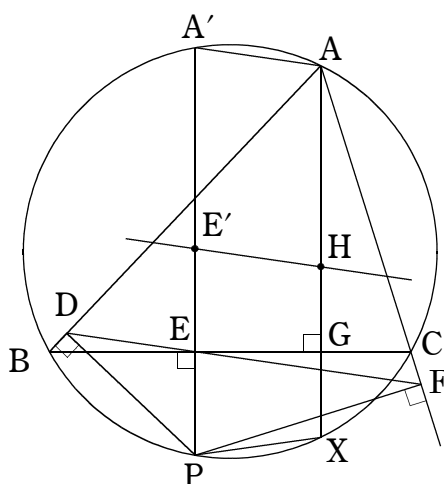
(2) PE の延長が再び円と交わる点を A' とする.

直線 $A'A \parallel$ 直線 DEF であることを証明せよ.



(3) $\triangle ABC$ の垂心を H とし, AH の延長と BC の交点を I , AH の延長が再び円と交わる点を X とする.

直線 $E'H \parallel$ 直線 DEF であることを証明せよ.



→この結果から「シュタイナー線は三角形の垂心を通る」ことがわかります.

これを, **シュタイナーの定理**といいます. また, PH はシムソン線によって 2 等分されることもすぐにわかります(こちらをシュタイナー定理とよぶこともあります). なお, PDF の p.10 に別解があります.

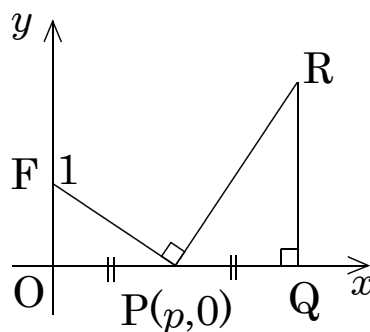
放物線の焦点・準線

4 次の問いに答えよ.

(1) 点 R の座標を p を用いて表せ.

(2) p がいろいろな値をとるとき、点 R がえがくグラフの式を求めよ.

(3) 直線 PR が (2) で求めたグラフに接することを証明せよ.



(4) RQ , FP の各延長の交点を H とする. $RF = RH$ であることを証明せよ. また、点 H は直線 $y = \boxed{}$ (負の定数) 上にある. 空欄をうめよ.

(5) 直線 PR を鏡として、 y 軸に平行な光線を上から点 R に向かって直線 PR に当てると反射して点 F に到達する理由を説明せよ.

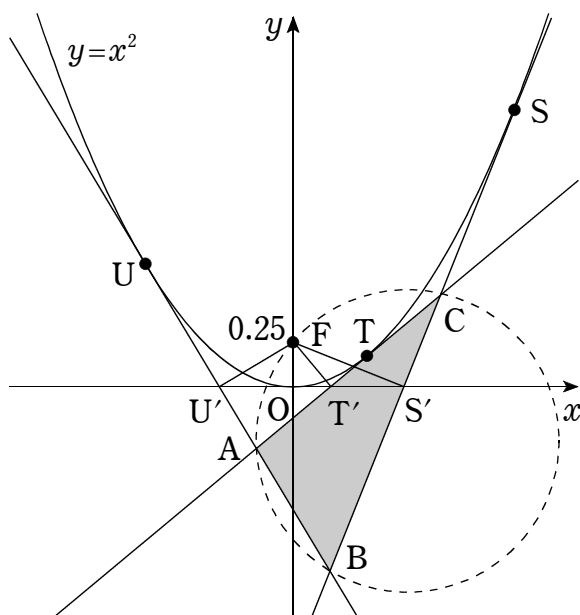
→動画では(4)までを解説します.(5)はPDFのp.11で解説します.

(2)で求めた放物線上の点から、点 F までの距離と、点 H が通る直線 $y = \boxed{}$ (負の定数)をまでの距離は等しく、点 F と、点 H が通る直線 $y = \boxed{}$ (負の定数)をそれぞれ放物線の**焦点**、**準線**といいます.

一般の放物線 $y = ax^2$ の焦点、準線に関しては、PDFのp.11で解説します.

傍接放物線

5 右図のように，放物線 $y = x^2$ のグラフ上の 3 点 S, T, U を接点とする放物線の接線を引く．3 接線と x 軸の交点をそれぞれ S' , T' , U' とし，3 接線で作られる三角形の頂点を A, B, C とする．また，放物線の焦点 $(0, 0.25)$ を F とする．次の問いに答えよ．
 (1) 4 点 F, A, B, C は同一円周上であることを証明せよ．



(2) 放物線の準線 $y = -0.25$ は $\triangle ABC$ の垂心を通ることを証明せよ．

→放物線 $y = x^2$ は $\triangle ABC$ の**傍接放物線**といいます．

この問題を解くのに，シムソンの定理の逆，シュタイナーの定理が活躍します．

1 シムソンの定理の逆の証明

[ここでは回転，拡大・縮小による証明とします]

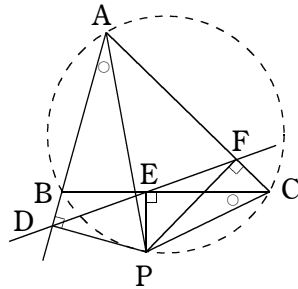
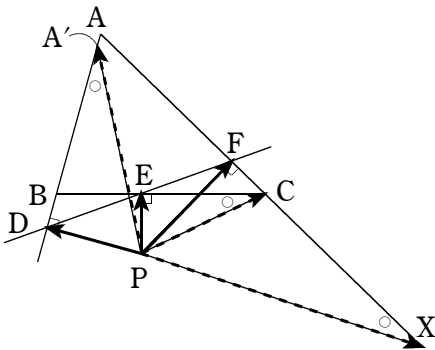
下左図のように，直線 AC 上に点 X を，直線 AB 上に点 A' を $\angle ECP = \angle FXP$
 $= \angle DA'P$ を満たすようにとる．

$\triangle DA'P \sim \triangle ECP \sim \triangle FXP$ より，線分 PD, PE, PF を P を中心に等しい角度の回転，
 等しい倍率の拡大によって，線分 PA', PC, PX を作ることができる．

3 点 D, E, F は一直線上であるから，3 点 A', C, X も一直線上である．

したがって， $A' = A$ となる．

すると，下右図において，2 点 A, C は直線 BP に関して同じ側で， $\angle BAP = \angle BCP$
 であるから，4 点 P, A, B, C は同一円周上である． (証明終)



共円を利用したシムソンの定理の証明

[略証とします]

4 点 B, D, P, E と 4 点 E, P, C, F はそれぞれ同一
 円周上．この 2 円と円 ABPC との共通弦 BP, CP を引く．

円周角の定理，円に内接する四角形の性質より，

$$\angle A = \angle I = \angle U$$

円周角の定理より， $\angle E = \angle O$ であり，

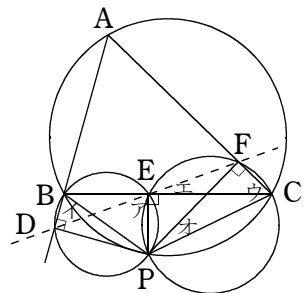
$\triangle PFC$ に注目すると $\angle U + \angle O = 90^\circ$ であるから，
 $\angle A + \angle E = 90^\circ$ となる．

したがって，

$$\angle DEF = \angle A + 90^\circ + \angle E = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

3 点 D, E, F は一直線上となる．

(証明終)



共円を利用したシムソンの定理の逆の証明

[略証とします]

4 点 B, D, P, E と 4 点 E, P, C, F はそれぞれ同一円周上. 弦 BP, CP を引く.

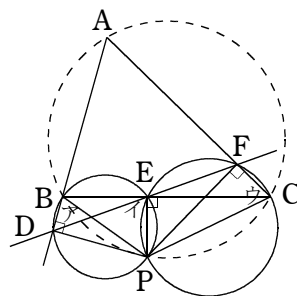
円周角の定理より, $\angle A = \angle I$

円に内接する四角形の性質より, $\angle I = \angle U$

したがって, $\angle A = \angle U$

円に内接する四角形の性質の逆より, 四角形 $ABPC$ は円に内接, すなわち点 P は $\triangle ABC$ の外接円周上である.

(証明終)



シュタイナーの定理の別証明

右図で、 H は $\triangle ABC$ の垂心とする.

$$\triangle HBC \equiv \triangle XBC$$

$$\triangle HCA \equiv \triangle YCA$$

$$\triangle HAB \equiv \triangle ZAB$$

より([2] 参照), 円 HBC , HCA , HAB は全て円 ABC と等円である.

また,

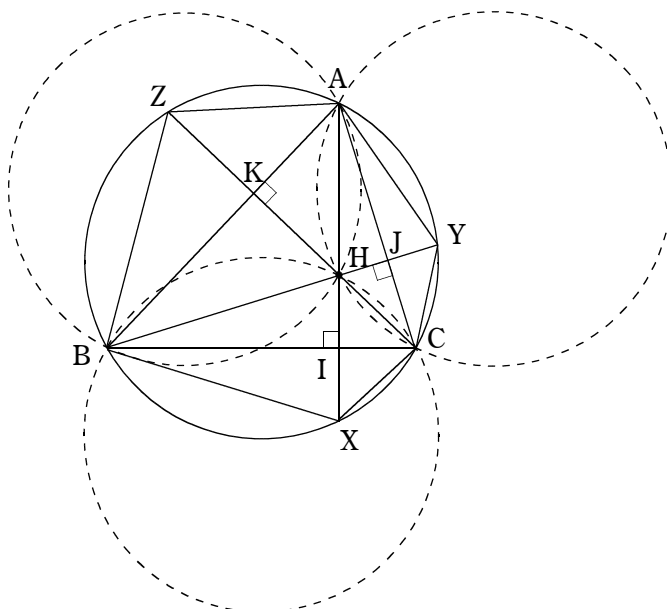
$$\angle BXC = \angle BHC \text{ と}$$

$$\angle BAC + \angle BXC = 180^\circ$$

より,

$$\angle BAC + \angle BHC = 180^\circ$$

.....①



ここで、右図のように、点 P を極とするシムソン線 DEF をつくり、 PD , PF を 2 倍に延長して点 D' , F' をとる. 直線 $D'F'$ はシュタイナー線である.

等円 ABC と HAB の共通弦 AB を軸とする対称性より、 D' は円 HAB の周上にある.

したがって、円周角の定理と、2 円の対称性より、

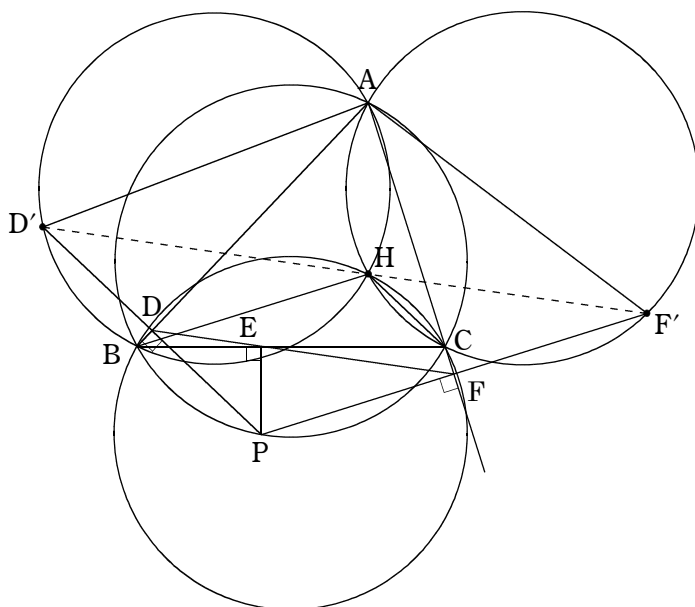
$$\begin{aligned} \angle D'HB &= \angle D'AB \\ &= \angle PAB \end{aligned} \text{②}$$

$$\text{同様に、} \angle F'HC = \angle F'AC = \angle PAC \text{③}$$

$$\text{すると、②、③、①より、} \angle D'HF' = \angle D'HB + \angle BHC + \angle F'HC$$

$$= \angle PAB + \angle BHC + \angle PAC = \angle BAC + \angle BHC = 180^\circ$$

したがって、 $\triangle ABC$ の垂心 H は P を極とするシュタイナー線上にある(PE を 2 倍に延長した点を E' とすると E' もシュタイナー線上である). (証明終)



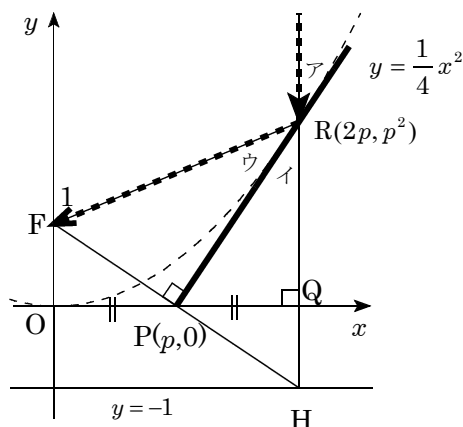
4 (5) の解説

[略解とします]

右図において、対頂角で $\angle A = \angle I$

三角形の合同で $\angle I = \angle U$

$\therefore \angle A = \angle U$



*

*

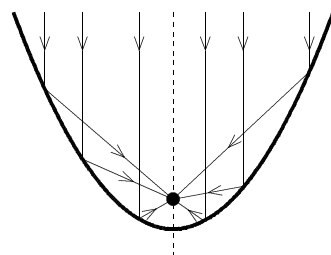
*

放物線の形の鏡に放物線の軸と平行な光線を当てると、反射して放物線の焦点に行き着きます。上の図で理由を確認しましょう。点 R の近辺では、曲がっている放物線は点 R での放物線の接線と見なしてよいです。

放物線の軸に平行な光線はすべて放物線の焦点に集まり、物を置くとまさに“焦げる”のです。

パラボラアンテナは放物線を放物線の軸で回転させた回転放物面とよばれる図形です。放物線の反射の性質を利用して電波を効率的に集めるアンテナです（パラボラとは放物線のこと）。

サーチライトや車のヘッドランプも回転放物面でできており、光源を焦点に置き、光が一定方向に進むようにしています。



放物線 $y = ax^2$ の焦点、準線

$y = ax^2$ に対し、天下り的に述べた $F(0, \frac{1}{4a})$,

$y = -\frac{1}{4a}$ が動画で説明した“等しい距離の関係”

を満たすかどうか（すなわち焦点や準線となっているか）を確認してみます。

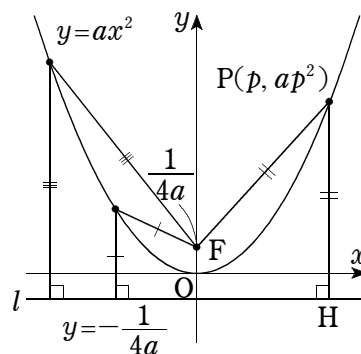
[右図で $PF = PH$ となることの説明]

放物線上の点 $P(p, ap^2)$ から直線 $y = -\frac{1}{4a}$ に垂

線 PH を下ろすと、 P の位置に関わらず、

$$PF^2 = (p - 0)^2 + \left(ap^2 - \frac{1}{4a}\right)^2 = a^2p^4 + \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{16a^2} = \left(ap^2 + \frac{1}{4a}\right)^2 = PH^2$$

$PF > 0$, $PH > 0$ より、 $PF = PH$



エコルスの定理

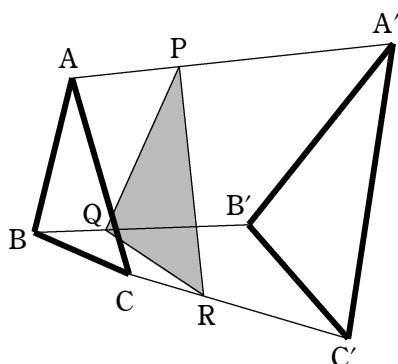
これは、解説動画のプランAの抜粋です

「 $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ は同じ向きの相似
($A \rightarrow B \rightarrow C$ と $A' \rightarrow B' \rightarrow C'$ はどちらも
反時計まわり)で、

$$AP : PA' = BQ : QB' = CR : RC'$$

のとき、 $\triangle PQR$ も $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$
と同じ向きの相似になる」

を**エコルスの定理**という.



→ 本来のエコルスの定理は $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ が正三角形で、点 P, Q, R は線分の中点ですが、ここでは、この形もエコルスの定理と呼ぶことにします.

<初等幾何による証明の方針> 高校で学習する複素数を用いると証明は簡単

$\triangle A'B'C'$ を平行移動させて
3 点 A, A', P が一致し
た図で、そのときの A', B',
C', P, Q, R をそれぞれ A'_0 ,
 B'_0 , C'_0 , P_0 , Q_0 , R_0 と
する.

まず,

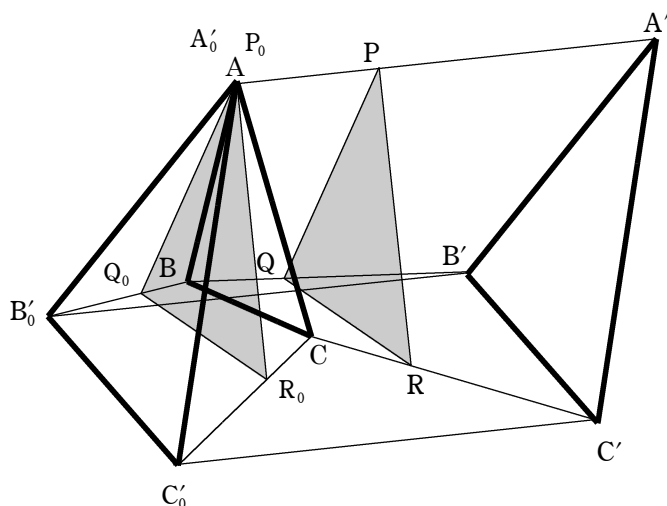
$$\triangle AB'_0B \sim \triangle AC'_0C$$

$$\triangle AB'_0Q_0 \sim \triangle AC'_0R_0$$

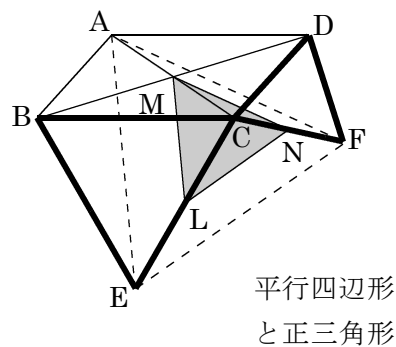
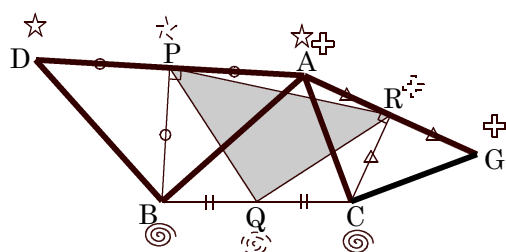
$$\triangle A'_0B'_0C'_0 \sim \triangle P_0Q_0R_0$$

を順に示す.

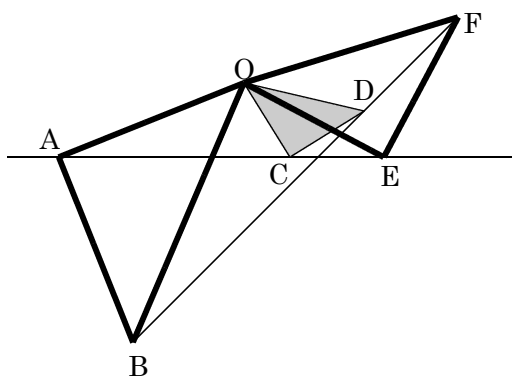
次に、 $\triangle A'_0B'_0C'_0$ を平行移動して、 $\triangle A'B'C'$ に戻すことを考える. A'_0A' , B'_0B' , C'_0C' はすべて平行で等しく、 $\triangle BQ_0Q \sim \triangle BB'_0B'$, $\triangle CR_0R \sim \triangle CC'_0C'$ の相似に注目すると、点 P_0 から P, 点 Q_0 から Q, 点 R_0 から R への平行移動がすべて $\triangle A'_0B'_0C'_0$ から $\triangle A'B'C'$ への平行移動と同じ向きで移動距離は定数倍 $\frac{A'_0P}{A'_0A'} \left(= \frac{B'_0Q}{B'_0B'} = \frac{C'_0R}{C'_0C'} \right)$ である. すると、 $\triangle P_0Q_0R_0$ から $\triangle PQR$ は平行移動となり、 $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ との相似を保つ.



～エコルスの定理の使用例～



再び…高数模試の問題
結局，エコルス．



"エコル"といろいろな問題が作れそうです。