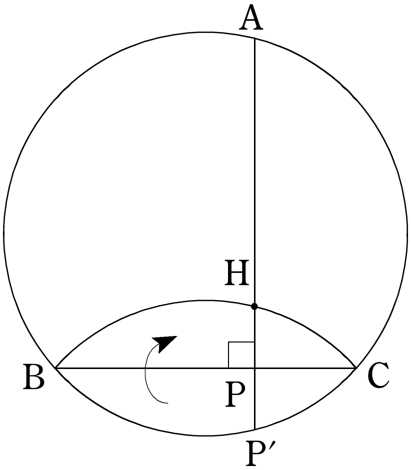
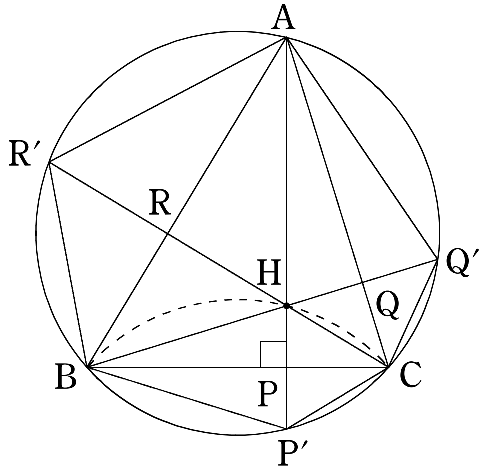
今回登場する，いろいろな知識・性質はこの PDF の最後の 3 ページにまとめてあります.

円の折り紙と垂心・九点円

$\boxed{1}$ 下左図は，円形の紙に直交弦が書かれており，一方の弦で折り返したものである．下左図をもとにした下右図で△ AHC ≡△ AQ′C, △ AHB ≡△ AR′B であることを証明しなさい.





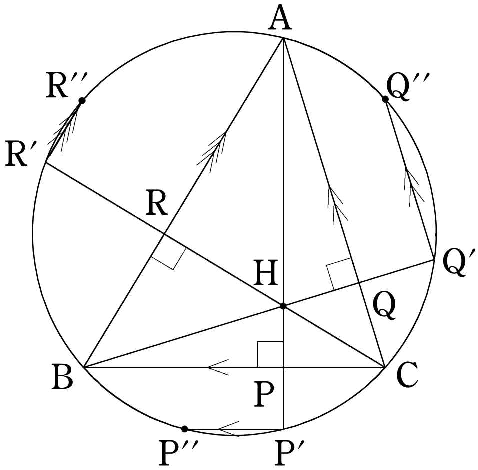
⟶ H を△ ABC の**垂心**といいます.

$\boxed{2}$ ［$\boxed{1}$の続き］

右図で，次の問いに答えよ.

（1） 線分 HA, HB, HC, HP′, NQ′, HR′，HP′′，HQ′′，HR′′の各中点をとりなさい.

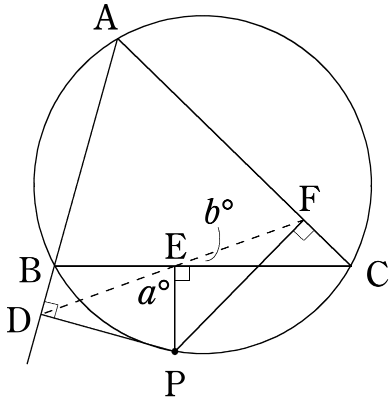
（2） 円 ABC の中心を O とする．線分 HO の中点は（1）でとった 9 つの点とどのような関係か述べなさい.



⟶**九点円**と呼ばれるものが現れます.

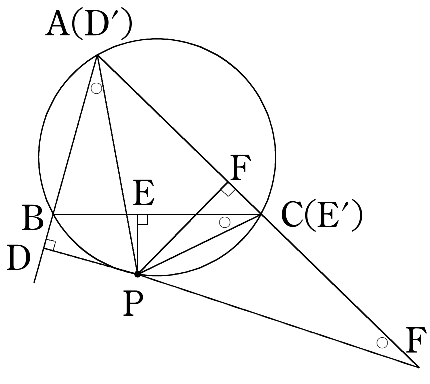
シムソンの定理

$\boxed{3}$　右図で，$a^\circ + b^\circ = 90^\circ$ であることを証明しなさい．



⟶直線 DEF を△ ABC の点 P を極とする**シムソン線**といいます(シムソン線を作るもとの点 P をシムソン線の“極”というのは，日本では用語としてほぼ知られていないので，テストの答案では“極”という言葉は用いない方が無難でしょう)．

【おまけ】　右図で，3 点 A(D′)，C(E′)，F′が一直線上にあることを用いて，3 点 D，E，F が一直線上にあることを証明しなさい．



直角双曲線とそれに交わる直線における性質

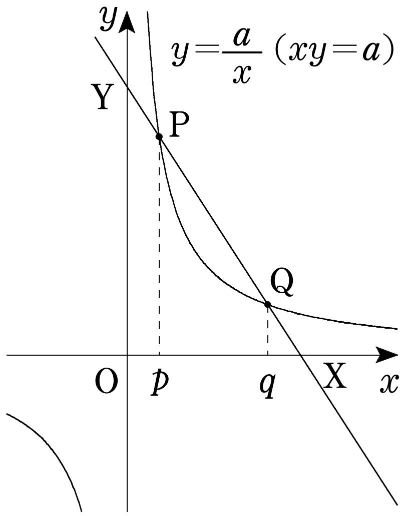
反比例 $y = \dfrac{a}{x}$ のグラフは，原点から遠ざかるにつれて，2 直線 x 軸，y 軸との距離が 0 にどこまでも近づきます．このような直線をもとのグラフの漸近線（ぜんきんせん）といいます．反比例のグラフは 2 本の漸近線 x 軸，y 軸が垂直であることから，**直角双曲線**と呼ばれます．

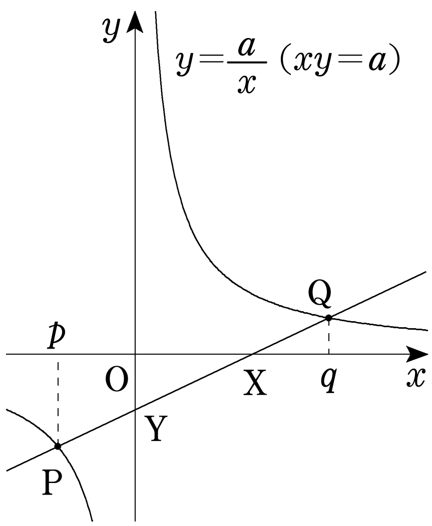
$\boxed{4}$ 下の 2 つのそれぞれの図において，次の問いに答えなさい．

（1） 直線 PQ の傾きを，a，p，q を用いた式で表しなさい．

（2） QX ＝ PY であることを証明せよ．

（3） 線分 PQ の中点を M として，直線 OM の傾きを a，p，q を用いた式で表しなさい．

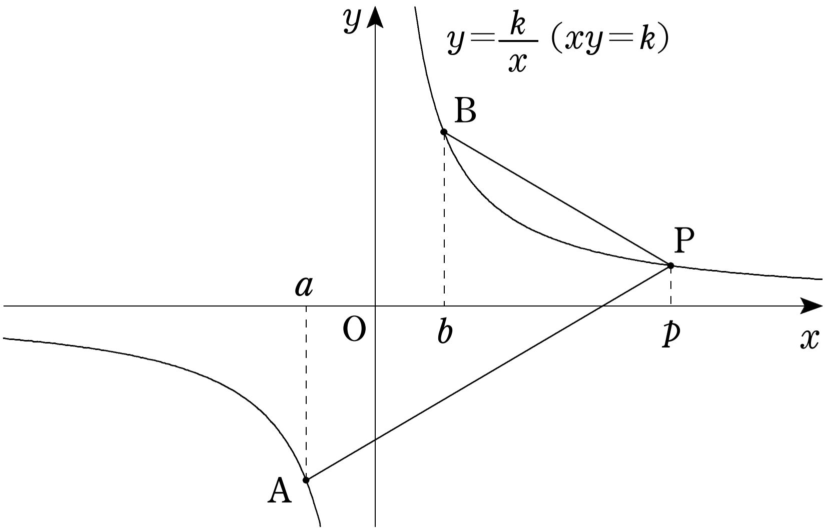




$\boxed{5}$ 下図で，2 直線 PA，PB の傾きの和は 0 である．次の問いに答えなさい．

（1） 線分 AB の中点の座標を求めなさい．

（2） 点 P と原点に関して対称な点を Q とする．2 直線 BP，BQ の傾きの和を求めなさい．

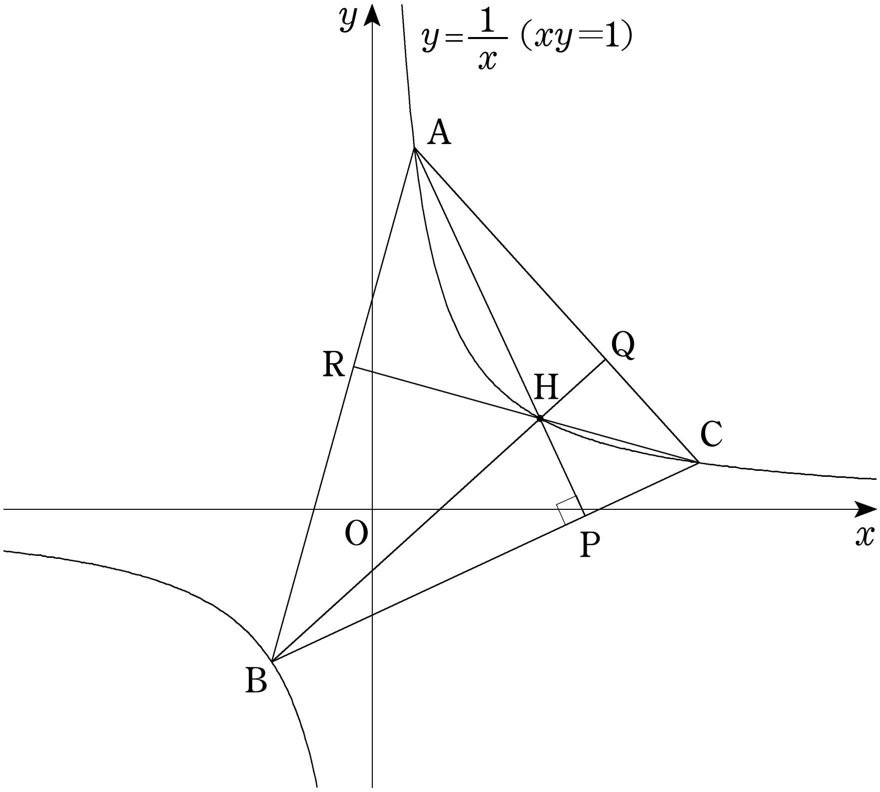


⟶直角双曲線上の点 B と点 P の間に点をとると，高校入試でも時折出題される，「平行四辺形のある有名問題」の形ができます(PDF の p.9 参照).

直角双曲線上の3角形の垂心・九点円
（そしてシムソンの定理）

直角双曲線を通じて垂心・九点円・シムソンの定理の研究が進んだことは数学史における定説です．ここからは計算が多少楽になるように，$xy=1$ で話を進めます．

$\boxed{6}$ 下図で，$\mathrm{A}\left(a,\dfrac{1}{a}\right)$，$\mathrm{B}\left(b,\dfrac{1}{b}\right)$，$\mathrm{C}\left(c,\dfrac{1}{c}\right)$，$\mathrm{H}\left(h,\dfrac{1}{h}\right)$である．$\mathrm{AH}\perp\mathrm{BC}$ のとき，2 直線 AC，BH の傾きの積（さらに 2 直線 AB，CH の傾きの積）を求めなさい．



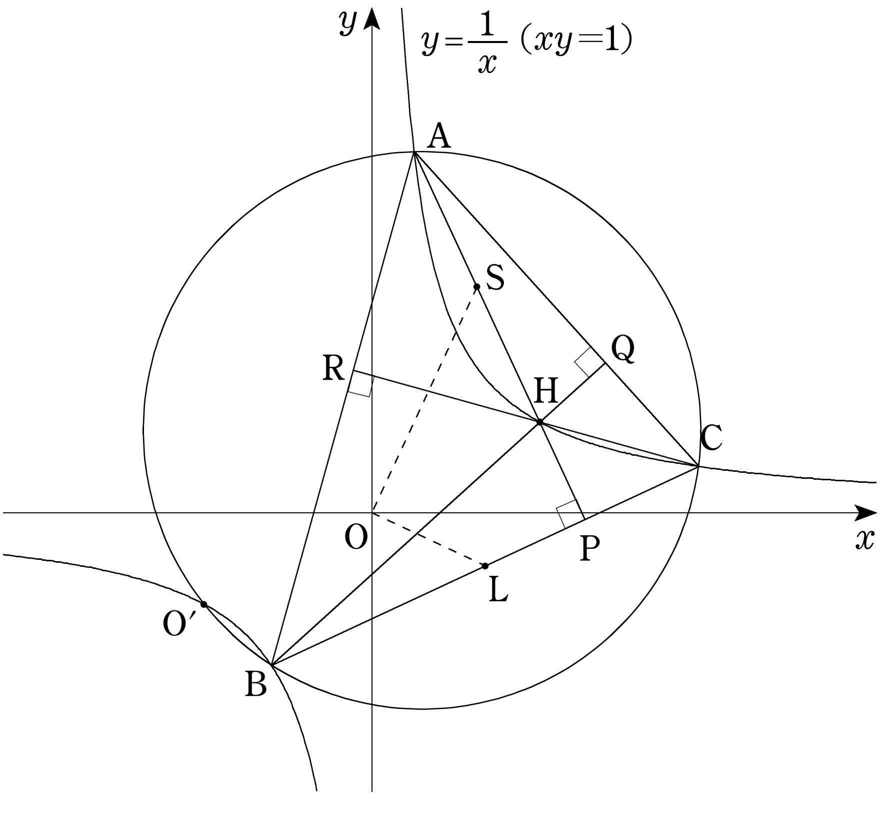
⟶本問の結果から，「H は△ ABC の垂心」であることがわかります．なお，
「A は△ HBC の垂心」「B は△ HCA の垂心」「C は△ HAB の垂心」
もいえます．

$\boxed{7}$ [$\boxed{6}$の続き]

下図で，$\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$，$\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{1}{b}\right)$，$\mathrm{C}\left(c,\ \dfrac{1}{c}\right)$，$\mathrm{H}\left(h,\ \dfrac{1}{h}\right)$である．次の問いに答えなさい．

（１） 線分 BC，AH の中点をそれぞれ L，S とする．2 直線 OL，OS の傾きの積を求めなさい．

（２） 円 ABC と直角双曲線 $y = \dfrac{1}{x}$ の交点のうち，A，B，C と異なる点を O′とする．O′の座標を a，b，c を用いて表しなさい．



【挑戦問題】（昔，高数のとある塾の広告にもありました…）

直角双曲線 $xy = 1$ と円が 4 点 P，Q，R，S で交わっている．直線 SO と直角双曲線 $xy = 1$ の S でない交点を T とし，T が円 PQRS の中心であるとき，△ PQR はどのような形か答えなさい．（解説は PDF の p.10）

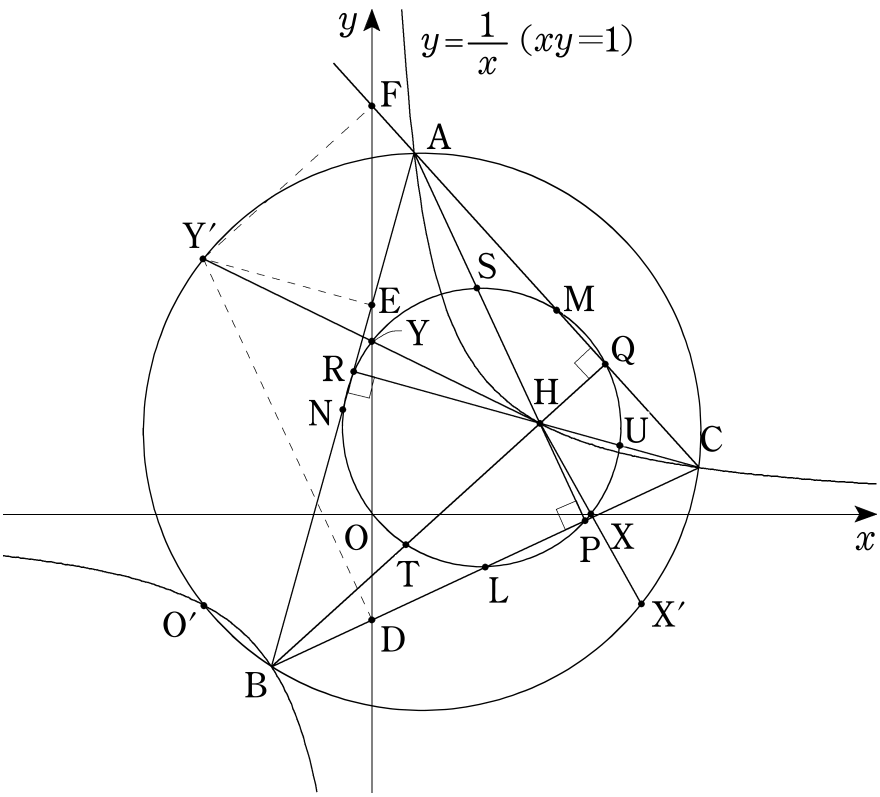
ここからは動画での解説はありません(解説はPDFのp.10〜).

$\boxed{8}$ [$\boxed{6}$, $\boxed{7}$の続き]

下図で，$\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$，$\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{1}{b}\right)$，$\mathrm{C}\left(c,\ \dfrac{1}{c}\right)$，$\mathrm{H}\left(h,\ \dfrac{1}{h}\right)$とし，円 PQR と x 軸，y 軸との交点をそれぞれ X，Y とし，HX，HY の延長と円 ABC の交点をそれぞれ X′，Y′とする．また，辺 BC，CA，AB と y 軸との交点をそれぞれ D，E，F とする．次の問いに答えなさい．

（1） 線分 X′Y′は円 ABC の直径である理由を述べよ．

（2） BC $\perp$ Y′D であることを証明せよ．



⟶同様に AB $\perp$ Y′E，CA $\perp$ Y′F も示せ，y 軸は Y′を極とするシムソン線であることがわかります．また，点 X′を極とするシムソン線は x 軸であることも示せます．

一般に，外接円の直径の両端をそれぞれ極とする 2 本のシムソン線は九点円周上で直交することが知られています．

$\boxed{9}$ $m \neq m'$，$n \neq n'$として，2 直線 $y = mx + n$，$y = m'x + n'$の交点と原点(0，0)を通る直線の式は，

$n'\{y - (mx + n)\} = n\{y - (m'x + n')\}$すなわち，$y = \dfrac{mn' - m'n}{n' - n}x$

であることを証明せよ．

$\boxed{10}$［$\boxed{8}$，$\boxed{9}$の続き］

$\boxed{8}$ の図で，次の問いに答えよ．

（１） 直線 X′Y′と垂直で原点 O を通る直線の式を求めなさい．

（２） 直線 AB の式と，点 O′から直線 AB に下ろした垂線の式をそれぞれ求めなさい．

（３）（２）における 2 直線の交点と原点 O を通る直線の式を求めなさい．

⟶（２）の問題文の直線 AB を直線 BC，直線 CA に変えても，（３）の結果は変わりません(すべて（１）の結果と同じ)．このことは，O′を極とするシムソン線が直線 X′Y′に垂直で，原点 O を通る直線であることを示しています．

$\boxed{11}$［$\boxed{8}$，$\boxed{9}$，$\boxed{10}$の続き］

$\boxed{8}$ の図で，$\overset{\frown}{\mathrm{AY'}} = \overset{\frown}{\mathrm{BO'}} + \overset{\frown}{\mathrm{CX'}}$ であることを証明しなさい．

⟶本問の結果から予想できることとして，下に示した**ブーランジェ・藤下の定理**があります．

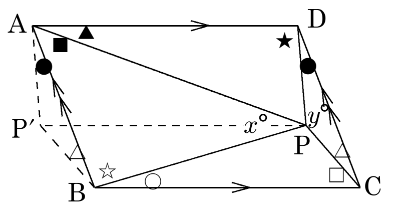
ブーランジェ・藤下の定理

△ ABC の外接円周上の 3 点を P，Q，R とするとき，3 点 P，Q，R を極とするシムソン線が 1 点で交わるならば，$\overset{\frown}{\mathrm{AP}}$，$\overset{\frown}{\mathrm{BQ}}$，$\overset{\frown}{\mathrm{CR}}$ の長さを向きをつけて考えれば（向きが異なれば符号を変える），$\overset{\frown}{\mathrm{AP}} + \overset{\frown}{\mathrm{BQ}} + \overset{\frown}{\mathrm{CR}}$ は円周の 0 や負も含めた整数倍である．また，この逆も成り立つ．

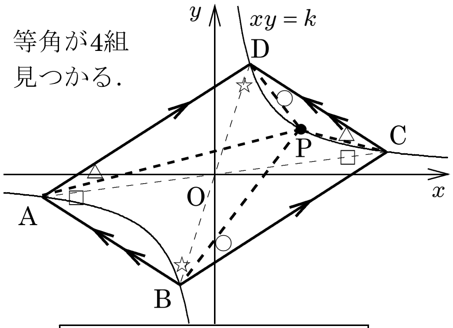
証明は高校で学習する複素数を用いるのが一般的です．

$\boxed{5}$ と関連する平行四辺形の性質

一般に下の囲みのようなことが成り立ちます.



$\Longleftrightarrow$



$x+y$=180, ○=●, △=▲, □=■, ☆=★はどれか 1 つが成り立つとき, 他もすべて成り立つ. 円ABP, BCP, CDP, DAPはすべて等円.

円ABP, BCP, CDP, DAP, はすべて等円。

［左側の図について］

$x+y=180$ が成り立つとき, 図のように△ DPC と合同な△ AP′B を作れば, ∠ APB +∠ AP′B = 180° より, 四角形 AP′BP は円に内接し, P′P//BC であることから, ∠ CDP =∠ BAP′=∠ BPP′=∠ PBC となります.

［右側の図について］

点 C, D, P, A の x 座標をそれぞれ c, d, p, $-c$ とすると, 直線 CD, CP, AD, AP の傾きはそれぞれ$-\dfrac{k}{cd}$, $-\dfrac{k}{cp}$, $\dfrac{k}{cd}$, $\dfrac{k}{cp}$ となります.

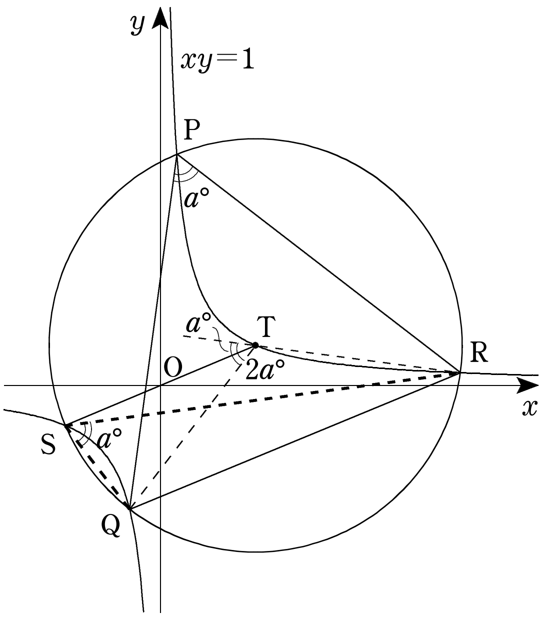
∠ DCP は傾き$-\dfrac{k}{cd}$, $-\dfrac{k}{cp}$ の 2 直線のなす角

∠ DAP は傾き $\dfrac{k}{cd}$, $\dfrac{k}{cp}$ の 2 直線のなす角

ですから, ∠ DCP =∠ DAP となります.

$\boxed{7}$ の【挑戦問題】の解説

［右図で証明することにする］



解・1　点 P ～ S の x 座標をそれぞれ p ～ s とし，∠ QPR ＝ a° とする．

円周角の定理より，

∠ QSR ＝ a°

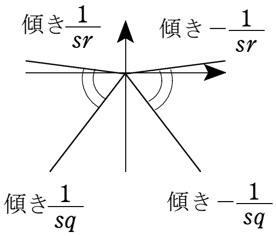
∠ QTR ＝ $2a$° ……………①

ここで，点 T の x 座標が－ s であることに注意して，直線 SQ，SR，TQ，TR の傾きはそれぞれ，

$$-\frac{1}{sq},\ -\frac{1}{sr},\ \frac{1}{sq},\ \frac{1}{sr}$$

である．

すると，2 直線 SQ と SR のなす角，2 直線 TQ と TR のなす角は等しく，



∠ QSR

＋∠ QTR ＝ 180° ……②

①，②より，a° ＋ $2a$° ＝ 180°　　∴　∠ QPR ＝ a° ＝ 60° ……③

同様に，∠ RQP ＝ b° とおくと，∠ RSP ＋∠ RTP ＝ b° ＋ $2b$° ＝ 180° から，

∠ RQP ＝ b° ＝ 60°　………………④

③，④より，△ PQR は正三角形である．　　　　　　　　　　　　　　（証明終）

＊　　　　　　＊　　　　　　＊

直角双曲線と垂心・九点円，九点円と外接円の関係がわかっていれば，△ PQR の垂心は外心であることを主張する次のような答案を書くことが可能です．ただし，ここで用いる性質は当たり前の知識ではないので,そのままではテストの答案では使えないでしょう．

解・2　△ PQR の垂心を H とすると，H は直角双曲線上である．H と原点 O に関して対称な点を H′とすると，H′も直角双曲線上である．

△ PQR の九点円は原点 O を通り，九点円を H を中心に 2 倍に拡大したものが，円 PQR であるから，H′は円 PQR 上である．

したがって，H′＝ S．さらに H ＝ T

ここで，PT の延長と QR の交点を U とする．

T は△ PQR の垂心かつ外心であることに注意して，

∠ TUQ ＝∠ TUR ＝ 90°，TQ ＝ TR， TU=TU より，△ TUQ ≡△ TUR

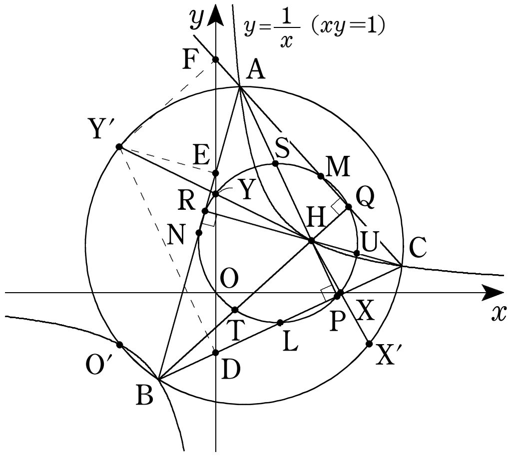
UQ ＝ UR，PU=PU，∠ PUQ ＝∠ PUR(＝ 90°)より，△ PUQ ≡△ PUR

したがって，PQ ＝ PR

同様に QR ＝ QP で，△ PQR は正三角形である．　　　　　　　　　　（証明終）

$\boxed{8}$ の解説

解（**1**） $\angle$ XOY $= 90°$ より，XY は円 PQR の直径である．H を中心に円 PQR を 2 倍に拡大すると，円 ABC になり，このとき，円 PQR の直径 XY は円 ABC の直径 X′Y′になる．



（**2**） 線分 AH，BC の各中点は，

$$\mathrm{S}\left(\frac{a+h}{2},\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{h}\right)\right)$$

$$\mathrm{L}\left(\frac{b+c}{2},\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right)$$

$\angle$ SOL $= 90°$ で SL は円 PQR の直径となり，円 PQR の中心を Z とすると，Z は直径 SL の中点であるから，

$$\mathrm{Z}\left(\frac{a+b+c+h}{4},\ \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{h}\right)\right)$$

点 Y の y 座標は，点 Z の y 座標の 2 倍であるから，

$$\mathrm{Y}\left(0,\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{h}\right)\right)$$

Y は線分 Y′H の中点であるから，

$\dfrac{(\text{Y}'\text{の}x\text{座標})+h}{2}=0$，$\dfrac{1}{2}\left\{(\text{Y}'\text{の}y\text{座標})+\dfrac{1}{h}\right\}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{h}\right)$ の 2 式より，

$$\mathrm{Y}'\left(-h,\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

また，BD $=$ XC より，点 D の y 座標は，$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ より，$\mathrm{D}\left(0,\ \dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$

すると，直線 Y′D の傾きは，$\dfrac{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}{0-(-h)}=-\dfrac{1}{ah}$ となり，直線 AH の傾きと等しい．

BC $\perp$ AH と AH//Y′D から，BC $\perp$ Y′D がいえる．（証明終）

$\longrightarrow$ 2 直線 BC，AH の傾きの積と 2 直線 BC，Y′D の傾きの積はともに -1 となり，

$-\dfrac{1}{bc}\times\left(-\dfrac{1}{ah}\right)=-1$ が成り立ちます．なお，以下の解説では，この式から導ける，

$$\boxed{abch=-1}$$

は断りなく用いることにします．

$\boxed{9}$ の解説

解 2 直線 $y = mx + n$，$y = m'x + n'$の交点の座標を$(p,\ q)$とすると，

$q = mp + n$，$q = m'p + n'$の 2 式，すなわち，

$q -(mp + n)= 0$ …………①，$q -(m'p + n')= 0$ …………②

が成り立つ．

ここで，直線 $n'\{y -(mx + n)\}= n\{y -(m'x + n')\}$……③について考える．

③に $x = p$，$y = q$ を代入すると①，②より等式が成り立つので，直線③は点$(p,\ q)$を通る．

また，③は，$y = \dfrac{mn'-m'n}{n'-n}x$ のように定数項が 0 の式に変形でき，原点$(0,\ 0)$を通ることがわかる．以上より，題意は示された． （証明終）

$\boxed{10}$ の解説

解 （**1**） 円 PQR の中心の座標は，

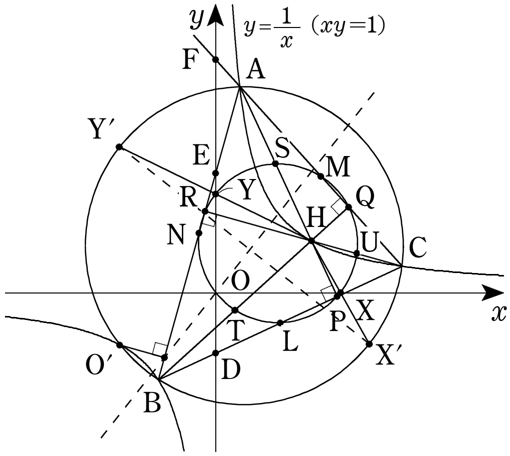
$$\mathrm{Z}\left(\frac{a+b+c+h}{4},\ \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{h}\right)\right)$$

であり，Z の x 座標，y 座標を 2 倍したものを考えることにより，

$$\mathrm{X}\left(\frac{a+b+c+h}{2},\ 0\right)$$

$$\mathrm{Y}\left(0,\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{h}\right)\right)$$

とわかる．



X′Y′//XY より，直線 X′Y′の傾きは，直線 XY の傾きに等しく，

$$\left\{0-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{h}\right)\right\}\div\left(\frac{a+b+c+h}{2}-0\right)=-\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{h}}{a+b+c+h}$$

となる．直線 XY と垂直で原点 O を通る直線の式は，$\boldsymbol{y=\dfrac{a+b+c+h}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{h}}x}$ である．

（**2**） 直線 AB の式は，$y=-\dfrac{1}{ab}(x-a)+\dfrac{1}{a}$ $\therefore$ $\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{ab}x+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$ ……………①

また，$\mathrm{O}'\left(-h,\ -\dfrac{1}{h}\right)$より，点 O から直線 AB に下ろした垂線の式は，

$$y=ab(x+h)-\frac{1}{h} \qquad \therefore \quad \boldsymbol{y=abx+abh-\frac{1}{h}} \text{ ……………………②}$$

⟶ $\boldsymbol{abch}=-1$ の関係から，2 直線の式はそれぞれいくつかの表し方ができます．

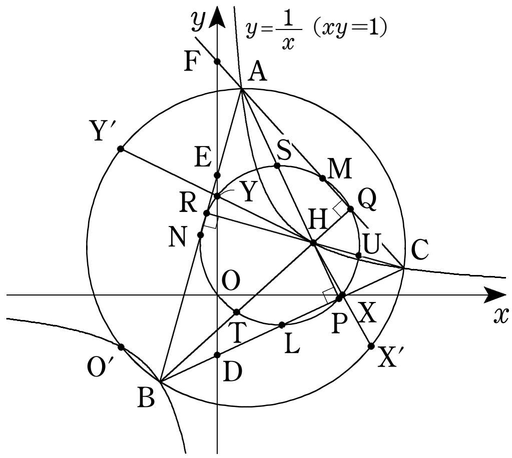
（3） ①，②の式は $abch=-1$ を用いて，それぞれ次のようにも表せる．

$$y=chx+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ \cdots\cdots\cdots\cdots①' \qquad y=abx-\frac{1}{c}-\frac{1}{h}\ \cdots\cdots\cdots\cdots②'$$

2 直線①′，②′の交点と原点 O を通る直線の式を求めればよく，$\boxed{9}$ の結果を用いると，

$$y=\frac{ch\left(-\frac{1}{c}-\frac{1}{h}\right)-ab\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}{-\frac{1}{c}-\frac{1}{h}-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}x \qquad \therefore\ \boldsymbol{y=\frac{a+b+c+h}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{h}}x}$$ （（1）の結果と一致）

$\boxed{11}$ の解説



解　証明すべき $\overset{\frown}{\mathrm{AY'}}=\overset{\frown}{\mathrm{BO'}}+\overset{\frown}{\mathrm{CX'}}$ の式をいいかえると次のようになる．

$$\overset{\frown}{\mathrm{AY'}}=\overset{\frown}{\mathrm{BO'}}+\overset{\frown}{\mathrm{CX'}}$$

$$\Longleftrightarrow \overset{\frown}{\mathrm{SY}}=\overset{\frown}{\mathrm{TO}}+\overset{\frown}{\mathrm{UX}}$$

$$\Longleftrightarrow \overset{\frown}{\mathrm{SY}}-\overset{\frown}{\mathrm{TO}}=\overset{\frown}{\mathrm{UX}}$$

$$\Longleftrightarrow \angle\mathrm{YOS}-\angle\mathrm{OST}=\angle\mathrm{UOX}$$

$\angle$ YOS $-\angle$ OST は直線 TS と y 軸のなす角，$\angle$ UOX は直線 OU と x 軸のなす角であり，これらが等しいとき，傾きは逆数の関係となる(例えば $y=3x$ と $y=\frac{1}{3}x$ を想像してみよ)．

また，TS//BA，OU//O′C であるから，さらにいいかえて，

$$\angle\mathrm{YOS}-\angle\mathrm{OST}=\angle\mathrm{UOX}$$

$\Longleftrightarrow$ (TS の傾き)×(OU の傾き)＝1

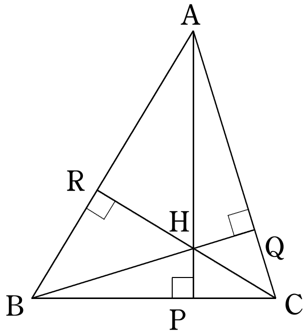
$\Longleftrightarrow$ (BA の傾き)×(O′C の傾き)＝1

ここで，(BA の傾き)＝$-\dfrac{1}{ab}$，(O′C の傾き)＝$\dfrac{\frac{1}{c}-\frac{1}{-h}}{c-(-h)}=\dfrac{1}{ch}=-ab$ より，

(BA の傾き)×(O′C の傾き)＝$-\dfrac{1}{ab}\times(-ab)=1$

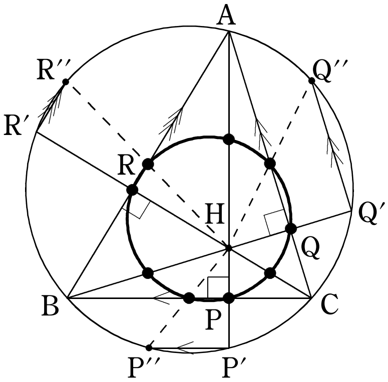
よって，題意は示された．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終）

知識・性質のまとめ



三角形の各頂点から対辺に下ろした垂線は1点で交わり，その交点を三角形の**垂心**という

H は△ ABC の垂心
A は△ HBC の垂心
B は△ HCA の垂心
C は△ HAB の垂心
である.



次の性質が成り立つ.

① 四角形 HBP′C，HCQ′A，HAR′B はたこ形

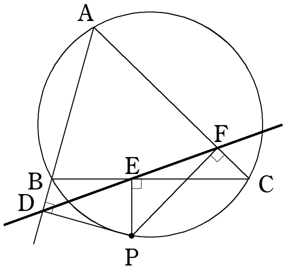
② 四角形 HBP″C，HCQ″A，HAR″B は平行四辺形

三角形の外接円を垂心を中心に 2 分の 1 に縮小したものを考えることにより，

③ 三角形の垂心を作る 3 垂線の足
三角形の各頂点と垂心を結ぶ線分の中点
三角形の各辺の中点
の 9 つの点は同一円周上で，その円を三角形の**九点円**という.

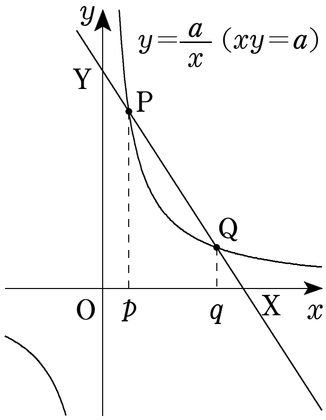
④ 九点円の半径は外接円の半径の半分である.

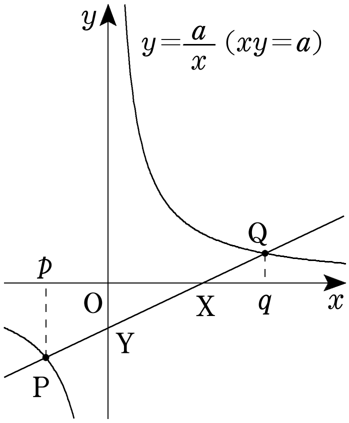
参考 △ ABC の九点円は，△ HBC，△ HCA，△ HAB の九点円にもなる．例えば，△ HBC の外接円を△ HBC の垂心 A を中心に 2 分の 1 に縮小させると，△ HBC の九点円となる.
△ ABC，△ HBC，△ HCA，△ HAB の外接円はすべて半径が等しい.



シムソンの定理

三角形の外接円の三角形の頂点をのぞく周上の点から，三角形の各辺に垂線を下ろすと，3 つの垂線の足が同一直線上にある．その直線を垂線を引く円周上の点を極とする**シムソン線**という.

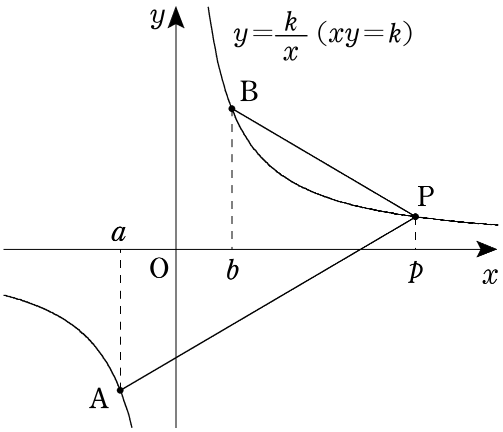




それぞれの図で，　次の性質が成り立つ.

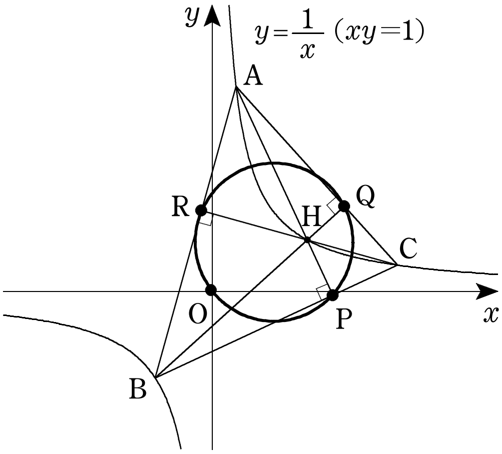
① 直線 PQ の傾きは，$-\frac{a}{pq}$

② QX ＝ PY



図で，AP，BP の傾きの和が 0 のとき原点 O は，線分 AB の中点
$(a=-b)$.

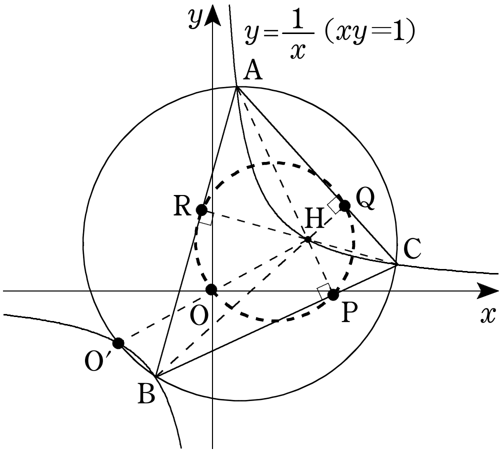
以下，直角双曲線は $y=\dfrac{1}{x}$ とする.



直角双曲線上に三角形の頂点があるとき，次の性質が成り立つ.

① 三角形の垂心は直角双曲線上

② 三角形の九点円は 2 本の漸近線の交点（原点）を通る.



直角双曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ が円と 4 点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$，$\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{1}{b}\right)$，$\mathrm{C}\left(c,\ \dfrac{1}{c}\right)$，O′ で交わるとき，次の性質が成り立つ.

① 点 O′は，△ ABC の垂心 H と原点 O に関して対称である.

② 点 O′の座標は，$\mathrm{O}'\left(\dfrac{1}{abc},\ abc\right)$ となる.