はじめに

本書は，三角比と図形を学校などで一通り学習した人すべてが対象で，次のような人に役立つことを目指しました．

- 教科書と入試とのギャップを埋めたい人．
- トピックスごとに整理し理解を深めたい人．
- 三角比と図形をより深く理解したい人（本書では，教科書では触れられてない項目も取り上げています）．
- 三角比と図形を得意分野にしたい人．

（なお，教科書レベルのことから解説していますが，教科書の説明で十分と思われるところは，詳しくは解説しませんでしたので，必要に応じて教科書も参照して下さい．）

中学ですでに図形を学んでいますが，数学Ａでさらに考察します．

また，数学Ⅰで，図形を考察する道具に「三角比」を導入します．三角比は，測量に使われるなど身近なところでも活躍しています．三角比は，いろいろな図形を計量的に扱えるようにする，大変便利な道具です．本書では，図形問題における三角比の活用についての解説に重点を置きました．また，教科書では手薄な立体図形についても十分に紙面を割いて解説しました．

なお，三角比を拡張したものが三角関数（数学Ⅱ）であり，その加法定理は大変便利な公式なので，本書で扱うことにしました．

三角比という道具を身につけて，図形問題を解くアプローチを増やしてください．

本書で，三角比と図形を得意分野にし，さらに興味や面白さを感じていただければ幸いです．

教科書Next 三角比と図形の集中講義

CONTENTS

立体図形

加法定理と図形への活用

実戦力をつける

本書の構成と利用法

本書の構成

本書は，三角比と図形を 49 節に分けて解説しました．テーマごとに，必要ならば教科書レベルのことからはじめて，そのテーマを理解するのにふさわしい問題を取り上げました．そして，その問題を解くのに必要な手法などの説明を行い，その問題の解答を掲載しました．重要な概念や手法などを，そのつど枠囲みのなかに整理してまとめました．

とりあげるテーマは，教科書の重要項目，入試で必須の項目や是非とも身につけておきたい手法に加えて，教科書では発展扱いの項目，さらに，入試でよく出題される項目になっています．

教科書の重要項目を取り上げた節では，教科書レベルのことからはじめて，そのテーマを理解するのにふさわしい問題の解説までを行っています．

また，ちょっとしたトピックスなどを「Tea Break」としてまとめました．

なお，本書では，数Ⅱで扱う三角関数の加法定理を解説しました．§40 以降では加法定理を用いて解説しているところもあります．

本書の読み方

特に決まりはないし，読み方は自由ですが，次を参考にしてください．まずは，

三角比と三角関数の準備
図形の準備（基本事項）
平面図形
三角比
立体図形

の各節を一通り読み進めていきましょう．各自のレベルによっては易しいと感じられるところもあるでしょうが，いろいろな視点から解説しているので，理解が深まるはずです．また自力で解ける問題もあるでしょうが，そのときも答え合わせだけでなく解答も読んでください．

そして，

加法定理と図形への活用

と，　実戦力をつける

の節を読み進めましょう．

また，「Tea Break」はとりあえず読まなくて構いませんし，各自にとって必要と思うところを読み進めていってください．

本書は，テーマごとにタイトルをつけているので，復習の際はそれを利用してください．

本書で使う記号など

∴	ゆえに
∵	なぜならば
+α	補足
!	注意

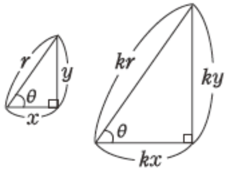
三角比と三角関数の準備

Section 1 三角比の導入

角度によって決まる量を導入します．

まず鋭角（0° より大きく 90° より小さい角）のときを考えます．

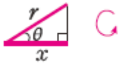
鋭角 θ に対して，θ を内角にもつ直角三角形を作ります．これらの三角形は相似ですから，3 辺の長さの比は大きさに関係せず，角度 θ のみによって定まります．そこで，θ に対して



$\dfrac{y}{r}$ を $\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\theta}$（サイン；正弦）

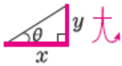
(sin)

$\dfrac{x}{r}$ を $\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\theta}$（コサイン；余弦）



(cos)

$\dfrac{y}{x}$ を $\mathbf{tan}\,\boldsymbol{\theta}$（タンジェント；正接）



(tan)

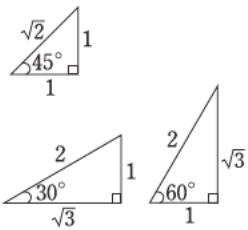
と定義します．正弦・余弦・正接をまとめて三角比といいます．

三角定規の形の場合，右図により，

$\sin 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\tan 45^\circ = 1$

$\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$，$\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$，$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$



となります．

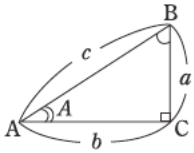
正弦・余弦・正接

右図の直角三角形 ABC において，

$$\sin A=\frac{a}{c},\quad \cos A=\frac{b}{c},\quad \tan A=\frac{a}{b}$$

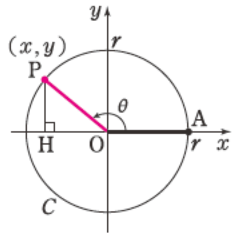
$$a=c\sin A,\quad b=c\cos A,\quad a=b\tan A$$

が成り立つ．



直角三角形を用いて三角比を考えてきましたが，座標を用いて，鋭角以外にも拡張します．

座標平面上で，右図のように，原点 O を中心とする半径 r の円を C とします．C と x 軸の交点のうち，x 座標が正の方を A とし，半径 OA を O のまわりに反時計回りに θ 回転して得られる半径を OP とします．P の座標を（x，y）とし，P から x 軸に垂線 PH を下ろします．



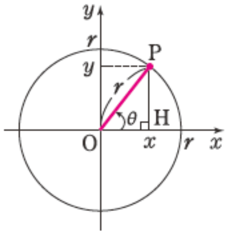
θ が鋭角のとき，△OPH に着目して，

$$\sin\theta=\frac{\mathrm{PH}}{\mathrm{OP}},\quad \cos\theta=\frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OP}},\quad \tan\theta=\frac{\mathrm{PH}}{\mathrm{OH}}$$

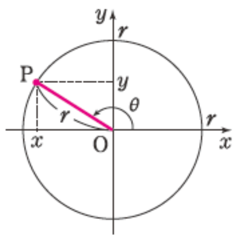
OP$=r$，PH$=y$，OH$=x$ なので，

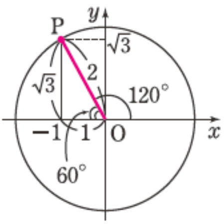
$$\boldsymbol{\sin\theta=\frac{y}{r},\quad \cos\theta=\frac{x}{r},\quad \tan\theta=\frac{y}{x}}\ \cdots\cdots☆$$

となります．



θ が鋭角でないとき（例えば鈍角（90° より大きく 180° より小さい角）のとき）も，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ を☆で定義します．





例えば，左図により，

$$\sin 120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^\circ=-\sqrt{3}$$

☆の値は半径 r に関係なく，θ だけで定まります．そこで，円の半径 r を1にしましょう．原点Oを中心とする半径1の円を単位円といいます．この場合，☆は，

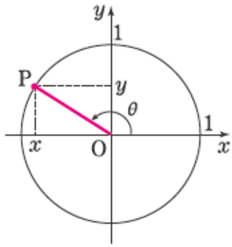
$$\sin\theta=y,\quad \cos\theta=x,\quad \tan\theta=\frac{y}{x}$$

となります．つまり，**Pが単位円上にあるとき，**

$\sin\theta$＝P の y 座標

$\cos\theta$＝P の x 座標

です．$\sin\theta$，$\cos\theta$ に関する方程式，不等式を解くときには単位円を活用しましょう．

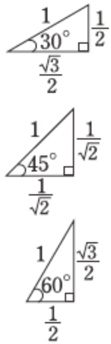


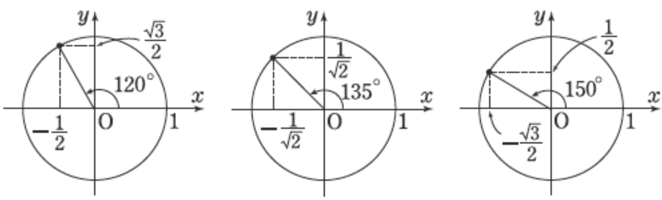
$\sin\theta=y$
$\cos\theta=x$

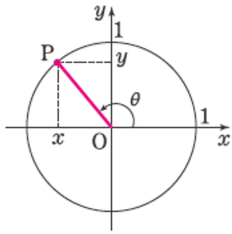
+α 数 I では，$0°\leqq\theta\leqq180°$ の三角比を扱いますが，☆の定義だと，この範囲に限定する必要はありません（一般の θ（回転角）について考えることができます（☞ p.12））．$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ はいずれも θ の関数で，これらをまとめて三角関数といいます．

ここで，三角比がすぐ分かる角度について，それらをまとめておきましょう（このような角を**有名角**といいます．直角三角形を描いて値を出します）．

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	／	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0







P$(x,\ y)$ が単位円上にあるとき，右図の θ は，

$$\sin\theta=y,\quad \cos\theta=x$$

を満たしますから，

$$-1\leqq\sin\theta\leqq1,\quad -1\leqq\cos\theta\leqq1$$

が成り立ちます．とくに，$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ のときは $0\leqq y\leqq1$ なので，$0\leqq\sin\theta\leqq1$ です．

また，$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ は，原点 O と点 P を通る直線の傾きを表すので，あらゆる実数値をとります．

P は単位円上にあるので，$x^2+y^2=1$，つまり

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1 \quad\cdots\cdots①$$

が成り立ちます．($(\cos\theta)^2$ を $\cos^2\theta$ と表します．他も同様です．)

また，$\tan\theta=\dfrac{y}{x}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ であり，①の両辺を $\cos^2\theta$ で割ることにより，

$$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

が成り立ちます．

三角関数の相互関係

1° $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

2° $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

3° $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

+α $\tan\theta$ は，$\cos\theta=0$ のときは定義されません．

+α $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ は使う機会が大変多く，首席公式とでも言うべき公式です．