はじめに

本書は，図形と方程式を学校などで一通り学習した人すべてが対象で，次のような人に役立つことを目指しました．

・教科書と入試とのギャップを埋めたい人．
・トピックスごとに整理し理解を深めたい人．
・図形と方程式をより深く理解したい人（本書では，教科書では触れられてない項目も取り上げています）．
・図形と方程式を得意分野にしたい人．

（なお，教科書レベルのことから解説していますが，教科書の説明で十分と思われるところは，詳しくは解説しませんでしたので，必要に応じて教科書も参照して下さい．）

座標平面上の直線は，すでに中学で登場しています．数Ⅱの教科書で扱う「図形と方程式」は，おもに直線と円です．本書では，直線と円に加えて，2次関数のグラフ（放物線）も扱いました．なお，放物線の性質を調べるときは，微分法（数Ⅱの範囲）を使いました．

さて，座標平面を導入して，「図形と方程式」を学ぶメリットですが，まずは図形を式で扱えるということが挙げられます．たとえば，図形を方程式に置き換えて，幾何の問題を計算によって解くことが出来ます（☞§32）．

また，式を座標平面の図形量に言い換えて，式の最大・最小を視覚的にとらえることも出来ます（☞§38，39）．

「座標平面」は，図形と式を結びつける道具といえます．

本書で，図形と方程式を得意分野にして，さらに図形と式を結びつける道具としての「座標平面」の理解を深め，興味や面白さを感じていただければ幸いです．

教科書Next **図形と方程式の集中講義**

CONTENTS

本書の構成と利用法

本書の構成

本書は，図形と方程式を 39 節に分けて解説しました．テーマごとに，必要ならば教科書レベルのことからはじめて，そのテーマを理解するのにふさわしい問題を取り上げました．そして，その問題を解くのに必要な手法などの説明を行い，その問題の解答を掲載しました．重要な概念や手法などを，そのつど枠囲みのなかに整理してまとめました．

各テーマは，教科書の重要項目，入試で必須の項目や是非とも身につけておきたい手法に加えて，教科書では発展扱いの項目，さらに，入試でよく出題される項目になっています．

教科書の重要項目を取り上げた節では，教科書レベルのことからはじめて，そのテーマを理解するのにふさわしい問題の解説までを行っています．

また，ちょっとしたトピックスなどを「Tea Break」としてまとめました．

なお，本書では，数Ⅱの三角関数，微分法を用いて解説しているところもあります．

本書の読み方

特に決まりはないし，読み方は自由ですが，次を参考にしてください．まずは，

点と直線
円などの曲線
移動
軌跡・領域など

の各節を順に一通り読み進めていきましょう．各自のレベルによっては易しいと感じられるところもあるでしょうが，いろいろな視点から解説しているので，理解が深まるはずです．また自力で解ける問題もあるでしょうが，そのときも答え合わせだけでなく解答も読んでください．

そして，最後に，

座標の応用

の各節を読み進めましょう．ここは，各節に大きな関連性はないので，どこから読んでも構いません．各自にとって興味深いところから読むなどしてください．

「座標の応用」の各節と「Tea Break」はとりあえず読まなくて構いませんし，各自にとって必要と思うところを読み進めていってください．

本書は，テーマごとにタイトルをつけているので，復習の際はそれを利用してください．

本書で使う記号など

$\therefore$	ゆえに
$\because$	なぜならば
$+\alpha$	補足
!	注意

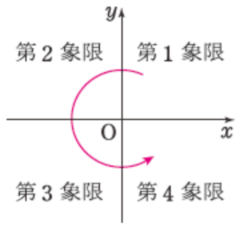
点と直線

Section 1　2点間の距離や分点の座標

座標平面は中学や数 I ですでに登場しています．用語として意外に盲点となるのは，○○象限で

第 1 象限……$x>0$，$y>0$ の部分
第 2 象限……$x<0$，$y>0$ の部分
第 3 象限……$x<0$，$y<0$ の部分
第 4 象限……$x>0$，$y<0$ の部分

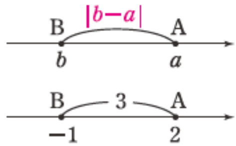
を表します．



次に 2 点間の距離について，確認しておきます．

・数直線上の 2 点間の距離

数直線上の点には実数が対応し，点 A に a が対応しているとき，a を点 A の座標といい，A(a) と表します．2 点 A(a)，B(b) 間の距離 AB は，$\mathbf{AB}=|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|$（座標の差）です．



・座標平面上の 2 点間の距離

2 点 A(x_1，y_1)，B(x_2，y_2) 間の距離 AB が，$\mathbf{AB}=\sqrt{(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1)^2+(\boldsymbol{y}_2-\boldsymbol{y}_1)^2}$ ………☆

つまり，$\sqrt{(\boldsymbol{x}\text{ 座標の差})^2+(\boldsymbol{y}\text{ 座標の差})^2}$

となることを確認してみましょう．

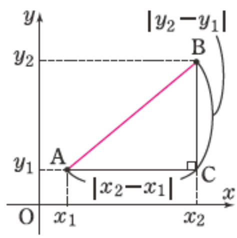
座標平面上の図形に対して，補助線を引くなら，座標軸に平行な直線が基本となります．

A を通り x 軸に平行な直線と B を通り y 軸に平行な直線の交点を C として，右図のような直角三角形 ABC を作ると，

$\mathrm{AC}=|x_2-x_1|$，$\mathrm{BC}=|y_2-y_1|$

三平方の定理により，$\mathrm{AB}=\sqrt{\mathrm{AC}^2+\mathrm{BC}^2}$

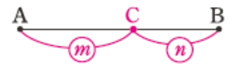
なので，☆が得られます（$|z|^2=z^2$ に注意）．



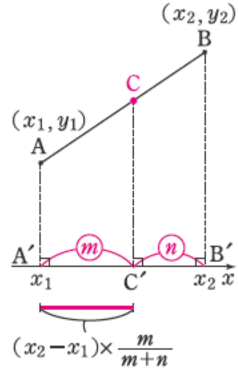
A, B の位置によらず
$\mathrm{AC}=|x_2-x_1|$
$\mathrm{BC}=|y_2-y_1|$

次に，内分点を考えます．

線分 AB 上に点 C があって，AC : CB＝m : n を満たすとき，C を AB を m : n に内分する点といいます．



A(x_1，y_1)，B(x_2，y_2)（$x_1<x_2$）を結ぶ線分を m : n に内分する点 C の座標を求めてみましょう．



A，B，C から x 軸に垂線 AA′，BB′，CC′ を下ろすと，C′ は A′B′ を m : n に内分する点です．右図の太赤線に着目して，C の x 座標は，

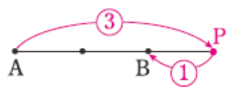
$$x_1+(x_2-x_1)\times\frac{m}{m+n}$$
$$=\frac{(m+n)x_1}{m+n}+\frac{m(x_2-x_1)}{m+n}=\frac{nx_1+mx_2}{m+n}$$

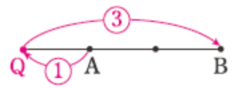
となります．$x_1 \geqq x_2$ のときも同じになります．また，y 座標も同じ形の式になります．

内分点の次は外分点を考えましょう．

点 C が線分 AB の延長上にあって，AC : CB＝m : n（$m \neq n$）を満たすとき，C を AB を m : n に外分する点といいます．

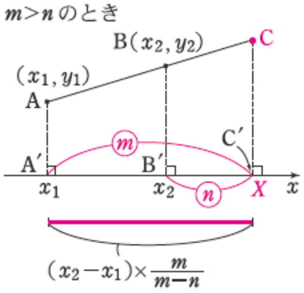
さて，AB を 3 : 1 に外分する点 P と，1 : 3 に外分する点 Q をかいてみましょう．3 : 1 の場合 AP＞BP ですから B の方の延長上に，1 : 3 の場合は A の方の延長上にあります．

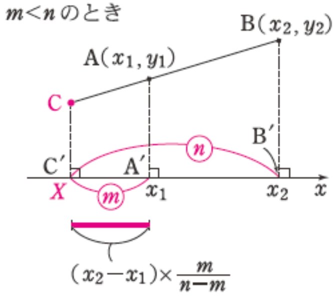




A から外分する点まで行き，次に外分点から B まで戻るというイメージでとらえましょう．

A(x_1，y_1)，B(x_2，y_2)（$x_1<x_2$）を結ぶ線分を m : n（$m \neq n$）に外分する点 C の座標を求めてみましょう．$m>n$ と $m<n$ の場合の 2 つの図を次のページにかきました．





$m>n$ のとき，上図から，C の x 座標 X は，

$$\underbrace{x_1+(x_2-x_1)\times\frac{m}{m-n}}$$

$$\left[=\frac{(m-n)x_1}{m-n}+\frac{m(x_2-x_1)}{m-n}=\frac{-nx_1+mx_2}{m-n}\right]$$

同じ式

$m<n$ のときは，C の x 座標 X は，

$$x_1-(x_2-x_1)\times\frac{m}{n-m}=\underbrace{x_1+(x_2-x_1)\times\frac{m}{m-n}}$$

となり，同じ式です．$x_1 \geqq x_2$ のときも同じです．

$$X=\frac{-nx_1+mx_2}{m-n}=\frac{nx_1-mx_2}{-m+n}$$ です．

分母・分子を -1 倍した

2 点間の距離，内分点・外分点の座標の公式

- 2 点間の**距離**は，$\sqrt{(\boldsymbol{x}\text{ 座標の差})^2+(\boldsymbol{y}\text{ 座標の差})^2}$

  $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ のとき，
- 線分 AB を $m:n$ に**内分**する点の座標は，

$$\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\ \frac{ny_1+my_2}{m+n}\right)\quad\left[\text{中点は}\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)\right]$$

- 線分 AB を $m:n$ に**外分**する点の座標は，

$$\left(\frac{-nx_1+mx_2}{m-n},\ \frac{-ny_1+my_2}{m-n}\right)\quad\left[=\left(\frac{nx_1-mx_2}{-m+n},\ \frac{ny_1-my_2}{-m+n}\right)\right]$$

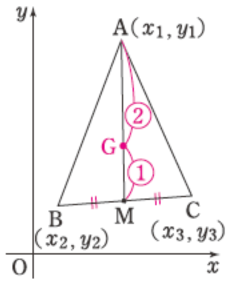
！ 内分点の座標の公式では，右の矢印のような**入れ替わりに注意**しましょう．

$$\frac{nx_1+mx_2}{m+n}$$

+α $m:n$ に外分する場合は，$m:(-n)$ に内分，あるいは $(-m):n$ に内分すると考えて，内分点の公式を使えば O.K.です．

+α 内分点，外分点はベクトルとセットにしておきましょう．ベクトルの場合については，☞「ベクトルの集中講義」§3

内分点の座標の公式を使い，3 点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$，C$(x_3,\ y_3)$ を頂点とする △ABC の重心 G の座標を求めましょう．



BC の中点を M とするとき，G は AM を 2：1 に内分する点です．BC の中点 M の座標は，

$$\left(\frac{x_2+x_3}{2},\ \frac{y_2+y_3}{2}\right)$$

G は AM を 2：1 に内分するから，その x 座標は

$$\frac{1\cdot x_1+2\cdot\dfrac{x_2+x_3}{2}}{2+1}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

y 座標も同様に求めて，

$$\mathrm{G}\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

三角形の重心の座標

3 点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$，C$(x_3,\ y_3)$ を頂点とする △ABC の重心 G の座標は，

$$\left(\boldsymbol{\frac{x_1+x_2+x_3}{3}},\ \boldsymbol{\frac{y_1+y_2+y_3}{3}}\right)$$