

はじめに

本書は、数列を学校などで一通り学習した人すべてが対象で、次のような人に役立つことを目指しました。

- ・教科書と入試とのギャップを埋めたい人。
- ・トピックスごとに整理し理解を深めたい人。
- ・数列をより深く理解したい人（本書では、教科書では触れられてない項目も取り上げています）。
- ・数列を得意分野にしたい人。

（なお、教科書レベルのことから解説していますが、教科書の説明で十分と思われるところは、詳しくは解説しませんでしたので、必要に応じて教科書も参照して下さい。）

数列という用語は高校で出てきますが、数列とは数を一列に並べたものです。したがって、自然数を順に並べたものや、正の奇数を順に並べたものは数列です。そういった意味ではすでによく接してきているはずで、おなじみのものといえるでしょう。

数列を応用することで、預金の複利計算や、ローンの支払額を求めることができます（Ⅱ § 27）。このように大変実用的な面があります。

また、自然界によく現れることが知られている数列としてフィボナッチ数列（Ⅱ § 31）があり、こちらはいろいろ興味深い性質があります。パズルのネタにもなっています（Ⅱ p.204）。

このように、数列の問題・話題は実に多様です。もちろん定番の、等差数列、等比数列や、和の計算、漸化式の解き方なども詳しく解説しました。数列の証明に欠かすことの出来ない数学的帰納法にも力を入れました。

本書で、より深く数列を理解して、数列に興味をもち、さらには数列の面白さを感じていただければ幸いです。

数列の集中講義

CONTENTS

はじめに	1
本書の構成と利用法	4

数列の基礎と和の計算

§ 1	数列とは	6
§ 2	等差数列	10
§ 3	等比数列	15
§ 4	和の記号 Σ の導入	20
§ 5	累乗の和と和の公式	25
§ 6	Σ の活用と処理の仕方	28
§ 7	Σ (多項式) $\times$ (等比数列)	33
	Tea Break $\sum_{k=1}^n kx^{k-1}$ を微分で求める	36
	Tea Break $\sum_{k=1}^n kr^{k-1}$ を「差の形」から求める	37
§ 8	階差数列	38
§ 9	a_n と S_n の関係	45
§ 10	「差の形」から和を求める	50

漸化式の解法

§ 11	漸化式とは	58
§ 12	$a_{n+1} = a_n + f(n)$	62
§ 13	$a_{n+1} = pa_n + q$	66
	Tea Break $a_{n+1} = pa_n + q$ 型の別の解法	70
§ 14	$a_{n+1} = pa_n + f(n)$	72
	Tea Break $a_{n+1} = 2a_n + 4^n$ の別解	79
§ 15	$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$	80
§ 16	分数型の漸化式	86
	Tea Break 例題 2 の別解	90
	Tea Break 3 項間と分数型の意外な関係	92
§ 17	連立漸化式	94
	Tea Break 漸化式と行列	98
§ 18	和を含む漸化式	102
§ 19	係数に n を含む漸化式	106

数学的帰納法

§ 20 「数学的帰納法」事始	112
Tea Break $(3 \text{ 乗の和}) = (1 \text{ 乗の和})^2$ その 1	121
§ 21 帰納法で等式を示す	122
§ 22 帰納法で不等式を示す	126
§ 23 初めに気をつける帰納法	130
§ 24 仮定が 2 つ必要な帰納法	134
§ 25 強い仮定の帰納法	138
Tea Break $(3 \text{ 乗の和}) = (1 \text{ 乗の和})^2$ その 2	143
§ 26 漸化式と帰納法	144
Tea Break 変則的な帰納法	150
Tea Break 碁石はすべて同じ色!?	154

数列の応用

§ 27 預金と借金	156
§ 28 群数列	166
§ 29 格子点の数え上げ	174
Tea Break 直角三角形の格子点	181
§ 30 漸化式を作る	182
§ 31 フィボナッチ数列	188
Tea Break フィボナッチ数列の階差数列	198
Tea Break フィボナッチ数列と黄金比	201
Tea Break 増える面積とフィボナッチ数列	204
§ 32 整数解と漸化式	206
§ 33 ニュートン法	210
あとがき	216



本書の構成

本書は、数列を 33 のテーマに分けて解説しました。テーマごとに、必要ならば教科書レベルのことからはじめて、そのテーマを理解するのにふさわしい問題を取り上げました。そして、その問題を解くのに必要な手法などの説明を行い、その問題の解答を掲載しました。重要な概念や手法などを、そのつど枠囲みのなかに整理してまとめました。

各テーマは、教科書の重要項目、入試で必須の項目や是非とも身につけておきたい手法に加えて、教科書では発展扱いの項目、さらに、入試でよく出題される項目になっています。

教科書の重要項目を取り上げた節では、教科書レベルのことからはじめて、そのテーマを理解するのにふさわしい問題の解説までを行っています。

また、ちょっとしたトピックスを「Tea Break」としてまとめました。

本書の読み方

特に決まりはないし、読み方は自由ですが、次を参考にしてください。まずは、

数列の基礎と和の計算

漸化式の解法

数学的帰納法

の各節を順に通り読み進めていきましょう。各自のレベルによっては易しいと感じられるところもあるでしょうが、いろいろな視点から解説しているので、理解が深まるはずです。また自力で解ける問題もあるでしょうが、そのときも答え合わせだけでなく、解答も読んでください。

そして、最後に、

数列の応用

の各節を読み進めましょう。ここは、各節に大きな関連性はないので、どこから読んでも構いません。各自にとって興味深いところから読むなどしてください。

「数列の応用」の各節と「Tea Break」はとりあえず読まなくて構いませんし、各自にとって必要と思うところを読み進めていってください。

本書は、テーマごとにタイトルをつけているので、復習の際はそれを利用してください。

本書で使う記号など

∴	ゆえに
∵	なぜならば
+α	補足
!	注意

数列の基礎と和の計算



数列とは

数を一列に並べたものを数列といい、数列に現れる各数を数列の項といいます。

よって、数が並んでさえいれば、それは数列なのですが、数学の考察対象となるのは、その数の並びに特徴があったり、ある規則に従って並べられていたりする場合です。

例えば、

1° 正の奇数を小さい順に並べた

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$$

2° 12の正の約数を小さい順に並べた

$$1, 2, 3, 4, 6, 12$$

です。

数列を一般的に表すには、1つの文字に項の番号を右下に添えて、

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$$

のように書きます（右下の字を添字（そえじ）といいます）。

a_1 を初項（第1項）、 a_2 を第2項などといい、 n 番目の項 a_n を第 n 項といいます。

また、この数列を、第 n 項に $\{ \}$ をつけて、 $\{a_n\}$ と略記することが多いです。つまり、

$$\{a_n\}: a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$$

です。 $\{a_n\}$ は、 $\{a_n\} (n=1, 2, \dots)$ と表すこともあります。

上の2°のように、項の個数が有限である数列を有限数列といい、1°のように、項がどこまでも続く、個数が有限でない数列を無限数列といいます。有限数列では、項の個数を項数、最後の項を末項といいます。

上の1°の数列を $\{a_n\}$ とすると、つまり

$$\{a_n\} : 1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$$

とすると、第 n 項 a_n は、 $a_n=2n-1$ と表せます ($n=1$ のとき、 $a_1=2 \cdot 1 - 1 = 1$ で確かに 1 になっています)。

このように、数列 $\{a_n\}$ において、第 n 項 a_n が n の式で表されるとき、これを数列 $\{a_n\}$ の一般項といいます。この例の場合は、 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=2n-1$ です。この一般項を利用して、左の 1° の数列を $\{2n-1\}$ と表すこともあります。なお、**びっただし n 番目の項 ($=a_n$) でないと一般項とはいいません**。奇数は $2n+1$ と表すこともできますが、これは $\{a_n\}$ の $n+1$ 番目の項なので、 $\{a_n\}$ の一般項とはいいません。 $\{2n+1\}$ は、

$$\{2n+1\} : 3, 5, 7, 9, 11, \dots$$

という数列を表します (初項は 1 ではなく 3 です)。

$\{(n \text{ が入った式})\}$ という表記は、第 n 項 (一般項) が (n が入った式) で表される数列を表しています。

さて、数列 $\{a_n\}$ に対して、

$$\{a_n+1\}, \{a_{2n}\}, \{a_{2n+1}\}, \{a_{2n+1}+n\}$$

という 4 つの数列を考えてみましょう。

これらの数列の第 1 項、第 2 項、第 3 項、第 4 項は、 n を 1, 2, 3, 4 としたものですから、次のようになります。

$$\begin{array}{llll} \{a_n+1\} & : a_1+1, & a_2+1, & a_3+1, & a_4+1, & \dots \\ \{a_{2n}\} & : a_2, & a_4, & a_6, & a_8, & \dots \\ & \quad \nwarrow 2 \cdot 1 & \nwarrow 2 \cdot 2 & \nwarrow 2 \cdot 3 & \nwarrow 2 \cdot 4 & \\ \{a_{2n+1}\} & : a_3, & a_5, & a_7, & a_9, & \dots \\ & \quad \nwarrow 2 \cdot 1 + 1 & \nwarrow 2 \cdot 2 + 1 & \nwarrow 2 \cdot 3 + 1 & \nwarrow 2 \cdot 4 + 1 & \\ \{a_{2n+1}+n\} & : a_3+1, & a_5+2, & a_7+3, & a_9+4, & \dots \end{array}$$

次に、 $\{a_n\} = \{2n-1\}$ (左の 1°) としたとき、上の 4 つの数列の第 1 項 (初項)、第 2 項、第 n 項 (一般項) を求めてみましょう。数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=2n-1$ です。

初項 (第 1 項)	第 2 項	一般項 (第 n 項)
$\{a_n+1\} : \underline{a_1+1}$	a_2+1	a_n+1
$= \underline{(2 \cdot 1 - 1)} + 1 = 2$	$= (2 \cdot 2 - 1) + 1 = 4$	$= (2n - 1) + 1 = 2n$
$\nwarrow a_n = 2n - 1 \text{ の } n \text{ に } 1 \text{ を代入}$		

となります。 $\{a_n+1\}$ の一般項は $2n$ です。 $\{a_n+1\}$ の第 n 項は a_n+1 であり、 $a_n+1=(2n-1)+1=2n$ として一般項が求められるわけです。

	初項 (第1項)	第2項	一般項 (第 n 項)
$\{a_{2n}\}$:	a_2	a_4	a_{2n}
	$=2 \cdot 2 - 1 = 3$	$=2 \cdot 4 - 1 = 7$	$=2 \cdot 2n - 1 = 4n - 1$
	$\uparrow$ $a_n = 2n - 1$ に $n = 2$ を代入	$\uparrow$ $a_n = 2n - 1$ に $n = 4$ を代入	$\uparrow$ $a_n = 2n - 1$ において、 $n \Rightarrow 2n$

となるので、 $\{a_{2n}\}$ の一般項は $4n-1$ です。 $\{a_{2n}\}$ の第 n 項は a_{2n} であり、 a_{2n} は $a_n=2n-1$ において、 n を $2n$ におきかえたものなので

$$a_{2n} = 2(2n) - 1 = 4n - 1$$

であり、これが $\{a_{2n}\}$ の一般項です。つまり、 $\{a_{2n}\} = \{4n-1\}$ です。

様子はつかめたでしょうか？ 上と同様にして、 $a_n=2n-1$ のとき、

	初項	第2項	一般項
$\{a_{2n+1}\}$:	a_3	a_5	a_{2n+1}
	$=2 \cdot 3 - 1 = 5$	$=2 \cdot 5 - 1 = 9$	$=2(2n+1) - 1 = 4n + 1$
			$\uparrow$ $a_n = 2n - 1$ で $n \Rightarrow 2n+1$

となります。

この結果を使うと、 $\{a_{2n+1}+n\}$ は、次のようになります。

	初項	第2項	一般項
$\{a_{2n+1}+n\}$:	a_3+1	a_5+2	$a_{2n+1}+n$
	$=5+1=6$	$=9+2=11$	$=(4n+1)+n=5n+1$

最後の2つの数列の一般項の求め方をまとめておきましょう。

$\{a_{2n+1}\}$ の第 n 項は a_{2n+1} であり、 a_{2n+1} は $a_n=2n-1$ において、 n を $2n+1$ におきかえたものなので、

$$a_{2n+1} = 2(2n+1) - 1 = 4n + 1 \cdots \cdots \textcircled{1} \quad \therefore \{a_{2n+1}\} = \{4n+1\}$$

$\{a_{2n+1}+n\}$ の第 n 項は $a_{2n+1}+n$ であり、 $\textcircled{1}$ により、

$$a_{2n+1}+n = (4n+1)+n = 5n+1 \quad \therefore \{a_{2n+1}+n\} = \{5n+1\}$$

となります。

また、次のように数列をおきかえることもあります。

例えば、数列 $\{a_{2n+1}+n\}$ の場合、 $a_{2n+1}+n=b_n$ において、 $\{b_n\}$ を考えるという方法です。元の数列の第 n 項は $a_{2n+1}+n$ と大そうな形をしています。おきかえた数列 $\{b_n\}$ の第 n 項は b_n なので、表記も簡単だし見易くなります。漸化式 (I § 11) を解く際、しばしば活用します。

例題 1

● ● ● 基本

$a_n=n^2$ ($n=1, 2, \dots$) を満たす数列 $\{a_n\}$ について、

- (1) 偶数番目の項を小さい方から並べて得られる数列の一般項を求めよ。
- (2) 奇数番目の項を小さい方から並べて得られる数列の一般項を求めよ。

- (1) $\{a_n\}$ の偶数番目の項を小さい方から並べると

$$a_2, a_4, a_6, a_8, \dots$$

となります。1 番目 $\Rightarrow a_{2 \times 1}$, 2 番目 $\Rightarrow a_{2 \times 2}$, 3 番目 $\Rightarrow a_{2 \times 3}$, $\dots$

ですから、 n 番目の項は、 $a_{2 \times n} = a_{2n}$ です。 a_{2n} は、 $a_n = n^2$ において、 n を $2n$ におきかえたものです。

- (2) $\{a_n\}$ の奇数番目の項を小さい方から並べると

$$a_1, a_3, a_5, a_7, \dots$$

となります。1 番目 $\Rightarrow a_{2 \times 1 - 1}$, 2 番目 $\Rightarrow a_{2 \times 2 - 1}$, 3 番目 $\Rightarrow a_{2 \times 3 - 1}$, $\dots$

ですから、 n 番目の項は、 $a_{2 \times n - 1} = a_{2n-1}$ です。

解答

- (1) $\{a_n\}$ の偶数番目の項で、小さい方から n 番目の項は a_{2n} であるから、求める一般項は、

$$a_{2n} = (2n)^2 = 4n^2$$

- (2) $\{a_n\}$ の奇数番目の項で、小さい方から n 番目の項は a_{2n-1} であるから、求める一般項は、

$$a_{2n-1} = (2n-1)^2$$