

はじめに

本書は、ベクトルを学校などで一通り学習した人すべてが対象で、次のような人に役立つことを目指しました。

- ・教科書と入試とのギャップを埋めたい人。
- ・トピックスごとに整理し理解を深めたい人。
- ・ベクトルをより深く理解したい人（本書では、教科書では触れられてない項目も取り上げています）。
- ・ベクトルを使える道具にしたい人。

（なお、教科書レベルのことから解説していますが、教科書の説明で十分と思われるところは、詳しくは解説しませんでしたので、必要に応じて教科書も参照して下さい。）

ベクトルは高校で習う新しい概念です。ベクトルというと、まずは「矢印」というイメージをもつことでしょう。

しかしながら、「矢印」全体が必ずしも主役を演じるわけではありません。矢印の先端（終点）をとらえることが目的になっていて、終点が主役を演じることも多いのです。

たとえば、ベクトルを利用して直線を表すことができるのですが、それはベクトルの終点の軌跡に着目しているのです（§ 4）。

「矢印」全体だけでなく、終点に興味があるときも、ベクトルは活用できるわけです。

ともかく、ベクトルはいろいろな場面に応用が利く優秀な「道具」です。ベクトルという新しい概念を学び理解して、それを活用すると大きなメリットがあります。

本書で、より深くベクトルを理解して、ベクトルに興味をもち、さらにはベクトルの面白さを感じていただければ幸いです。

CONTENTS

はじめに	1
本書の構成と利用法	4

内積導入以前のベクトル

§1 つなぐ・のばす(和と実数倍)	6
Tea Break 正五角形の対角線の長さ	12
Tea Break 正五角形と格子点	13
§2 成分表示と空間座標の導入	14
§3 始点の変更, 分点の公式	16
§4 直線のパラメータ表示	21
§5 平面上の点の表現と1次独立	26
§6 直線・線分の表現と交点の求め方	28
§7 $a\vec{PA}+b\vec{PB}+c\vec{PC}=\vec{0}$ を満たす点P	35
§8 内心を表すベクトル	42
Tea Break 内心と重心に関連して	45
§9 単位ベクトルと角の二等分線	46
Tea Break 単位ベクトルで内角の二等分線の性質を導く	51
§10 直線で分けられる領域と三角形	52
§11 斜交座標	58
§12 重心座標	62
Tea Break 垂心の重心座標	68

内積がらみのベクトル

§13 内積の導入	70
Tea Break 内積と中線	75
§14 垂心の表現	76
§15 $a\vec{OA}+b\vec{OB}+c\vec{OC}=\vec{0}$	79
§16 平方完成	82
§17 円のベクトル方程式	86
Tea Break $\vec{AP} \cdot \vec{BP} = \vec{BP} \cdot \vec{CP} = \vec{CP} \cdot \vec{AP}$	89
§18 内積の図形的解釈	90
§19 正射影ベクトル	94
§20 外心を表すベクトル	98
Tea Break 直線上の点の設定の仕方	102

▶ 平面から空間へ

§ 21	空間における点の表現	104
§ 22	空間における平面の表現	106
§ 23	外積	110
§ 24	ねじれ 2 直線	115
	Tea Break ねじれ 2 直線と距離の最小	120
§ 25	三角形の面積	122
	Tea Break 三角形の面積と内積	126
§ 26	四面体の体積	127
§ 27	対称点を求める	132
§ 28	空間中の円のパラメータ表示	137
§ 29	係数の和が 1	142
	Tea Break 内分点の公式の拡張と見る	146

▶ ベクトルの応用

§ 30	対等性の活用	148
	Tea Break 四面体の重心など	153
§ 31	2 定長のベクトルの和	154
§ 32	積の和を内積と見る	158
§ 33	直線の方程式の見方	162
§ 34	空間における平面の方程式	166
§ 35	点と平面の距離	172
§ 36	2 平面のなす角	174
	Tea Break 正四面体の 2 面のなす角	178
	Tea Break 正八面体の 2 面のなす角	179
§ 37	図形に翻訳する	180
§ 38	三角関数の合成と内積	186

▶ 図形のまとめ

§ 39	ベクトル理解のための平面図形	190
§ 40	空間の基礎事項	197

あとがき	200
------------	-----



本書の構成

本書は、ベクトルを 38 のテーマに分けて解説しました。テーマごとに、必要ならば教科書レベルのことからはじめて、そのテーマを理解するのにふさわしい問題を取り上げました。そして、その問題を解くのに必要な手法などの説明を行い、その問題の解答を掲載しました。重要な概念や手法などを、そのつど枠囲みのなかに整理してまとめました。

各テーマは、教科書の重要項目、入試で必須・頻出の項目や是非とも身につけておきたい手法に加えて、教科書では発展扱いの項目、さらに、ベクトルの視野を広げる項目になっています。

教科書の重要項目を取り上げた節では、原則として、教科書レベルのことからはじめて、そのテーマを理解するのにふさわしい問題の解説までを行っています。

さらに、最後の 2 節では、ベクトルの問題でよく使われる図形の定理などを、他の本を見なくて済むように、コンパクトにまとめました。

また、ちょっとしたトピックスを「Tea Break」としてまとめました。

本書の読み方

とくに決まりはないし、読み方は自由ですが、次を参考にしてください。まずは、一通り読み進めていきましょう。各自のレベルによっては易しいと感じられるところもあるでしょうが、いろいろな視点から解説しているので、理解が深まるはずです。また自力で解ける問題もあるでしょうが、そのときも答え合わせだけでなく、解答も読んでください。

教科書で発展扱いの「空間における平面の方程式」について、§ 34～§ 36 で取り上げました。「空間における平面の方程式」は大変便利なので是非とも身につけてほしい項目ですが、「§ 36 2 平面のなす角」は、その中でも発展的なので、読み飛ばしても構いません。

また、ベクトルの視野を広げる項目も読み飛ばして構いません。具体的には、

§ 12 重心座標

§ 29 係数の和が 1

§ 38 三角関数の合成と内積

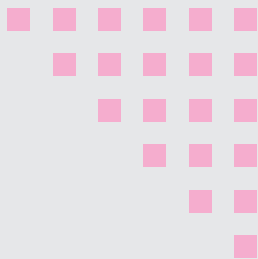
です。この 3 つの節は、文字の大きさも小さくしてあります。

本書は、テーマごとにタイトルをつけているので、復習の際はそれを利用して下さい。

本書で使う記号など

∴	ゆえに
∴	なぜならば
パラメータ	媒介変数
+α	補足
!	注意

内積導入以前のベクトル



つなぐ・のばす (和と実数倍)

1. ベクトルとは？

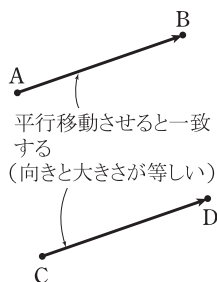
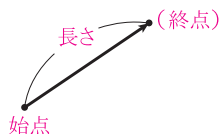
線分に向きをつけたものを有向線分といいます。有向線分は、「始点，向き，長さ」によって定まります。このうち「向きと長さ」だけに着目したものがベクトルです（長さを，ベクトルの大きさといいます）。ベクトルは，向きと大きさだけで定まり，その位置を問題にしません。

よって，右図のように，位置は異なるものの，向きと長さが等しい有向線分 AB と有向線分 CD は，ベクトルとしては同じです。

有向線分 AB で表されるベクトルを $\overrightarrow{AB}$ と表します。右図のとき， $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ です。

また，ベクトルは，1つの文字と矢印を用いて， $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ のように表すこともあります。

こんな簡単なものですが，ベクトルの和（つなぐ）と実数倍（のばす）を考えることで，例えば正五角形の対角線の長さが求まってしまいます！（これについては，例題2で取り上げます）

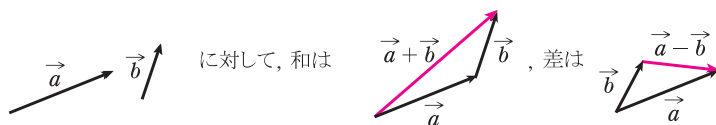


2. ベクトルの和，差，実数倍

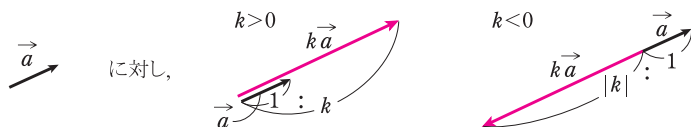
ベクトル $\vec{a}$ の大きさを $|\vec{a}|$ と表します。 $\overrightarrow{AA}$ を大きさが0のベクトルと考え，零ベクトルといい， $\vec{0}$ で表します。通常， $\vec{0}$ の向きは考えません（あらゆるベクトルに平行，とする立場もあります）。

ベクトルの和，差は次のようになります。

$$\vec{A} \quad \overrightarrow{AA} = \vec{0}$$



ベクトルの実数倍は、次のようになります。



$\overrightarrow{AB}$ において、始点と終点を入れかえたベクトル $\overrightarrow{BA}$ は $\overrightarrow{AB}$ と逆向きなので、 -1 倍と考え、 $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ です。これはピンと来るようにしておきましょう。



ベクトルの和、差、実数倍の計算は、たとえば、

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$$

といったように、普通の文字の場合と同じように行えます。

また、ベクトルの和は、次のように見るができます。図アで

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$$

が成り立ちますが、これは $\overrightarrow{AB}$ を、C を“中継点”として

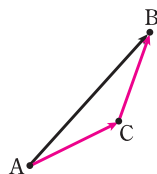
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$$

と分解できることを表します。“中継点”は任意にとることができ、それも複数とって構いません。たとえば、P、Q を任意にとり、この2点を“中継点”として、図イにおいて

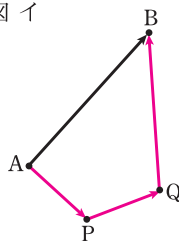
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QB}$$

と分解することもできます。要は、 $\overrightarrow{AB}$ について、矢印で始点 A から終点 B までたどることができれば、 $\overrightarrow{AB}$ をこれらの和の形に“分解”できます。

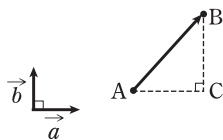
図ア



図イ



与えられた図形で、あるベクトルを与えられたベクトルの和の形に表すには、うまい“中継点”を見つけて、始点から終点までたどることができるようになればよいのです。

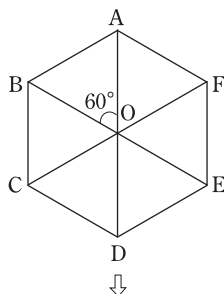


例題 1

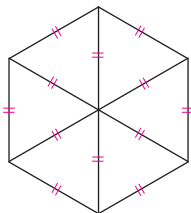
● ● ● 基本

正六角形 $ABCDEF$ において、 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{AF} = \vec{b}$ とする。線分 AD と線分 BE の交点を O 、線分 OC の中点を G 、線分 OE の中点を H とするとき、ベクトル $\overrightarrow{BC}$ 、 $\overrightarrow{BG}$ 、 $\overrightarrow{CH}$ 、 $\overrightarrow{GH}$ は $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ を用いて、 $\overrightarrow{BC} = \square$ 、 $\overrightarrow{BG} = \square$ 、 $\overrightarrow{CH} = \square$ 、 $\overrightarrow{GH} = \square$ と表される。
(武蔵工大・環)

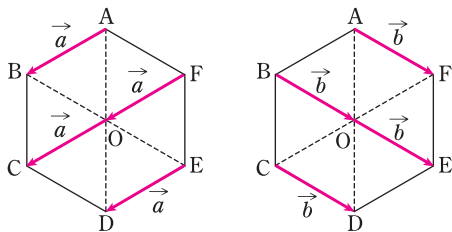
正六角形について、3本の対角線を引くと、対称性により3本は1点(O とする)で交わり、右図のようになります。 O のまわりに正3角形が6個並びます。また、対称性により、辺と対角線には下図のような平行の関係があります。



O のまわりの3角形はすべて正3角形なので



$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{AF} = \vec{b}$ とおくと、正六角形の中でこれに等しいベクトルは、下図などがあります。



さて、解答です。ベクトルは分解できることに着目しましょう。下図で、 O を始点または終点とするベクトルは $\vec{a}$ または $\vec{b}$ を用いて表されるので、 O で分解し、 O を中継点として ‘つなぐ’ 形にしましょう。

解答

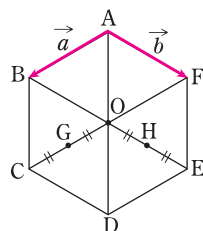
$\overrightarrow{BC}$ は、 O を “中継点” として $B \rightarrow O \rightarrow C$ というルートを見つけます。 $\overrightarrow{BG}$ は、やはり O を “中継点” として $B \rightarrow O \rightarrow G$ とします。 $\overrightarrow{OG}$ の大きさは $\overrightarrow{OC}$ の大きさの $\frac{1}{2}$ 倍です。]

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OG} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OH} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OH} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$



+α ベクトルを分解して、ベクトルの和の形にしたとします。このとき 最初のベクトルの始点と最後のベクトルの終点が、その和のベクトルの 始点と終点です。たとえば、 $\overrightarrow{CH}$ は次のように分解することもできます。

$$\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EH} = \vec{b} + (-\vec{a}) + \left(-\frac{1}{2}\vec{b}\right) = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

中継点はどのようにとっても構いません。

さて、次の話題は、正五角形の対角線の長さについてです。1 辺の長さが 1 の正五角形の対角線の長さ x を求めよ、という問題は、易しくはなく、入試にも出されます。ノーヒントの場合は、初等幾何を用いて、p.12 の Tea Break のようにするのが普通です。

