はじめに　黒木正憲

この書は，著者が「高校への数学」の第14巻，18巻，19巻に連載した講義をまとめたもので，中学の数学の基礎を見直すことに力点がおかれています．基礎といっても，実は"高度な基礎"で，みんながあまり意識せず，深くは理解できないところを掘り起こし，読者を"魔法にかける"試みの講義なのです．それによって，読者の脳細胞レベルまで変化させ，本人が気づかないうちに，潜在的パワーを引き出そうというわけです．

著者の講義はいつも具体的な素材から出発します．数学は数学のためにあるのではなく，科学全般にとっても大切で，数学を「科学の言葉」と見る場合，具体的モデルの中で数学を学ぶほうが将来の可能性の幅も広がるし，また，そこに楽しさもある，というのが著者の主張だからです．したがって，「1次方程式は大陸を解く」として，地球のマントルに浮かぶ山の厚みを求め，「2次方程式が生物を解く」として，虫の個体数の変化を計算し，「1次関数が"国家経済"を解く」として，投資，所得，消費の問題があつかわれたりします．そして，それらの解法は実に明快です．

この書があつかっているテーマは，「数式」から「図形」まで，中学の数学の全般にわたっていますが，みんなが苦手とする"論証"とか"確率"など周到な例が準備されていて，みんなの興味をひきつけながら，3段論法とか背理法とか期待値などを理解させてしまうしくみになっています．また，放物線をあつかえば，そこに，円の方べきの定理に似た定理があること，円も放物線も円錐の切断として表されることなど，また，3次関数で表されるような坂道の勾配を問題にしながら，放物線についての面積へと転化していることなど，また，整数をあつかいながら，「p を素数，a を p の倍数でない正の整数とするとき，a，$2a$，$3a, \cdots, (p-1)a$ をpで割った余りは，$1, 2, 3, \cdots, p-1$ の順列である」ことを簡単に証明してみせて，フェルマーの小定理，ウィルソンの定理，オイラーの定理といった高校を越える数学にも目を開かせてしまう，という配慮もあります．

ともかく，この書は，ときに考えこまなければならないところはあっても，素材が身近で具体的なだけに，楽しく読める本です．入試に現れる，ときに無味乾燥な問題を相手にするのに飽きたとき，本書を通読すれば，読者は著者の魔法にかけられ，きっと数学に対する脳細胞が活性化することでしょう．

この書には，著者を反映して，数学のもつロマン—感性のときめき—があります．どうぞ，あなたもそういうロマンにひたってください．

本書の利用法

この本は，こんな風に，利用されたがっている

皆さんがこの本を手にして下さったのには，人それぞれの理由があるにちがいありません．そこでまずはじめに，この本の目的別利用法を並べてみたいと思います．

（その1）数学との関係が，なんとなくうまくいっていない人の利用法

現在，数学と不仲で顔も見たくない，みたいな状態の方，そういう人はまず目次を見て下さい．そして，心のひかれるタイトルをどれでもいいから一つ選んで，そのページをめくって下さい．そうしたら，文章だけを気軽に読んでみて下さい．

問題や答は飛ばしてもかまいません．とにかく，電車の中にはってある広告でも眺めるみたいに，読み進んでいきましょう．

そこには，「数学ってのは，実は，そんなに悪いヤツでもないんだぜ」という事が書いてあります．そんなささやきに耳を傾けながら少しずつ数学への偏見を溶かして下さい．

数学にほほえみを返せる余裕がでてきたら，他の利用法に進みましょう．

（その2）数学に親しみは感じるけど，いまひとつしっくりこない人の利用法

数学はそんなに嫌いじゃないんだけど，どことなくわかった気がしないし，学校や塾などの試験で思ったほど点がとれない，っていう方は，まず初級編（代数）「キミを魔法にかける」を読んで下さい．

ここには“代数のミコココロ”がじっくりと書き込まれています．世の中では単なる機械的計算としか思われていない分野に新しい視点を与えています．

この章の目的は，君に“魔法をかける”ことです．人はちょっとしたきっかけで，何でもない風景を美しい絵画のように眺められるようになります．君をそういう気分にしようと企てているのがこの章なのです．

一つ講を読み終えるごとに，終わりについている練習問題で，魔法の効き目を確かめてみて下さい．

（その3）数学を愛しはじめているのに，どうふるまったらいいかわからない人の利用法

数学が大好きになりはじめているのに，何か満たされない毎日を送っている方，そういう方には本書はぴったりです．

まず，中級編（代数）に進んで下さい．そうして，各問題と10分だけとり組んでみて下さい．一部の問題には歯がたたないでしょう．でもそれは問題ではありません．10分というのは，問題の中身を知るための時間です．解答は読んでしまえばよいのです．各答には，筆者が長年の間育んできた数学への想いが込められて

います．きっと"数学と仲良しになる"とはどういう感じか，をわかってもらえることでしょう．

同じように中級編（幾何）を読んだら，初級編に戻ってじっくり味わって下さい．きっと君はもう，易しいことにも面白さを見出せるようになっているはずです．

（その4）いま数学に燃えているかな，っていう人の利用法

数学が好きで好きで，という君はとにかく中級編と取り組んで下さい．しかも一題一題をじっくりと考えて，解けるかあきらめるかしてから解答を読みましょう．

どちらにしても解答は君を十分楽しませるはずです．そして，この講義の中には，数学を研究するためのテーマがところどころ散りばめられています．

もし君たちがそれらから何かの刺激をうけてくれれば，本当に嬉しく思います．

（その5）中学生でない方の利用法

もしかするとあなたは，中学生ではなく，数学を教えている方かもしれないし，あるいは，数学を学び直している方かもしれません．その場合は，全くお好きな場所からお読み下さい．

本書は，原則的に各講の内容は独立で，一話完結ものですから，順番に読まなくても大丈夫でしょう．でも，もしあなたが大人であるならば，1番興味をもってくれるのは，たぶん初級編であるような気がします．

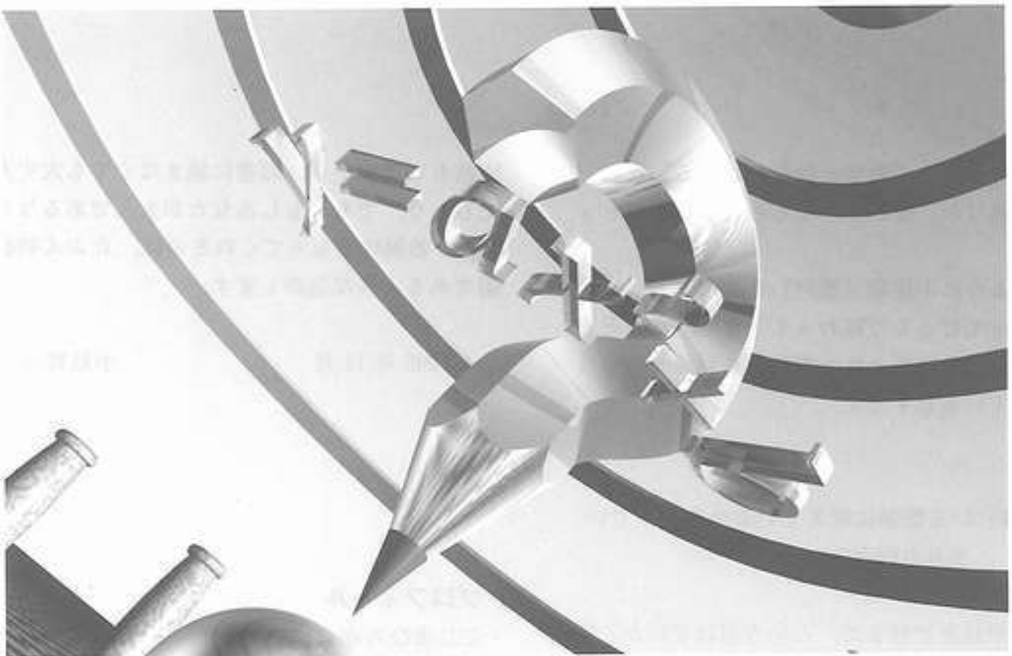
1995年11月　　　　小島寛之

プロフィール

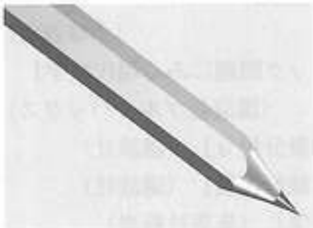
・こじまひろゆき
・東京大学理学部数学科卒業
　同大学大学院経済学研究科博士課程修了
・『高校への数学』常連執筆者
・経済学者にして，数学エッセイスト．帝京大学経済学部専任講師
・趣味　ロックバンドでギターを弾くこと
・著作
　『解法のスーパーテクニック』（東京出版）
　『ミステリーな算数』パラドックス事件簿①（小峰書店）
　『数学オリンピック問題にみる現代数学』（講談社ブルーバックス）
　『ゼロから学ぶ微分積分』（講談社）
　『ゼロから学ぶ線形代数』（講談社）
　『サイバー経済学』（集英社新書）
　『アルミちゃん』（小峰書店）
　劇作家・北村想，漫画家とり・みきとの共著

数学ワンダーランド

小島寛之 著



目次



I 初級編（代数）

キミを魔法にかける

高校への数学

II 中級編（代数）

代数計算だってこんなに豊かで楽しい

III 中級編（幾何）

ユークリッドをのりこえよう

負の数って何のため？

このコーナーは，君たちに魔法をかけるコーナーです．ずっと読み続ければ，知らず知らずに超数学力が身につくことうけあいです．そしてこの魔法は一生解けないのです．

主に中学数学の基礎事項を見直します．「基礎じゃぁ読まなくていいや」などと見下げてほしくありません．基礎は基礎でも“高度な基礎”です．君たちがあまり意識せず，深くは理解できないところを掘り起こします．それが“魔法にかける”ということなのです．

さて，第1回の今回は「負の数」についての魔法をかけましょう．

負の数は中学に入ってすぐに教わり大多数の人はすっかり正確な計算ができるようになっているでしょうが，「じゃぁ負の数って何のため？」とあらためて聞かれると困ってしまうのではありませんか．

そこで「負の数の意味」を2つの面から振り返りながら，正負の数の足し算・引き算をまとめましょう．

1. 反対の世界

ポール・エルデシュという天才数学者は4才のとき母親にこう言ったそうです．

「100から250をひくと，0より150下だね．」

これで将来数学者にならなければカワイイ話なのですが，天才のエピソードだと思うとなんだか腹が立ちます．

それはともかくとして負の数は何も天才だけの財宝ではなく，昔から人々の間で無意識に用いられてきました．というのは，世の中には「反対の世界」があるからに他なりません．

私たちは「反対の言葉」というのを多く持っています．「大きい」に対して「小さい」，「冷たい」に対して「温かい」，「黒字」に対して「赤字」というようにです．

これらは皆，どこかに「基準」をとってそこからの反対向きの2方向を別の言葉で表したものです．

なぜそんなことをするのでしょうか？

それは私たちの生活は必ず何かの「基準」をもとに成りたっているからです．ものごとを見るときに重要なのは，その絶対的な「位置」ではなく，「基準からの隔たり」だからなのです．

例えば，自分の体調を知りたいときは，体温が「何度であるか」が大切なのではなく，「平熱からどのくらい隔たっているか」が問題になります．

国の経済状態を分析するには，GNP(国民総生産)の「絶対額」ではなく「前年と比べての増減」が重要な数値となります．

負の数は実際，商業の中で成長してきた考え方です．

2. 数直線上の距離

次の年表で，明治維新から東京オリンピックまで何年あるか計算してみましょう．

——年表遊び——

終戦を原点に年表を書きかえよう．

□にあてはまる正負の数を入れよ．

すなおに

$$1964-1868=96 \quad\cdots\cdots①$$

とやってもよいですが，数直線上の（＋19）と（−77）を使って，原点からの距離を加え合わせて，

$$|+19|+|-77|=19+77=96 \quad\cdots\cdots②$$

とやっても計算できます．近現代の歴史についての計算は数直線上の方がやりやすいでしょう．

②の計算は，皆さんの知っているマイナスの数の減法，

$$(+19)-(-77)=(+19)+(+77)$$

を意味するものです．このように，

数直線上の2つの数の隔たりは，大きい数から小さい数を引いた差である……(☆)

という法則が必ず成り立ちます．2数が正負のいずれかであってもです．

この原理を利用した少しシャレた問題を紹介しましょう．

——分数間の分数——

分母が4，分母が5の異なる2つの分数がある．このとき，一方より大きく他方より小さい分母が21の分数が必ず存在する．なぜか．

例えば $\frac{7}{4}$ より大きく $\frac{9}{5}$ より小さい分数として $\frac{37}{21}$ が存在します．理由を説明できますか？

(☆)をチョチョイと利用するだけです！

解 $\frac{k}{4}$ と $\frac{l}{5}$ の数直線上の隔たりは，

$$\left|\frac{k}{4}-\frac{l}{5}\right|=\left|\frac{5k-4l}{20}\right|=\frac{|5k-4l|}{20}$$

これが0でないならば分子は自然数であり，よって1以上であるから，（隔たり）$\geqq\frac{1}{20}$

ここで，隣り合う $\frac{m}{21}$ と $\frac{m+1}{21}$ の隔たりは $\frac{1}{21}$ で，$\frac{1}{20}$ より小だから，必ず，

$\frac{k}{4}$ と $\frac{l}{5}$ の間に $\frac{m}{21}$ が1つは入る．

ところで，さっきの天才エルデシュはこんな冗談を言ったそうです．「私が生まれた頃，地球の年齢は40億年と言われていたが，今では45億年と言われている．だから私は5億才だ．」

この冗談のもとには(☆)の原理がさり気なく使われているのに気がつきました？

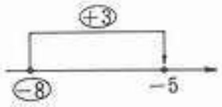
3. 中和して消えるイメージ

数直線のイメージは上で見たようにある場面には有効性を示しますが，どちらかというと馴染みにくい考え方です．

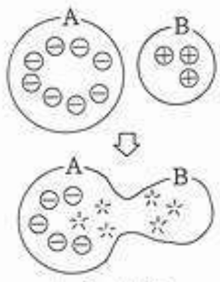
なぜなら，(−8)+(+3)というような計算も

「−8の位置から3だけ右に進む」

というように，はじめの数（位置）と後の数（移動）とが異なる意味を持っているからです．



正負の足し算をもっとスムーズに理解するには，電気を帯びた物質の接触のイメージがよいでしょう．



(−8)+(+3)
=−(8−3)

マイナス8単位帯電しているAとプラス3単位帯電しているBが接触すると，プラスと

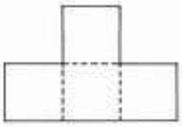
マイナスが中和して3単位分失われ，よって帯電量の多いマイナス側が差の5単位分残る，という感じです．

このイメージなら，足し算のもつあらゆる法則が難なく理解できます．そして次のような難問にも力強いヒントを与えてくれます．

テトリス問題

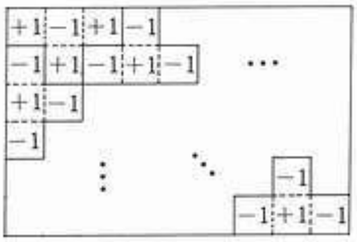
右の図形を99コをしきつめて長方形を作ることはできない．

なぜか．



解　仮りに99コで長方形が作れたとする．

………☆



図のように，99×4 コの正方形 +1 と −1 を置いて行く．その際，辺をはさみ隣りあう2つの正方形には異符号が置かれるようにする．

この時，

99×4 コの数字を合計するとゼロになる

なぜなら，99×4 は偶数なので長方形のたてかよこのどちらかは偶数となり，その方向に集計すると各列は全部0となるからだ．

ところで，数字を置いたままテトリス図形99コに分解すると，各図形上の4つの数の合計は +2 か −2 である．

+2 と −2 を合計 99 コ使ってゼロを作ることはできない．

というのは，少ない方を多い方で中和してゼロにしていくと，99 は奇数なのでゼロとはならず多い方の符号が幾つか残る．よって不合理が生じる．

したがって，☆は成り立たない．

いかがでしたか？　正負の数の計算を単なる形式的なものとして覚えこむよりも，具体的なイメージを持つ方がずっと力がつくと思いませんか？

効き目の確かめ問題

次の計算をせよ．

$(-3.141)+(+2.986)+(-5.859)$
$+(-4.986)$

（答は 13 ページ）