はじめに　黒木正憲

数学とはその定義・定理・公式を用いての計算であるとしか考えてない人にとって，数学は無味乾燥なものでありましょう．まして，数学の定義・定理・公式もうろ覚えで，数学に乗りおくれた人にとって数学は難行苦行の拷問と映ることでしょう．自分の周囲の人をながめてごらんなさい．数学を苦手と思い，さらに嫌悪を抱き，あるいは恐怖さえ感じている多くの人を見つけることができるはずです．

数学はその論理になじまない人を拒否します

その論理とは，知識の単なる駆使ではなく，知識の上の知恵なのです．たとえば，初等幾何のいろんな問題では，適当な補助線をひくことによって見事に解決されます．しかし，そのような補助線のひきかたは，幾何の定義や定理は教えてくれません．それはそのような知識の上に立つ知恵の働きです．そしてランクの高い知恵ほど的確な補助線を導いてくれるのです．

しかも，そのような知恵は，多分にその人の情に基づいているのです．「数学とは情緒である」と云った偉い数学の先生がいましたが，まさしく情に根ざした知恵が数学の世界なのです．

数学の問題は解法が1とおりとはかぎりません．もし1とおりならば，それを知識として覚えればすむことですが，問題に対する解法の多様さが知恵の見せどころとなるのです．そこに数学のおもしろさと楽しさがあります．ただし，その知恵は自然に湧きでるものではありません．

堅固な知識の土台の上にそれを絶えず働かせる訓練によって知恵も醸しだされてくるのです．

そのような目で，数学を見なおしてごらんなさい．いままで拷問としか見えなかった数学への痛みが消えていくことでしょう．

本書は，「高校への数学」に2年間にわたって掲載された，小島寛之さんの講義をベースにしたものです．小島さんがこの書で明かす数学に対する接しかた，見かた，感じかたは，きっとあなたの数学の前途に輝く光りをあたえてくれるでしょう．数学が嫌いな人にはその見かたを変えさせ，数学が好きな人にはその楽しさを増し，数学を楽しんでいる人にはロマンをかりたてる，それがこの「スーパーテクニック」です．

本書の利用法

この本は，ぼくの '87及び '88の『高校への数学』での連載を一冊にまとめたもので，それに新たに練習題及びその解答を付加しました．

連載中のぼくの記事に対する意気込みはこうでした．
「読んで楽しく，中学数学全体を一望し，解法に新しい視点を与え，涙がでるような良問を紹介する」

あれでもこれでも一流にと，スポーツで言えば，カールルイスみたいな線を狙った訳です．

中学生諸君向けのハイセンスな参考書の一冊となることを期待しています．

──さて，使い方ですが，

「即効性をお望みの方」は，

とにかく，23講分一気に読んでしまいましょう．そうすれば，どんな考え方が大切で，これからどう学ぶべきかが見えてくるはずです．それからゆっくり練習題に挑戦したり，他の問題集にとりかかったりすればよいでしょう．

「数学が苦手な方」は，

この本の半分位は大変高度なので，各講の前半２ページ分を，実際に例題を解きながら勉強し，後半２ページは楽しく読み流すだけにしましょう．そして練習題の解けそうな問題にあたって下さい．

「数学が好きで好きでという方」は，

紙とペンを持って，１講ずつじっくりと味わいながら読み進みましょう．「先を読まずに，しばし考え込みましょう」と書いてあれば，本当にその指示に従って下さい．それがこの本を楽しむ最高の方法です．

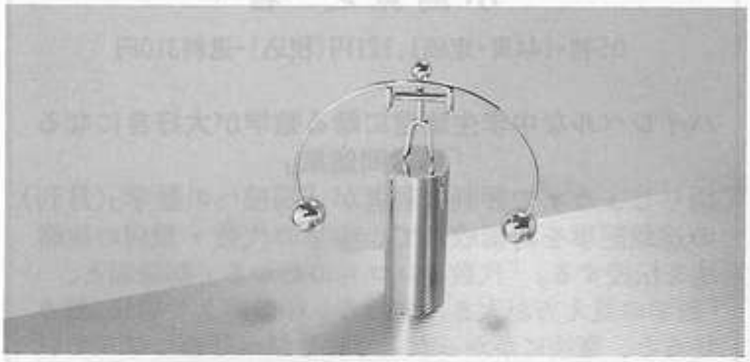
また，このタイプの諸君の中で現実の入試問題に対する適応力が十分でないと思っている方は，練習題に制限時間をつけて解くことにより，現実的な学力も身につけて欲しいと思います．

1989年 8月　　　　　　　　　　　　小島寛之

著者略歴

●東京大学理学部数学科卒　同大学院経済学研究科博士課程修了
●帝京大学経済学部助教授　専門は経済理論
●数学エッセイストとして、著作活動を展開
　『高校への数学』にも長い間、記事を連載している
●主な著作
『サイバー経済学』(集英社新書)『ミステリーな算数』(小峰書店)『ゼロから学ぶ微分積分』(講談社)『数学オリンピック問題にみる現代数学』(講談社ブルーバックス)

解法のスーパーテクニック



目次

■図形編

■数式編

図形

2等辺3角形は語る

この講座で勉強して行こうと思っている人に今後ずっと意識してほしいことは，まず，

- 幾何学はとても広い．
- 幾何学はとても深い．

ということです．中学生が学ぶ数学の分野の中では，幾何こそが最も広く，深く，そして数学的かもしれません．だからこそ，

- 幾何学はとても役に立つ．

そんなことを頭に置いて，勉強してほしいものです．

第１回の今回は，‘平行線と合同’の範囲から，とくに‘２等辺３角形’にスポットをあててみることにします．

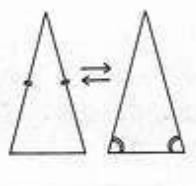
第１講　２等辺３角形は語る

２等辺３角形は，小学生でも知っている最も基本的な図形であるにもかかわらず，実に応用力が強い．幾何を得意にする第一歩は，まずは２等辺３角形の性質を十分に使いこなせるようになることでしょう．

定理 1.1

（１）　２等辺３角形の底角は等しい．

（２）　２角が等しいなら２等辺３角形である．



実に単純な定理ですが，とくに，

新しく２等辺３角形を作りだす

ことによって，大きな威力を発揮します．

◆応用 1

３角形の２辺の和は一辺より長い．

これは小さい頃から常識だと思っていたでしょう．それはそれでいいのですが，実は証明することができ，しかもそこには２等辺３角形がうまい働きをするのです．味わってみて下さい

［証明］

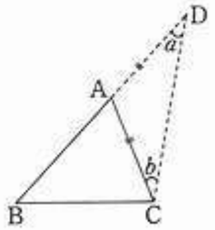
BA の延長上に

AD＝AC

となる点Dをとる．

△ACD は２等辺３角形であるから，図で

$a=b$



よって，∠BDC＜∠DCB

３角形では，大きな角と長い辺が向かいあっているので（これの証明は ☞文末のHelp 1），

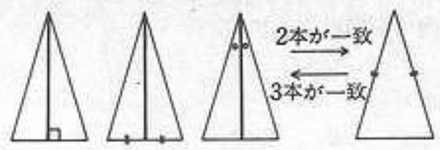
BC＜BD＝AB＋AD＝AB＋AC

（証明おわり）

定理 1.2

（１）　２等辺３角形の頂点からの垂線，中線，角の２等分線の３本は一致する．

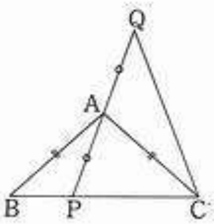
（２）　１頂点からの垂線，中線，角の２等分線のうちの２つが一致している３角形は２等辺３角形である．



このような言い方をしているテキストは，ほとんどありませんが，様々な場面で役に立ちます．この定理自体の証明も一部を除けば簡単です．垂線，中線，角の２等分線のどれかある２組が一致することから，２等辺３角形であることを証明する場合，３通りの場合分けが必要ですが，その中のある１つは証明が困難です．どれが困難であるか，見破れますか？（見破れない人は，☞文末の Help 2）

◆応用 2

AB＝AC である△ABC の辺 BC の３等分点で，Bに近いものを P，PA を２倍に延長した点をQとする．



△QPC も２等辺３角形であることを証明せよ．

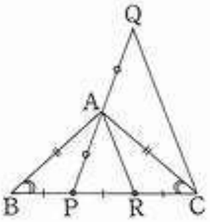
３等分点と言うぐらいだから，もう１つの点Rを打つことが自然に思い浮びます．２等辺３角形が何重にも働く様子を楽しんで下さい．

［証明］

もう１つの３等分点Rを取る．すると，△ABC は２等辺３角形だから，

∠ABP＝∠ACR

よって



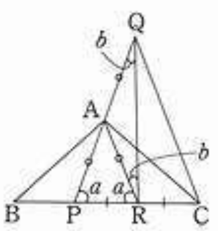
△ABP≡△ACR（２辺夾角相等）

∴ AP＝AR

［ここで，中点連結定理を △PQC に用いれば即終りますが，ここでは大道具を振り回したくありません．QR を結ぶのが手筋です．］

△APR，△AQR は２等辺３角形なので右図中の２つの a，b はそれぞれが等しい．△PQR の内角の和を考えて，

$2a+2b=180°$

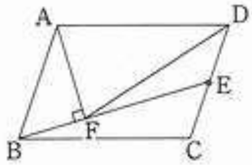


よって，$\angle \mathrm{PRQ}=a+b=90°$ であって，△QPC に対し，QR は中線であり，かつ垂線であるから，定理 1.2 によって，△QPC は２等辺３角形である．（証明おわり）

◆応用 3

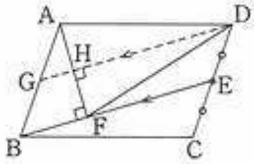
平行四辺形 ABCD の辺 CD の中点をEとし，Aから直線 BE に垂線 AF を引くとき，DF＝DA となることを証明せよ．

（甲陽学院）



ある３角形が２等辺３角形であることを証明するには，前述の 1.1 か 1.2 を使うのがよいのですが，∠DFA を計算するのがちょっと面倒そうなので，1.1 よりむしろ 1.2 に持ち込みたい所です．そのためには，Dから垂線，中線，角の２等分線のどれかを引かねばなりません．

［証明］



Dから AF に垂直な直線を引き，AF，AB との交点をH，Gとする．

∠DHF＝∠HFB なので DG∥EB

よって，GBED は平行四辺形となるから，

$$\mathrm{GB}=\mathrm{DE}=\frac{1}{2}\mathrm{DC}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}$$

よってGは AB の中点で，中点連結定理によりHも AF の中点となるから，DH は △DAF にとって垂線でかつ中線であるから，△DAF は２等辺３角形である．（証明おわり）

入試問題にしてはとてもイキでしたね．出題者のセンスがうかがえます．

さて，定理 1.1 と定理 1.2 を合わせると単純明解な表現ができます．要するに

2等辺3角形は左右対称だ

ということです．小学校でよく勉強した人にとってはこの表現の方がずっとシックリくるのではないでしょうか．では，初等幾何ではなぜ 1.1 や 1.2 のような言い回しをするのでしょうか．いろいろ理由が考えられますが，とりあえずこのように言っておきましょう．

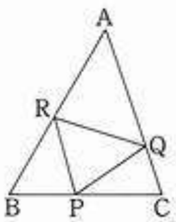
それがユークリッド幾何の流儀なのだ

2等辺3角形とは，一口に言えば左右対称を表現する最も基本的な図形なのです．この線対称という性質が，とても重要な働きをすることを，以降でも見てもらいましょう．

◆応用 4

鋭角3角形 ABC と辺 BC 上の**定点P**に対し，AC，AB 上にQ，Rをとって △PQR の周の長さを最小にしたい．

Q，Rを作図せよ．



どうでしょう．知ってますか．割と有名なテクニックなんですが，知らない人は先を読まずにしばし考え込みましょう．

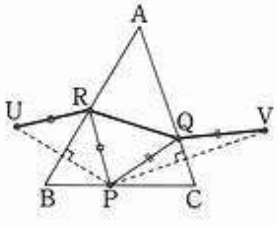
［解答］

Pの AB，AC に関する対称点をU，Vとすると，

△RUP

△QVP

は2等辺3角形で，



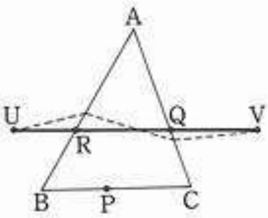
$$PR+RQ+QP=UR+RQ+QV$$

Pは定点であるから，U，Vも動かない点．

Q，Rを動かして，PR+RQ+QP を最小にするには，折れ線 UR+RQ+QV の長さを最小にすればよい．

折れ線は，UV を結ぶ線分のとき最小になる．

すなわち，UV と AB，AC との交点をR，Qとすればよい．



読むとナーンダと思う人もいるでしょう．しかし，まだ先があるのです．

◆応用 5

鋭角3角形 △ABC の BC，CA，AB 上に**自由に**3点 P，Q，R をとる時，△PQR の周の長さを最小にするにはどこに3点をとればよいか．

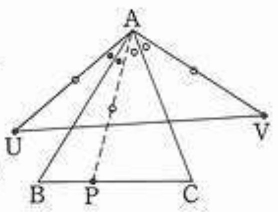
すぐにピーンときたら有段者です．

［解答］

さて，さっきのU，Vに対し，△AUV を作ると，

$$AU=AP=AV$$

より △AUV は2等辺3角形．

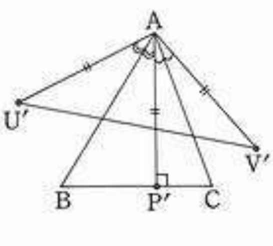


また，明らかに，

$$\angle UAV=2\angle BAC$$

よって，Pを動かして行くと，U，Vも動き △AUV は，頂角が ∠A の2倍に等しい2等辺3角形のまま動く．

したがって，AU の長さ，すなわち AP の長さが短かいほど UV は短かいから，PをAから BC に引いた垂線の足とすればよい．



*　　　*　　　*

ここでも2等辺3角形が大きな役割を演じました．以上をまとめると，

• Pを止めてQ，Rを動かす．

⇩

• Pの対称点U，Vを結ぶ線分と AB，AC との交点R，Qに対し，△PQR の周は最小になり，それはUVに等しい．

⇩

• 止めていたPを動かす．

⇩

• PがAから BC に下ろした垂線の足のときに △PQRの周＝UV は最小．

という図式ができあがります．

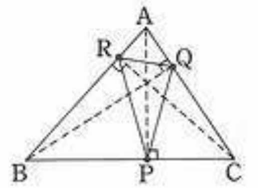
よって答えは，

『Aから BC に下ろした垂線の足をPとし，Pの AB，AC に関する対称点U，Vを作り，UVと AB，AC との交点をR，Qとすればよい．』

この結論を見てオヤッと思ってほしいのですが，それは，応用5は

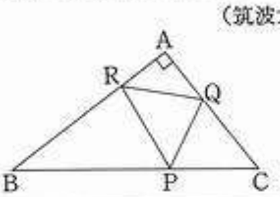
P，Q，Rに対し平等な条件

であるにもかかわらず，答はPだけヒイキした形になっていて釈然としません．Pが垂線の足ならば，当然Q，Rもそうあるべきでしょう．そして答は本当にその通りなのです．

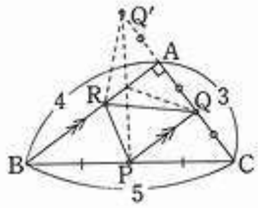
> 鋭角3角形 ABC の3辺上に3点P，Q，Rをとり，△PQR の周を最小にするには，3点を頂点からの垂線の足にすればよい．
> （この △PQR を垂足3角形といいます．）
>
> 
>

はじめにPでなくQを止めておけば，Qが垂線の足となったはずです．Rを止めておけば，Rが垂線の足となっていたでしょう．よって上の結果が当然予想されます．（予想ではなく，確実に証明したい人は，☞Help 3）．

以上のような考察は受験に無縁ではなく，入試問題にも出題されています．

> **◆応用 6**
> 3辺の長さが
>
> AB＝4，BC＝5，CA＝3
>
> の直角3角形がある．BC，CA，AB 上に3点P，Q，Rをとり，
> PQ＋QR＋RP＝k とする．
>
> （1） P，Qがそれぞれ BC，CA の中点のとき，k の最小値を求めよ．
>
> （2） PがAから BC に引いた垂線の足のとき，k の最小値を求めよ．
>
> （筑波大付駒場）
>
> 
>

［解答］

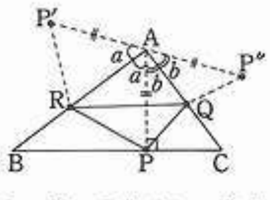


（1） PQ は一定だから，QR＋RP を考えればよい．

Qの AB に関する対称点をQ′とおくと，

QR＋RP＝Q′R＋RP ……………①

①の右辺が最小になるのはRがPQ′上にあるときで，①$=\sqrt{PQ^2+QQ'^2}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$ だから， $k=PQ+\sqrt{13}=2+\sqrt{13}$ (cm)



（2） AB，AC に関するPの対称点を P′，P″ とおくと，

$k=P''Q+QR+RP'$

であり，右図で，

$a+b=90°$ により，

∠P′AP″＝180° だから，Q，RがAに一致するときに k は最小になり，AP′＝AP＝AP″ だから，k の最小値は 2AP に等しい．

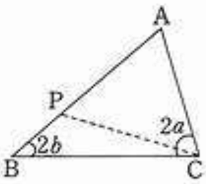
ここで，AP×BC＝AB×AC（＝2△ABC）

$\therefore\ AP=\dfrac{12}{5}\qquad\therefore\ k=\dfrac{24}{5}$ (cm)

➡注 △ABC が鋭角3角形のときは，P，Q，Rが，A，B，Cから対辺に下した垂線の足に一致するときに k は最小になります（∠A＝90° のときは，〰〰がAに一致して，(2)のようになる）

[Help 1]

右図で，$a>b$ として，$AB>AC$ を証明する．



辺 AB 上に点 P を，

$\angle BCP=a-b$

であるようにとることができて，このとき，

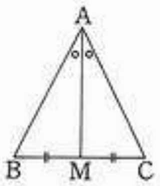
$\angle APC=\angle ACP=a+b$

よって，$AP=AC$ であるから $AB>AC$

[Help 2]

「中線と角の2等分線が一致するような3角形は2等辺3角形である」

の証明が一番難しい．



$AM=AM$

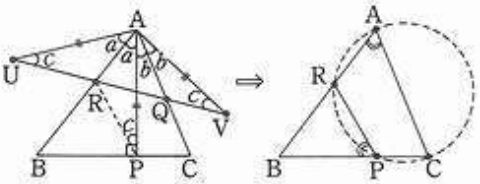
$BM=CM$

$\angle BAM=\angle CAM$

では2辺夾角にはならず，工夫が必要です．

次回のテーマと密接に関係することになるので，証明は次回に持ちこみます．

[Help 3]



角度について，上左図のようになるから，

$\angle BAC=a+b=90°-c=\angle RPB$

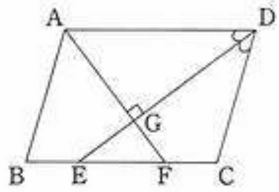
よって，□ARPC は同一円周上にあるから

$\angle ARC=\angle APC=90°$

同様に，$\angle AQB=90°$

練 習 題

1． 平行4辺形 ABCD で，$\angle D$ の2等分線と BC との交点を E とし，A から DE に垂線 AG を下し，直線 AG と BC との交点を F とする．



このとき，$AB=BF$ であることを証明せよ．

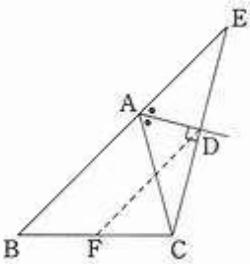
（82　国学院栃木）

2． $BC=8$cm

$AB+AC=15$cm

の △ABC がある．

点 C から $\angle A$ の外角の2等分線に垂線 CD を下し，直線 CD と BA の交点を E とする．



このとき，

（1） $AC=AE$ を証明せよ．

（2） BC の中点を F とするとき，DF の長さを求めよ．

（3） B，C を固定して，点 A が $AB+AC=15$cm を保ちながら直線 BC の一方の側だけを動くとき，点 D のえがく線を書け．

（類題　86　大分県）

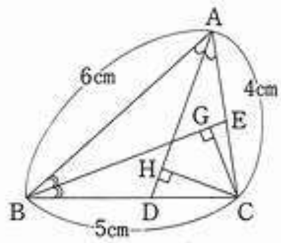
3． △ABC で

$AB=6$cm,

$AC=4$cm,

$BC=5$cm

である．$\angle A$ の2等分線と BC との交点を D，$\angle B$ の2等分線と AC との交点を E とし，C から BE, AD に垂線 CG，CH をおろす．

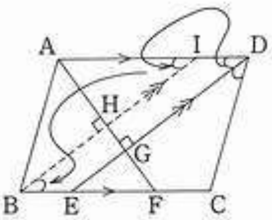


このとき，$GH=\boxed{}$ cm である．

（84　大阪星光学院）

解答

1. BからAFに垂線BHを下し，直線BHとADとの交点をIとする．



BI // ED,

AD // BC

から，

$$\angle ADE=\angle AIB=\angle FBH$$

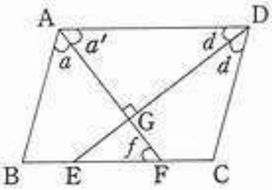
平行4辺形の性質より，$\angle B=\angle D$ なので

BH も $\angle B$ の2等分線

すると，BH は △BAF の垂線かつ角の2等分線なので，定理1·2より，

△BAF は2等辺3角形

（別解） 右図のように，a，a'，d，fをきめる．



AB // DC により

$a+a'+2d=180°$ ………①

一方，$\angle AGD=90°$ により

$d=90°-a'$ ………………②

②を①に代入して，

$a+a'+2(90°-a')=180°$ より　$a=a'$ …③

これと，AD // BC により

$f=a'=a$

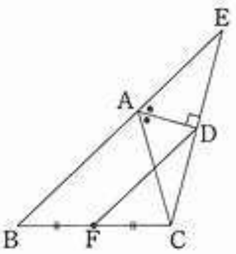
ゆえに，　BF=BA

2. (1) △ACE に対して，AD は，

∠Aの2等分線かつ

CE への垂線

であるから，定理 1·2 より，



△ACE は2等辺3角形……………①

∴ AC=AE

(2) ①により，DはCEの中点．

また，(1)の結果から，

EB=AE+AB=AC+AB=15

よって，△CBE に中点連結定理を用いて

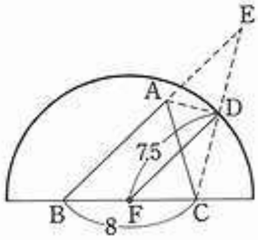
$$DF=\frac{1}{2}EB=\frac{1}{2}\times15=7.5\ (\text{cm})$$

(3) (2)の結果から，点Aがどこにあっても DF=7.5(cm) で，B，Cは固定されているからその中点Fも定点．

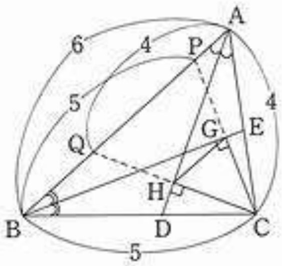
よって，点Dの動く線は

点Fを中心とする半径7.5cmの半円周（図の太線）

である．



3. CG，CH と AB との交点をP，Qとする．



BG は △BCP に対し，

垂線かつ角の2等分線

よって，△BCP は2等辺3角形．

同様にして，

△ACQ も2等辺3角形

よって，GはCPの中点，HはCQの中点．

したがって，中点連結定理により，

$$GH=\frac{1}{2}PQ=\frac{1}{2}(AQ+BP-AB)$$

ここに，AQ=AC=4，BP=BC=5

$$\therefore\ GH=\frac{1}{2}(4+5-6)=\frac{3}{2}(\text{cm})$$