

は じ め に

私は合格した瞬間の喜びを、数十年たった今も鮮明に覚えている。どちらであれ、結果は淡々と受けとめようと決めていたけれど、御殿下グラウンドの端に設置された掲示板で受験番号を見つけた瞬間に走り出していた。止まって〜という声が二度聞こえ、自分に向けられているようだ気づいて振り返った。息を切らせながら裸足で追いかけてきた姿勢の美しい女性が、私に荷物を手渡してくれた。手提げ袋から折りたたみの傘や、いろいろなものをばらまきながら走つたらしい。一番で赤門前の公衆電話ボックスに飛び込み、家に電話した。合格したよと、母に告げた。振り返ると行列ができていた。ボックスを出て見上げると、花霞の空が輝いていた。入学後、すぐに受験雑誌「大学への数学」の添削を始めた。添削した生徒達の合否が気になって、数年は、発表を見に行った。翌年から三四郎池の際に掲示板が戻った。東大新聞を買い、喧噪の傍らで、おめでとうと残念だを、心の中で繰り返した。東大入試を見つめ始めて50年が過ぎた。最近では高校や塾から「東大合格者を増やしたいが何をすればよいか」という相談を受けることも多い。東大は学歴社会日本にあつて、最大の難関である。私の生徒も、毎年数多く挑み、その何割かは目的を果たさずに敗れ去っていく。最近では得点開示をする。2点不足で不合格というのはざらで、中には0.2点足らず不合格という生徒もいた。合否のライン上にひしめき合っているに違いない。その天と地ほどの違いを分けているのはなんだろうかと思う。学力低下が叫ばれて久しい。それに対して東大入試は難関を堅持している。ほとんど解けないで帰ってくる生徒達の少しでも力になりたいと願う。手強い相手だが、効果的な方法が何かあるに違いないと思う。

まず、生徒と東大の問題の距離を測らねばならないと、いろいろな場所で生徒達に問題を解いてもらい、その答案を分析し、どんなことに気をつけたら合格に届くのかを考えた。その結果をもとに、少しでも合格に有益な情報を提供したいと思って本書を書いた。本書の中で徐々に語っていきたい。受験生のみならず、指導者の方にも、対策の参考になることを願っている。

似たような内容を繰り返し出題する部分は解答を繰り返せば対策ができるはずである。見たことがない問題は粘って少しでも解くしかない。アンテナを立て、感度を上げれば、どこかに解決の糸口がある。

【本書の利用法】

◆対象

東大を志望する文系受験生、および、東大志望者を指導する教師。
受験生の場合は、東大に憧れを持つ人すべてが本書の対象です。

◆本書の執筆の姿勢

「東大数学で1点でも多く取る方法」という刺激的な書名です。superな方法が書いてあって、本書を読めばたちどころに得点を拾い集めることができるわけでは、むしろ、ありません。そのための、**地道で確実な方法**を書きました。大人は経験もあり、間違いやすいところは巧みに避けます。時間の制約もないため、他の人と相談し、他の大人に批判されないように厳密な解答を書きます。そうした解答は生徒諸君が普段勉強するには適していないのではないかと考えました。生徒が普通にアプローチする解法で、間違いやすいポイント、混乱しやすいポイントで、どう切り抜けたらよいかを解説した本を提供したいと考えました。

まず、生徒が間違いやすいポイントを見るために生徒達に解いてもらいました。彼らの答案を見て、必要性を感じたことは、たとえ超基本であっても説明しています。また、計算ミスをしやすい場面では計算の仕方も解説しました。解法は多くの生徒がとるもので、正解に達する可能性が高いものです。生徒の手が着かない問題は、少しでも部分点が取れるアプローチの仕方を解説しています。全国規模の総合模試の問題を作成する際には、文系の場合には登場する文字の個数を減らし、変数と定数の混乱が起こらないようにするのが普通です。学習到達度を測ることが主目的なので「見たことがある問題」を多く入れます。しかし、東大数学は逆です。文字を多くして混乱を狙い、「よくある問題」と思って始めると経験したこともないほどの困難な場合分けで差をつけます。他大学とは一線を画した傾向です。過去問を解いて、文字の多さ、場合分けの多さに慣れてください。

◆大学の採点の体制とそれを考慮した答案の書き方

噂です。不確かな部分もあり、今後体制が変わる可能性もありますが、批判を恐れずにあえて書いてみます。現在、多くの大学が「通し」で採点をします。東大にあてはめてみれば、文科I類の第一問の答案すべてをA先生とB先生のペアが採点と検閲を行う形です。文科は各類定員350名から460名程度です。2次試験は3倍で行われます。1000枚から1300枚ほどを一週間程度の間に読まなければなりません。単純化し、仮に7日で1300枚、一日10時間採点をするとして、1時間で20枚、1

枚に3分程度しか掛けられない計算です。実行のためには次の点が重要です。ときどき白紙に近い答案がある。採点のポイントがはっきりしている。皆が0点では困るし、皆が満点でも困る。対策として、以下に注意して答案を書くことが重要です。(ア) 字は綺麗に見やすく書く訓練をせよ。図を入れ、順序よく書き、簡潔な日本語で適度な説明を入れ、最後の答えは下線を引いて目立つようにする。

(イ) 最後の答えが合わない限り高得点は望めないし、答えがあつてさえいれば、減点されることは少ない。論証しにくい場合には、厳密さにこだわらず答案を書く。

(ウ) 見たことがない問題では完答は難しい。解き切ってから答案用紙に清書をしようとすると0点になる危険性が高い。だから、答案用紙を何段かに区切って、どうしても試行錯誤が必要なら右下のあたりで行い、可能な限り、答案本体に書く。**完答を目指さず、部分点を取ることが最大の目的**と考える。まず、題意を確実に式に表現する。正しい方向だと思えることは書く。

◆学習方法

まず問題編を見てください。考えるのが好きな人は粘って考えてください。あなたにとって、数学は考えるものです。後で見直そうという甘い考えでなく計算は一発で決めてください。書き上げたら、見直して(やっぱり見直す!)甘い点はないか厳しくチェックしてください。解答編を見て、下手な部分、計算ミスを補正し、よりよい解答を作り上げます。解けないなら、解答編を読んでください。あなたにとって、数学は覚えるものです。解答を読み、理解できたら、問題編を見て解答を再現します。再現できたら、早く書く練習をします。**普段の勉強では、様々な解法を理解し、道具の幅を広げます。**ただし序列をつけ、自分にとって最良の解法を確定します。うまい解法でなく、安全な解法で着実な計算力を身につけます。本書を反復し解法を定着させます。一書の人恐るべし(一冊の本を完璧にこなすことが実力をつける王道である)。「数学は暗記科目だ」とか「数学は考えるものだ」とか、人それぞれいろいろなことを言います。決定版などありません。受験生の数だけの勉強の仕方があります。どんな方法であれ、一生懸命やれば、合格に必要な力は身につきます。

◆改訂に際して

主に2011年から15年分を取り上げています。1題だけ1996年の問題を取り上げています。出題年度一覧と簡単な内容を書いたものを作りました。一部ヒントになっています。ヒントなんか要らないという人は適宜無視してください。

【出題年度一覧と内容紹介】(内容と軽いヒント)

第一章 数と式など

1. 2次方程式 (96L-2, 96S-2 / 不等式の解の存在性)
2. 逆手流 (12L-1 / 2次式から1つの文字について解く)
3. 解と係数の関係 (23L-1 / 方程式の解で分数関数)
4. 対数で概算する (24L-2 / 教科書では近似値だが)

第二章 図形

5. 図形と動点 (17L-2 / 図形的かベクトルか)
6. 四面体と球面 (23L-4 / 解法を選択 図形的か座標か)
7. 円がいっぱい (25L-2 / 配置の様子でタイプ分けする)

第三章 整数

8. 3次不等式と1次不定方程式 (15L-1 / 3次関数のグラフを描く. 等式が1つあれば1文字消去)
9. 二項係数で調べる (18L-2 / 諦めないで調べる)
10. 二項係数をもつ素因数 (21L-4, 21S-4 / 二項係数を具体的に書き下す)

第四章 場合の数・確率

11. ソーシャルディスタンス (21L-2 / 数を選ぶ. 間を広げる定石を覚える)
12. 点を選ぶ (20L-2 / 点を直接的に考えるか座標を考えるか)
13. 正八角形上の点の動き (19L-3 / 独立試行を式で調べるか書き込むか)
14. 座標平面上で上下左右の点の移動の確率 (17L-3 / 傾き1の直線に着目する)
15. バレーボールのサーブ権と得点 (13L-4 / 列を調べ書き上げる)
16. 巴戦と条件付き確率 (16L-2 / 等比数列の和)
17. 四角形の個数 (24L-4 / 鈍角三角形の考えと同じ)
18. 赤玉同士黒玉同士が隣り合わない (23L-3, 23S-2 / 場合の数で後で突っ込む)
19. 方向を変えるか動くか (22L-4 / ○と仕切りの確率)
20. 玉の取り出し二項間漸化式 (14L-2 / 樹形図を書く)
21. 9個の部屋の移動の漸化式 (12L-3, 12S-2 / 偶奇での動き)
22. 特定の文字列が現れる確率漸化式 (15L-4 / 最初で場合分け 三項間)
23. 玉を置き換えて操作が複雑な漸化式 (25L-3 / 樹形図で変化を見る)

東大数学で1点でも多く取る方法

一文系編一

第6版

目次

はじめに	1			
本書の利用法	2			
	<hr/>			
	<table><tr><td></td><td>問題</td><td>解答</td></tr></table>		問題	解答
	問題	解答		
数と式など	10	34		
図形	11	48		
整数	12	61		
場合の数・確率	13	73		
座標	19	135		
数列	24	201		
数学Ⅱの微積分	27	225		
あとがき	288			

問題 1 a, b, c, d を正の数とする. 不等式

$$\begin{cases} s(1-a) - tb > 0 \\ -sc + t(1-d) > 0 \end{cases}$$

を同時にみたす正の数 s, t があるとき, 2 次方程式

$$x^2 - (a+d)x + (ad - bc) = 0$$

は $-1 < x < 1$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつことを示せ.

(96 東大・文科/第 2 問, 理科/第 2 問)

問題 2 座標平面上の点 (x, y) が次の方程式を満たす.

$$2x^2 + 4xy + 3y^2 + 4x + 5y - 4 = 0$$

このとき, x のとりうる最大の値を求めよ.

(12 東大・文科/第 1 問)

問題 3 k を正の実数とし, 2 次方程式 $x^2 + x - k = 0$ の 2 つの実数解を α, β とする. k が $k > 2$ の範囲を動くとき, $\frac{\alpha^3}{1-\beta} + \frac{\beta^3}{1-\alpha}$ の最小値を求めよ.

(23 東大・文科/第 1 問)

問題 4 以下の問いに答えよ. 必要ならば, $0.3 < \log_{10} 2 < 0.31$ であることを用いてよい.

(1) $5^n > 10^{19}$ となる最小の自然数 n を求めよ.

(2) $5^m + 4^m > 10^{19}$ となる最小の自然数 m を求めよ.

(24 東大・文科/第 2 問)

問題 8 以下の命題 A, B それぞれに対し, その真偽を述べよ. また, 真ならば証明を与え, 偽ならば反例を与えよ.

命題 A n が正の整数ならば, $\frac{n^3}{26} + 100 \geq n^2$ が成り立つ.

命題 B 整数 n, m, l が $5n + 5m + 3l = 1$ をみたすならば,
 $10nm + 3ml + 3nl < 0$ が成り立つ.

(15 東大・文科/第1問)

問題 9 数列 a_1, a_2, \dots を

$$a_n = \frac{{}^{2n}C_n}{n!} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定める.

(1) a_7 と 1 の大小を調べよ.

(2) $n \geq 2$ とする. $\frac{a_n}{a_{n-1}} < 1$ をみたす n の範囲を求めよ.

(3) a_n が整数となる $n \geq 1$ をすべて求めよ. (18 東大・文科/第2問)

問題 10 以下の問いに答えよ.

(1) 正の奇数 K, L と正の整数 A, B が $KA = LB$ を満たしているとする. K を 4 で割った余りが L を 4 で割った余りと等しいならば, A を 4 で割った余りは B を 4 で割った余りと等しいことを示せ.

(2) 正の整数 a, b が $a > b$ を満たしているとする. このとき, $A = {}_{4a+1}C_{4b+1}, B = {}_aC_b$ に対して $KA = LB$ となるような正の奇数 K, L が存在することを示せ.

(3) a, b は (2) の通りとし, さらに $a-b$ が 2 で割り切れるとする. ${}_{4a+1}C_{4b+1}$ を 4 で割った余りは ${}_aC_b$ を 4 で割った余りと等しいことを示せ.

(4) ${}_{2021}C_{37}$ を 4 で割った余りを求めよ.

(21 東大・文科/第4問, 理科/第4問)

問題 2 座標平面上の点 (x, y) が次の方程式を満たす.

$$2x^2 + 4xy + 3y^2 + 4x + 5y - 4 = 0$$

このとき、 x のとりうる最大の値を求めよ.

(12 東大・文科/第1問)

考え方 「 x のとりうる最大の値を求める」からといって、与式から x について解いてしまうと数学 III の関数が出てきます.

$$2x^2 + 2x(2y + 2) + 3y^2 + 5y - 4 = 0$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(2y + 2) \pm \sqrt{(2y + 2)^2 - 2(3y^2 + 5y - 4)}}{2} \\ &= \frac{-(2y + 2) \pm \sqrt{-2(y^2 + y - 6)}}{2} \end{aligned}$$

これが定義できるのは $-2(y^2 + y - 6) \geq 0$, すなわち $y^2 + y - 6 \leq 0$ のときです. 数学 III の微分法を知っていれば微分して x の最大値を調べることができます. x について解いたから y の取る値の範囲が得られました. 逆に y についての2次方程式と見て解けば、 x の取る値の範囲が得られます.

$$3y^2 + (4x + 5)y + 2x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{-(4x + 5) \pm \sqrt{(4x + 5)^2 - 12(2x^2 + 4x - 4)}}{6} \\ &= \frac{-(4x + 5) \pm \sqrt{-(8x^2 + 8x - 73)}}{6} \end{aligned}$$

となります. 通常はここまで解かず、ルートの中だけを抜き出して考えます.

解答 与式を y について整理し

$$3y^2 + (4x + 5)y + 2x^2 + 4x - 4 = 0$$

判別式を D とする. このような実数 y が存在するために x の満たす必要十分条件は

$$D = (4x + 5)^2 - 12(2x^2 + 4x - 4) = -(8x^2 + 8x - 73) \geq 0$$

$$8x^2 + 8x - 73 \leq 0$$

ここで

$$8x^2 + 8x - 73 = 0$$

を解くと

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 584}}{8} = \frac{-2 \pm \sqrt{150}}{4} = \frac{-2 \pm 5\sqrt{6}}{4}$$

$$\frac{-2 - 5\sqrt{6}}{4} \leq x \leq \frac{-2 + 5\sqrt{6}}{4} \dots\dots\dots ①$$

x の最大値は $\frac{-2 + 5\sqrt{6}}{4}$

【注意】 1° **【逆を考える】** $y = \frac{-(4x + 5) \pm \sqrt{-(8x^2 + 8x - 73)}}{6} \dots\dots\dots ②$

で $-(8x^2 + 8x - 73) < 0$ だと y が虚数になり、実数 y が存在しません。
 $-(8x^2 + 8x - 73) \geq 0$ だと y が実数になります。

このように x の取る値の範囲を求める方法として「実数 y が存在するために x の満たす必要十分条件を求める」という考え方があります。逆手流といいます。

2° **【係数を小さくする】**

$$8x^2 + 8x - 73 = 0$$

を解くとき、皆さんは間違えないと思いますが、年を取るとだんだんこういう計算が怪しくなります。係数を中に組み込んで

$$2(2x)^2 + 2 \cdot 2(2x) - 73 = 0$$

$$2x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 2 \cdot (-73)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{150}}{2}$$

とすると少し安心です。

3° **【整数問題】**

東大は逆手流が好きですが、もっと素直な出題なら整数問題にすることができ
 ます。

$$2x^2 + 4xy + 3y^2 + 4x + 5y - 4 = 0$$

を満たす整数 x, y の組 (x, y) を求めよ。

解答は簡単です。②と解くのは自然であり、 x は①を満たすから、 $\sqrt{6} = 2.4\dots$
 で近似計算すると $-3.3\dots \leq x \leq 2.3\dots$ と分かります。 $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2$
 を代入して y が整数になるものを求めます。 $(x, y) = (-3, 2), (2, -3)$ となり
 ます。計算は自分でやってください。

問題 9 数列 a_1, a_2, \dots を

$$a_n = \frac{{}^{2n}C_n}{n!} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定める.

(1) a_7 と 1 の大小を調べよ.

(2) $n \geq 2$ とする. $\frac{a_n}{a_{n-1}} < 1$ をみたす n の範囲を求めよ.

(3) a_n が整数となる $n \geq 1$ をすべて求めよ. (18 東大・文科/第2問)

考え方 (1), (2) はなんとかできます. しかし「(3) はなんだかよくわからなくなってしまって, 解けなくなった. 再現答案なんか作りたくないです」という生徒もいたくらい, 考えにくい人もいたようです.

(2) 増減を調べていると読み取ることが重要です.

解答 (1) $a_7 = \frac{{}^{14}C_7}{7!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$

$$= \frac{13 \cdot 11}{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{143}{210} < 1$$

(2) $a_n = \frac{{}^{2n}C_n}{n!} = \frac{\frac{(2n)!}{n!n!}}{n!} = \frac{(2n)!}{(n!)^3}$

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{\frac{(2n)!}{(n!)^3}}{\frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^3}} = \frac{(2n)!}{(2n-2)!} \cdot \frac{((n-1)!)^3}{(n!)^3} \\ &= \frac{2n(2n-1)}{n^3} = \frac{4n-2}{n^2} \end{aligned}$$

$\frac{a_n}{a_{n-1}} < 1$ のとき

$$n^2 - 4n + 2 > 0 \quad \therefore (n-2)^2 > 2$$

$n = 2, 3, 4, \dots$ を代入し, 成り立つのは $n \geq 4$ のときである.

(3) (2) より, $n \geq 4$ のとき, $a_n < a_{n-1}$ であるから, 数列 $\{a_n\}$ は減少数列であり, $a_7 < 1$ であるから, $n \geq 7$ のとき, $0 < a_n < 1$ となり, a_n は整数ではない.

$$a_1 = \frac{{}^2C_1}{1!} = 2$$

$$a_2 = \frac{{}^4C_2}{2!} = 3$$

$$a_3 = \frac{{}_6C_3}{3!} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$$

$$a_4 = \frac{{}_8C_4}{4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{35}{12}$$

$$a_5 = \frac{{}_{10}C_5}{5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{21}{10}$$

$$a_6 = \frac{{}_{12}C_6}{6!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{77}{60}$$

であるから、 a_n が整数となる n は、 $n = 1, 2$ である。

注意 1° 【7個は多い】

a_1 から a_7 まで計算する必要があります。文系には、多いのではないのでしょうか。「これをやるしかない」と、方向性を信じている人は別として、多くの人は不安になります。

2° 【繁分数】

$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ を繁分数（はんぶんすう）といいます。

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

外側分子
内側分母

 $\left[\begin{array}{l} \frac{a}{b} \\ \frac{c}{d} \end{array} \right]$

を、内側分母外分子（内側の b と c は分母、外側の a と d は分子になる）と覚えることができます。

$$a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^3}, \quad a_{n-1} = \frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^3}$$

で、 $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ を作るとき、そのまま代入し

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\frac{(2n)!}{(n!)^3}}{\frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^3}}$$

とします。次のステップは、これを整理することです。それが、内側分母外分子です。それで $\frac{(2n)!}{(2n-2)!} \cdot \frac{((n-1)!)^3}{(n!)^3}$ になります。

▶ あとがき ◀

本書は安田が原稿を書き、受験雑誌「大学への数学」編集部の坪田三千雄と飯島康之が読んで意見を言い、検討するという手順をとりました。何度も検討を重ねました。また、塩崎ひかるが協力しています。本書は組版システム T_EX を用いて作成されています。デザインを東京出版の岸澤康雄が担当し、それに基づいてスタイルファイルを T_EX コンサルタントの吉永徹美氏に作成していただきました。T_EX の ceosty を用いています。ceosty は吉永氏のご指導のもとに安田と友人の岡本寛氏で作成したものです。奥村晴彦三重大名誉教授の主宰されている T_EX Q&A (現 TeX フォーラム) で多くの示唆を得ました。名前を記すには多すぎる多くの生徒達が実験台となり、貴重な情報を提供してくれました。皆様に感謝致します。目標を見つけたら少々の困難にはめげない心の強さを与えてくれた両親に感謝致します。今は亡き初代社長の黒木正憲先生と奥様には、一層の感謝を致します。

(令和 8 年 2 月)

東大数学で1点でも多く取る方法 文系編 [第6版]

平成21年 5月15日 第1版 第1刷発行
平成24年 6月30日 増補版 第1刷発行
平成26年10月30日 第3版 第1刷発行
平成30年12月15日 第4版 第1刷発行
令和3年 8月17日 第5版 第1刷発行
令和8年 2月14日 第6版 第1刷発行

定価はカバーに表示してあります。

著者 安田 亨
発行者 黒木憲太郎
発行所 株式会社 東京出版
〒150-0012 東京都渋谷区広尾 3-12-7
電話 03-3407-3387 振替 00160-7-5286
<https://www.tokyo-s.jp/>
印刷所 光陽メディア
製本所 技秀堂製本部

落丁・乱丁の場合は、ご連絡下さい。送料弊社負担にてお取り替えいたします。