入試の軌跡
東京科学大(理工学系)•早大(理工系)•慶大(理工)

本書の利用法

本書の構成は，各年について，原則として，

［１］　出題問題と概評および解答
［２］　受験者からの受験報告
［３］　フォローノート（［１］の補足など）

の３つによって構成されていて，そのあとに

［４］　精選問題など
［５］　出題分野一覧

が用意されていますが，これら［１］〜［５］によって，東京科学大・理工学系（旧東工大），早大・理工系，慶大・理工を‘広く深く’知ることができるでしょう．

［１］〜［３］について説明すると，

［**1**］**について**：原則として，雑誌『大学への数学』の毎年の入試特集の解答をそのまま掲載してあります．最初にある概評も掲載当時のものです．

解答のはじめにある Data 欄の記号については右段．

［**2**］**について**：毎年，『大学への数学』の読者から受験報告をいただいています．ほとんどは，試験当日か翌日に書かれたなまなましいもので，まるで試験場からの実況放送です．合否決定後の冷静な状態のもとで書かれたものと違って，試験場での特異な心理状態などが手にとるように伝わってきて，これから受験する人にとって，貴重なアドバイスに満ちています．自分で，本番形式で解答を作成したのち，是非ともじっくりと読んでください．

［**3**］**について**：毎年の入試特集は，スペースの制約もあって，親切な解答ばかりではありません．別解や問題の背景，時間に追いたてられる試験場での作戦なども十分に書くことができません．また，毎年，十分に検討して，そのときはベストと思われた解法も，今の眼ではそうではない，というものがないわけではありません．

このような［１］の欠点を補うのが［３］のフォローノートです．解答や注の補足，別解，背景，類題などをまとめました．

さて，本書は‘模試として’の形の利用法が考えられます．そのときは，制限時間を守り，どういう順に解くべきかなどにも気を配って，できる限り試験場の状態を心がけてください．解きおわって，何点とれたかについては，精密な数値を出すことは困難だし，その必要もないでしょう．重要なのは，志望校と自分の現状とのギャップ，自分の弱点などをおおまかに確認することで，これからの勉強の指針を見定めてもらうことです．

そのために本書が，大いに役立ってくれるものと確信しています．

本書で用いる記号について：

➪**注**…初心者のための注意事項．
➪**注**，▨**研究**…すべての人のための注，研究．
➡**注**，■**研究**…意欲的な人のための注，研究．
▨…すべての人のためのコメント
■…意欲的な人のためのコメント
☆…是非身につけてほしい巧妙な解法．
★…試験場では思いつかなくてよい巧妙な解法．

次に，［１］の解答のはじめにある **Data** 欄について．問題番号，難易度と目標時間，分野（数Ⅰ…Ⅰ，数Ⅱ…Ⅱ，数Ⅲ…Ⅲ，数Ａ…**A**，数Ｂ…**B**，数Ｃ…**C** と略記）の順にまとめたもの（分野は出題時点の課程）．問題の難易は，大学入試問題の難易を 1〜10 に 10 等分したとき，

Ａ（基本)…5 以下，Ｂ（標準)…6，7
Ｃ（発展)…8，9，Ｄ（難問)…10

目標時間は，＊1 つにつき 10 分，○は 5 分，♯は無制限．

受験報告の出来具合について：

○……完答（のつもり）
△……半答（のつもり）
×……誤答・手つかず・ほぼダメ

2025年・東京科学大

180 分　I II III A(図確)B(列)C(べ複)

大学名は変わりましたが，形式・内容は踏襲されています．微積分・無限級数は傾向通り重視される一方，頻出だった複素数と整数（数 A の整数は範囲外）がない，という構成でした．昨年より誘導が親切で得点は伸びそう．ただ，①②で足止めか？

❶（60 点）　関数 $f(x)$ を $x \geqq 0$ に対して $f(x)=x\log(1+x)$ と定める．

（1）　不定積分 $\int x\log(1+x)\,dx$ を求めよ．

（2）　$y=f(x)$（$x \geqq 0$）の逆関数を $y=g(x)$（$x \geqq 0$）とする．また a，b を $g(a)=1$，$g(b)=2$ となる実数とする．このとき定積分 $I=\int_a^b g(x)\,dx$ の値を求めよ．

（3）　関数 $P(x)$ を $x \geqq 0$ に対して $P(x)=\int_0^x \sqrt{1+f(t)}\,dt$ と定める．

このとき $y=P(x)$ について，定義域を $x \geqq 0$ とする逆関数 $y=Q(x)$ が微分可能であることは証明なしに認めてよい．関数 $R(x)$ を $x \geqq 0$ に対して $R(x)=\int_0^{P(x)} \frac{1}{Q'(v)}\,dv$ と定めるとき，$R(x)$ を求めよ．

❷（60 点）　空間の点 $(0,\ 0,\ 1)$ を通り $(1,\ -1,\ 0)$ を方向ベクトルとする直線を l とし，点 $(1,\ 0,\ 3)$ を通り $(0,\ 1,\ -2)$ を方向ベクトルとする直線を m とする．

（1）　P を l 上の点とし，Q を m 上の点とする．また直線 PQ は直線 l と直線 m に垂直であるとする．このとき P と Q の座標，および線分 PQ の長さを求めよ．

（2）　l 上に 2 点 $\mathrm{A}=(t,\ -t,\ 1)$，$\mathrm{B}=(2+t+\sin t,\ -2-t-\sin t,\ 1)$ があり，m 上に 2 点 $\mathrm{C}=(1,\ t,\ 3-2t)$，$\mathrm{D}=(1,\ 2+t+\cos t,\ -1-2t-2\cos t)$ があるとする．ただし，t は実数とする．四面体 ABCD の体積を $V(t)$ とする．$V(0)$ を求めよ．

（3）　t が $t \geqq 0$ を動くとき，$V(t)$ の最大値と最小値を求めよ．

❸（60 点）　$0<p<1$ とする．表が出る確率が p，裏が出る確率が $1-p$ である 1 枚のコインを使って次のゲームを行う．

- ゲームの開始段階で点数は 0 点．
- コインを投げ続け，表が出るごとに 1 点加算し，裏が出たときは点数はそのまま．
- 2 回続けて裏が出たらゲームは終了．

0 以上の整数 n に対し，ゲームが終わったときに n 点となっている確率を Q_n とする．

（1）　Q_1，Q_2 を p を用いて表せ．

（2）　Q_n を n と p を用いて表せ．

（3）　$0<x<1$ を満たす実数 x に対して次式が成り立つことを示せ．

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

必要ならば $0<x<1$ のとき $\lim_{n\to\infty} nx^n=0$ であることを証明なしで使ってもよい．

（4）　無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} nQ_n$ を p を用いて表せ．

❹（60 点）　数列 $\{a_n\}$ を $a_1=a_2=1$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）により定め，数列 $\{b_n\}$ を $\tan b_n=\frac{1}{a_n}$ により定める．ただし，$0<b_n<\frac{\pi}{2}$ であるものとする．

（1）　$n \geqq 2$ に対して，$a_{n+1}a_{n-1}-{a_n}^2$ を求めよ．

（2）　$m \geqq 1$（m は整数）に対して，$a_{2m}\cdot\tan(b_{2m+1}+b_{2m+2})$ を求めよ．

（3）　無限級数 $\sum_{m=0}^{\infty} b_{2m+1}$ を求めよ．

❺ （60 点）（1） 関数$f(t)=\dfrac{t^2-1}{t^3}$（$t\neq 0$）の増減を調べ，グラフの概形をかけ．

（2） 実数x，y，zが，条件

$$\begin{cases} x<y<z \\ xyz\neq 0 \\ x^3y^2-x^3=x^2y^3-y^3 \\ y^3z^2-y^3=y^2z^3-z^3 \end{cases}$$

を満たしながら動くとき，xが取り得る値の範囲を求めよ．

Data

❶	C＊＊＊＊	Ⅲ／微積分（逆関数）
❷	C＊＊＊＊○	CⅡ／空間座標（四面体），三角関数
❸	B＊＊＊○	AⅢ／確率，無限級数
❹	C＊＊＊	BⅡⅢ／数列，三角関数，無限級数
❺	B＊＊＊	Ⅲ／微分法

❶＊（2） 図を用いて求めてもよいのですが（☞▨2），（3）に合わせて置換することにします．

（3） 本学受験生といえど面食らうでしょう．逆関数の微分の公式の導き方がわからないと厳しいかもしれません．

解 $f(x)=x\log(x+1)$（$x\geqq 0$）

（1） $\displaystyle\int x\log(x+1)\,dx=\int\left(\frac{1}{2}x^2\right)'\log(x+1)\,dx$

$\displaystyle=\frac{1}{2}x^2\log(x+1)-\int\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x+1}dx$

$\displaystyle=\frac{1}{2}x^2\log(x+1)-\frac{1}{2}\int\frac{(x+1)(x-1)+1}{x+1}dx$

$\displaystyle=\frac{1}{2}x^2\log(x+1)-\frac{1}{2}\int\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx$

$\displaystyle=\frac{1}{2}x^2\log(x+1)-\frac{1}{4}(x-1)^2-\frac{1}{2}\log(x+1)+C$

$\displaystyle=\boldsymbol{\frac{1}{2}(x^2-1)\log(x+1)-\frac{1}{4}(x-1)^2+C}$

（Cは積分定数）

⇨**注** 定数は積分定数に含められるので，多項式部分を展開した

$$\frac{1}{2}(x^2-1)\log(x+1)-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+C$$

なども正解となりますが，解の方が（2）の代入計算がラクです．

（2） $f(x)$の逆関数が$g(x)$であるから，
$f(g(x))=g(f(x))=x$が成り立つ．よって，
$g(a)=1$，$g(b)=2$のとき，

$$a=f(g(a))=f(1)=\log 2,$$
$$b=f(g(b))=f(2)=2\log 3$$

$I=\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$において$x=f(t)$と置換すると，
$x=a=f(1)$のとき$t=1$，$x=b=f(2)$のとき$t=2$，および$dx=f'(t)\,dt$であることから，

$\displaystyle I=\int_1^2 g(f(t))f'(t)\,dt=\int_1^2 tf'(t)\,dt$

$\displaystyle=\Big[tf(t)\Big]_1^2-\int_1^2 f(t)\,dt$

$\displaystyle=2f(2)-f(1)-\left[\frac{1}{2}(t^2-1)\log(t+1)-\frac{1}{4}(t-1)^2\right]_1^2$

$\displaystyle=2\cdot 2\log 3-\log 2-\left(\frac{3}{2}\log 3-\frac{1}{4}\right)$

$\displaystyle=\boldsymbol{\frac{5}{2}\log 3-\log 2+\frac{1}{4}}$

（3） $P(x)=\displaystyle\int_0^x\sqrt{1+f(t)}\,dt$（$x\geqq 0$）

$R(x)=\displaystyle\int_0^{P(x)}\frac{1}{Q'(v)}dv$において，$v=P(u)$と置換すると，$P(0)=0$より$v=0$のとき$u=0$，および，$dv=P'(u)\,du$である．また，$P(x)$の逆関数が$Q(x)$であるから，$Q(P(x))=x$ ……① が成り立つ．$P(x)$，$Q(x)$とも微分可能であるから，①をxで微分すると，

$$Q'(P(x))P'(x)=1 \qquad \therefore\ \frac{1}{Q'(P(x))}=P'(x)$$

以上を用いると，

$\displaystyle R(x)=\int_0^x\frac{1}{Q'(P(u))}\cdot P'(u)\,du$

$\displaystyle=\int_0^x P'(u)\cdot P'(u)\,du=\int_0^x\left(\sqrt{1+f(u)}\right)^2du$

$\displaystyle=\int_0^x\{1+f(u)\}\,du$

$\displaystyle=x+\frac{1}{2}(x^2-1)\log(x+1)-\frac{1}{4}(x-1)^2+\frac{1}{4}$

$\displaystyle=\boldsymbol{\frac{1}{2}(x^2-1)\log(x+1)-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x}$

▨**1** （1） $y=x+1$とすると，求める不定積分は

$\displaystyle\int(y-1)\log y\,dy$

$\displaystyle=\int\left(\frac{1}{2}y^2\right)'\log y\,dy-\int\log y\,dy$

$\displaystyle=\frac{1}{2}y^2\log y-\frac{1}{4}y^2-(y\log y-y)+C$

［以下，xに戻して整理］

東京科学大学・理工学系（2016～2025） 出題分野一覧

	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16
式の扱い（ⅠⅡ）……	＊	＊	＊	＊	＊	＊	＊	＊	＊	＊
方程式・不等式・関数（ⅠⅡ）……	＊	＊	＊	＊	＊	＊	❶	＊	❺	❷
データの分析（Ⅰ）……	＊	＊	＊	＊	＊	＊	＊	＊	＊	＊
場合の数と確率（A）……	❸	❹	❸	＊	❶❸	＊	❹	❺	❹	❷
統計的な推測（B）……	＊	＊	＊	＊	＊	＊	＊	＊	＊	＊
整数（A）……	＊	＊	❷	❷	❸	❶	＊	❷	❶	❹
数列（B）……	❹	❸❹	＊	＊	＊	❺	❺	❺	❹	＊
指数関数・対数関数（Ⅱ）……	＊	＊	＊	＊	＊	＊	＊	＊	＊	＊
三角関数（Ⅱ）……	❷❹	＊	＊	＊	＊	＊	＊	＊	＊	＊
図形と三角比（ⅠAⅡ）……	＊	＊	＊	❸	＊	＊	❹	＊	❸	❷❸
図形と方程式（Ⅱ）……	＊	❶❸	＊	❸	❺	＊	❶	＊	＊	❶❸
平面ベクトル（C）……	＊	＊	＊	＊	＊	＊	＊	＊	＊	❷
空間ベクトルと空間座標（C）……	❷	＊	❺	＊	❹	❸	＊	❹	＊	＊
複素数・複素数平面（ⅡC）……	＊	❺	❸	❶❹	＊	❷	❸	❶	❺	＊
式と曲線（C）……	＊	＊	＊	❹	❷	＊	＊	＊	＊	＊
関数（Ⅲ）……	❶	＊	＊	＊	＊	＊	＊	＊	＊	＊
極限（ⅡⅢ）……	❸❹	❸❹	＊	＊	❶	❺	＊	❸	❹	＊
微分（ⅡⅢ）……	❺	❶	＊	＊	＊	＊	❺	❸	❸	＊
積分（ⅡⅢ）……	❶	＊	❶❹	❺	＊	❹❺	❷	❹	＊	＊
微積分総合（ⅡⅢ）……	＊	❷	＊	＊	❺	＊	＊	＊	❷	❺

【出題範囲】

● **現行課程**（2025） **数Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・A・B・C**

数 A…場合の数と確率，図形の性質

数 B…数列

数 C…ベクトル，式と曲線と複素数平面

● 前課程（2015～2024） 数Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・A・B

数 A…場合の数と確率，図形の性質，整数の性質

数 B…数列，ベクトル

※前課程では「式と曲線」と「複素数平面」は数Ⅲです.

【試験時間】 180 分

※令和 10 年度（2028 年 2 月実施）から 150 分になることが予告されています.

2025年・早稲田大学

0分　ⅠⅡⅢAB(列統)C(べ複)

極めて難化したうえに，積分の問題が皆無という近年の早大・理工にはないセットです．③は知らないとできないし，⑤は(2)まででつまずくとお手上げになるので，①，②，④で説明は二の次にして答を出し，全体の得点率が5割超なら十分でしょう

1　複素数平面上で，複素数 z が円 $|z|=1$ の上を動くとき，

$$w=\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)z+\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)\frac{1}{z}$$

を満たす点 w の軌跡を C とする．次の問に答えよ．

（1）　C はどのような図形か，複素数平面上に図示せよ．

（2）　C と円 $\left|z-\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right|=\sqrt{2}$ の共有点を求めよ．

（3）　C で囲まれる領域と $\left|z-\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right|\leqq\sqrt{2}$ の表す領域の共通部分の面積を求めよ．

2　xy 平面上で，連立不等式 $0<x\leqq1$，$0\leqq y\leqq\log\dfrac{1}{x}$ で定まる領域と y 軸の $y\geqq0$ の部分を合わせた図形を D とする．D に含まれる三角形の面積の最大値を求めよ．

3　1から n までの異なる自然数が1つずつ書かれた n 枚のカードが一列に並んでいる．このとき，どのカードも現在とは異なる位置に移動するように並べ替えてできる順列の総数を a_n で表し，並べ方の総数 $n!$ に占める a_n の割合を p_n で表す．例えば，$a_1=0$，$p_1=0$，$a_2=1$，$p_2=\dfrac{1}{2}$，$a_3=2$，$p_3=\dfrac{1}{3}$ である．次の問に答えよ．

（1）　a_4 の値を求めよ．

（2）　$n\geqq3$ のとき，a_n を a_{n-1} と a_{n-2} を用いて表せ．

（3）　$n\geqq2$ のとき，p_n-p_{n-1} を n を用いて表せ．

4　空間内に原点Oを中心とする半径 r の球面 S がある．さらに，半径が1，2，3の球面 S_1，S_2，S_3 があり，これら4つの球面のうちどの2つの球面も互いに外接している．S_1，S_2，S_3 の中心を順に P_1，P_2，P_3 とし，O，P_1，P_2，P_3 は同一平面上にないとする．さらに，球面 S が球面 S_1，S_2，S_3 と接する3つの点と，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}+\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}+\overrightarrow{\mathrm{OP_3}})$ により定まる点Qは，同一平面上にあるとする．次の問に答えよ．

（1）　r の値を求めよ．

（2）　四面体 $\mathrm{OP_1P_2P_3}$ の体積を求めよ．

5　xy 平面上の曲線 $C：y=\sqrt[3]{x^2+2}$ を考え，C 上の $(0,\ \sqrt[3]{2})$ 以外の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ における接線を $l：y=kx+c$ と表す．C と l の方程式から x を消去して得られる y についての3次方程式 $f(y)=0$ は b を重解としてもつので，もう1つの解を b' とする．ただし，b が3重解のときは $b'=b$ とみなす．次の問に答えよ．

（1）　$2b+b'$ を k のみの分数式で表せ．

（2）　b' を b のみの分数式で表せ．

（3）　C と l の共有点で，その y 座標が b' であるものを $\mathrm{P}'(a',\ b')$ とする．a と b が有理数ならば，a' と b' も有理数であることを示せ．

（4）　b が奇数 p，q と負でない整数 r を用いて $b=\dfrac{p}{2^r q}$ で与えられるとする．有理数 b' を奇数 p'，q' と整数 s を用いて $b'=\dfrac{p'}{2^s q'}$ と表すとき，s を r の式で表せ．

（5）　$\mathrm{P}(5,\ 3)$ が曲線 C 上の点であることを利用して，C 上に x 座標と y 座標がともに有理数であるような点が無数に存在することを示せ．

Data

❶ B** C／複素数平面，2 次曲線（楕円）
❷ C*** Ⅲ／微分法（最大値）
❸ D*** AB／場合の数，漸化式
❹ B*** ⅠC／空間図形，空間ベクトル
❺ C**** ⅡBⅢ／高次方程式，漸化式，微分（接線）

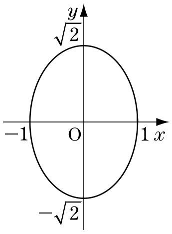
❶ これは確実にとりたい問題です．

解 （1） $|z|=1$ より，$z=\cos\theta+i\sin\theta$ とおけて，

このとき，$\dfrac{1}{z}=\cos\theta-i\sin\theta$ であるから，

$$w=\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)z+\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)\frac{1}{z}$$
$$=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)$$
$$=\cos\theta+(\sqrt{2}\sin\theta)i$$

よって，C は楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$ であり，右図のようになる．



（2） w が円 $\left|z-\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right|=\sqrt{2}$ 上にあるとき，$\left|w-\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right|^2=2$ より，

$$\left(\cos\theta-\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^2+(\sqrt{2}\sin\theta)^2=2$$

$$\therefore\ \left(\cos\theta-\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^2=2\cos^2\theta$$

$$\therefore\ \cos\theta-\frac{2+\sqrt{2}}{2}=\pm\sqrt{2}\cos\theta$$

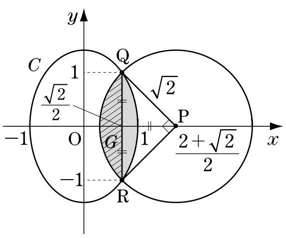
$$\therefore\ \cos\theta=\frac{2+\sqrt{2}}{2(1\mp\sqrt{2})}=-\frac{4+3\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(以上，複号同順）となるが，$|\cos\theta|\leqq 1$ であるから，

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\therefore\ \sin\theta=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

よって，求める共有点は $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pm i}$ である．

（3） （1），（2）より，題意の部分 F は右図の網目部分のようになる．



図のように点 P，Q，R を定めると，F のうち直線 QR より左側の部分 G の面積 S は，

$$S=\text{四分円 PQR}-\triangle\text{PQR}$$
$$=\frac{\pi(\sqrt{2})^2}{4}-\frac{1}{2}(\sqrt{2})^2=\frac{\pi-2}{2}$$

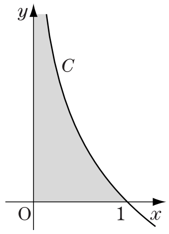
また，F のうち直線 QR より右側の部分は，x 軸方向に $\sqrt{2}$ 倍に拡大すると G と合同となる．

よって，求める面積は，

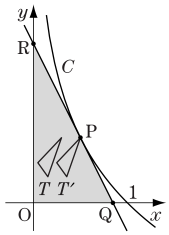
$$S+\frac{1}{\sqrt{2}}S=\boldsymbol{\frac{(2+\sqrt{2})(\pi-2)}{4}}$$

❷ この手の問題では初めから三角形の頂点が領域の境界線上にあるとすると説明不足と判断されます．本問の場合，その説明をきちんと行えば，余計な場合分けをせずに済みます．

解 曲線 $y=\log\dfrac{1}{x}$，すなわち，曲線 $y=-\log x$ を C とする．D は右図の網目部分（境界を含む）である．



いま，D に含まれる三角形 T を，D に含まれたまま x 軸の正方向に 0 以上平行移動して，C と共有点をもつようにすることができる．その共有点を P とし，平行移動後の三角形を T' とする．また，P における C の接線を l とし，l と x 軸，y 軸の交点をそれぞれ Q，R とする．



このとき，C が減少かつ下に凸であることより，T' は △OQR に含まれ，△OQR は D に含まれるから，T の面積（＝T' の面積）は △OQR の面積以下であり，求める最大値は △OQR の面積の最大値に等しい．

P$(t,\ -\log t)$（$0<t\leqq 1$）とおくと，$y=-\log x$ のとき $y'=-\dfrac{1}{x}$ であることより，l の方程式は，

$$y=-\frac{1}{t}(x-t)-\log t$$

であるから，

$$\mathrm{Q}(t(1-\log t),\ 0),\ \mathrm{R}(0,\ 1-\log t)$$

であり，$f(t)=\triangle\mathrm{OQR}$ とすると，

$$f(t)=\frac{1}{2}\cdot t(1-\log t)\cdot(1-\log t)=\frac{1}{2}t(\log t-1)^2$$

$$f'(t)=\frac{1}{2}\left\{1\cdot(\log t-1)^2+t\cdot 2(\log t-1)\cdot\frac{1}{t}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}(\log t-1)(\log t+1)$$

したがって，$f(t)$ の増減は右表のようになるから，求める最大値は，

t	(0)	…	$\frac{1}{e}$	…	1
$f'(t)$	／	＋	0	−	
$f(t)$	／	↗		↘	

$$f\left(\frac{1}{e}\right)=\boldsymbol{\frac{2}{e}}$$

❸ 題意の順列は「完全順列」または「攪乱順列」と呼

早稲田大学・理工系（2021～2025） 出題分野一覧

	25	24	23	22	21
式の扱い（ＩⅡ）……	＊	＊	❶	＊	❷
方程式・不等式・関数（ＩⅡ）……	❺	＊	＊	❷	＊
データの分析（Ｉ）……	＊	＊	＊	＊	＊
場合の数と確率（Ａ）……	❸	❷❹	❷	＊	❹
統計的な推測（Ｂ）……	＊	＊	＊	＊	＊
整数（Ａ）……	＊	＊	❶	❷	＊
数列（Ｂ）……	❸❺	❷❹	❶❷	❸	＊
指数関数・対数関数（Ⅱ）……	＊	＊	＊	＊	＊
三角関数（Ⅱ）……	＊	＊	＊	＊	＊
図形と三角比（ＩＡⅡ）……	❹	❸	＊	❹	＊
図形と方程式（Ⅱ）……	＊	❶	＊	＊	❶❸
平面ベクトル（Ｃ）……	＊	＊	＊	＊	＊
空間ベクトルと空間座標（Ｃ）……	❹	❸	❺	＊	❺
複素数・複素数平面（ⅡＣ）……	❶	＊	❹	＊	❸
式と曲線（Ｃ）……	❶	＊	＊	＊	＊
関数（Ⅲ）……	＊	＊	❸	＊	＊
極限（ⅡⅢ）……	＊	＊	＊	❸❺	＊
微分（ⅡⅢ）……	❷❺	❺	❸	❺	❶
積分（ⅡⅢ）……	＊	❺	❸❺	❶❹	❸
微積分総合（ⅡⅢ）……	＊	＊	＊	＊	＊

【出題範囲】 **【試験時間】** 120 分

● **現行課程**（2025） **数Ｉ・Ⅱ・Ⅲ・Ａ・Ｂ・Ｃ**

数 A…「図形の性質」,「場合の数と確率」,
「数学と人間の活動」

数 B…「数列」,「統計的な推測」

数 C…「ベクトル」,「平面上の曲線と複素数平面」

● **前課程**（2015～2024） 数Ｉ・Ⅱ・Ⅲ・Ａ・Ｂ

数 A…「図形の性質」,「場合の数と確率」,
「整数の性質」

数 B…「数列」,「ベクトル」

※前課程では「平面上の曲線」と「複素数平面」は数Ⅲです.

2025年・慶應義塾大学

120 分　I II III AB(列)C(ベ複)

昨年に比べると，若干難しくなりました．また，量が試験時間に比べて多めなことは，例年通りです．記述式はすべて証明問題で，これは昨年と同じです．計算力，思考力，記述力をしっかり身につけることを目標に，日々の学習に取り組みましょう

空欄(ア)～(フ)については，分数は既約分数にするなど最もふさわしいもの（数，式など）を解答用紙の所定の欄に記入しなさい．

1 （1）　複素数平面上で，方程式 $|z+i|=2|z-\sqrt{3}|$ を満たす点 z 全体が表す図形は，中心が $\boxed{(ア)}$，半径が $\boxed{(イ)}$ の円である．

（2）　n を自然数とする．1 から n までの自然数の中で 6 または 8 または 9 で割り切れるものの個数を a_n で表す．このとき，$a_{30}=\boxed{(ウ)}$ となる．また，$a_n=1000$ を満たす最大の n は $\boxed{(エ)}$ である．

（3）　$f(x)$ を微分可能な関数とし，$g(x)=x^3+x$ とする．関数 $g(x)$ は微分可能な逆関数 $g^{-1}(x)$ をもつ．定数 t に対して，関数 $t^2x^2-f(g^{-1}(x))$ は $x=t^3+t$ で極値をとるとする．このとき，$f'(t)$ を t の多項式で表すと $f'(t)=\boxed{(オ)}$ となる．次に，任意の定数 t に対して，関数 $t^2x^2-f(g^{-1}(x))$ は $x=t^3+t$ で極値をとるとする．このとき，$f(0)=-2$ ならば $f(1)=\boxed{(カ)}$ である．

2 座標平面上の点 P(1，1) と点 Q(1，−1) および曲線 $C：y=\dfrac{1}{x-4}$ $(x>4)$ を考える．

（1）　曲線 C の接線で点 Q を通るものは存在しないことを証明しなさい．

（2）　曲線 C の接線で点 P を通るものを l とし，C と l の接点を A とする．このとき，l の方程式は $y=\boxed{(キ)}$ であり，点 A の座標は $\boxed{(ク)}$ である．また，曲線 C 上の点 B が

$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AQ}=-\dfrac{2}{3}$ を満たすとき，点 B の座標は $\boxed{(ケ)}$ である．

（3）　A，B を（2）で定めた点とする．正の数 t に対し，曲線 C 上の点 $\mathrm{R}\left(t+4,\ \dfrac{1}{t}\right)$ は点 A と異なるものとする．線分 AR を 2：1 に内分する点を S とし，線分 BS を 3：2 に内分する点を T$(u,\ v)$ とするとき，u を t の式で表すと $u=\boxed{(コ)}$ である．また，uv の値は $t=\boxed{(サ)}$ のとき最小となる．

3 点 P，Q を数直線の原点におき，1 個のさいころを投げて出た目に応じて P，Q を動かす．偶数の目が出たときは P を正の向きに 1 だけ動かし，5 または 6 の目が出たときは Q を正の向きに 1 だけ動かす．たとえば，6 の目が出たときは P，Q をともに正の向きに 1 だけ動かす．P と Q の距離が初めて 2 となるまでさいころを投げ続けることとし，P と Q の距離が 2 となったら，それ以降はさいころを投げない．n 回さいころを投げて P と Q の距離が 2 となる確率を p_n とする．

（1）　$p_2=\boxed{(シ)}$ である．

（2）　n 回さいころを投げて，P が Q よりも正の向きに 1 だけ進んでいる確率を x_n，P と Q が同じ位置にある確率を y_n，Q が P よりも正の向きに 1 だけ進んでいる確率を z_n とすると

$y_{n+1}=\boxed{(ス)}x_n+\boxed{(セ)}y_n+\boxed{(ソ)}z_n$ という関係式が成立する．また，$x_n=\boxed{(タ)}z_n$ が成り立つ．ただし，$\boxed{(ス)}$～$\boxed{(タ)}$ には数を記入すること．

（3）　関係式 $z_{n+1}+\alpha y_{n+1}=\beta(z_n+\alpha y_n)$ を満たす定数の組 $(\alpha,\ \beta)$ は，$\boxed{(チ)}$ と $\boxed{(ツ)}$ の 2 組ある．

（4）　p_n を n を用いて表すと $p_n=\boxed{(テ)}$ となる．

4 以下の設問では，区間 $[a,\ b]$ で連続な関数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ に対して，区間 $[a,\ b]$ で

$f(x)\leqq g(x)$ ならば $\displaystyle\int_a^b f(x)dx\leqq\int_a^b g(x)dx$ であること，および $\displaystyle\left|\int_a^b h(x)dx\right|\leqq\int_a^b |h(x)|dx$ であることをことわりなしに用いてよい．

（1）　自然数 n に対して $I_n=\displaystyle\int_1^n\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}dx$ とする．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n=\boxed{(ト)}$ である．

（2）　自然数 n に対して $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{3}{2}}$ とする．すべての n に対して不等式 $S_n<1+\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$ を証明しなさい．

（3）　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 5x\,dx=$ $\boxed{\text{(ホ)}}$ である．

（4）　k を自然数とするとき，$\displaystyle\int_0^{2\pi}|\sin kx|\,dx=$ $\boxed{\text{(ニ)}}$ である．

（5）　$f(x)$ を微分可能な関数とし，M を正の定数とする．区間 $[0,\ 2\pi]$ で，$f'(x)$ は連続かつ $|f'(x)|\leqq M$ と仮定する．自然数 k，n に対して，$a_k=\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx$ とし，$T_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|a_k|^{\frac{3}{2}}$ とする．このとき，すべての n に対して不等式 $T_n<23M^{\frac{3}{2}}$ を証明しなさい．ただし，必要であれば（2）の不等式と（4）の等式を証明なしに用いてよい．

5　座標平面上に 3 点 A$(x,\ 0)$，B$(x,\ y)$，C$(0,\ y)$ をとる．ただし，B は単位円周上を動き，$x>0$，$y>0$ である．このとき，線分 AB と BC の長さが等しくなる x の値は $x=$ $\boxed{\text{(ヌ)}}$ である．

次に，n を 2 以上の整数とし，$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1$ に対して $x=\dfrac{k}{n}$ のときの線分 AB と BC の短い方の長さを $L_n(k)$ と表す．$n=4$ とすると，$L_4(k)$（$k=1,\ 2,\ 3$）の最大値は $\boxed{\text{(ネ)}}$ である．一方，$n=5$ のとき $L_5(k)$ が最大となる k の値は $\boxed{\text{(ノ)}}$ と $\boxed{\text{(ハ)}}$ の 2 個ある．同様に，2 以上の整数 a で，$L_a(k)$ が最大となる k の値が 2 個あるものを考え，そのような k のうち大きい方の値を m とおく．このとき，m を a の式で表すと $m=$ $\boxed{\text{(ヒ)}}$ となる．また，$b=3a+4m-2$ とおいたとき，$L_b(k)$ が最大となる k の値も 2 個あり，それらの大きい方を a と m の 1 次式で表すと $\boxed{\text{(フ)}}$ となる．

Data

1(1)	A*	C／複素数平面
(2)	B*○	AB／整数，数列
(3)	C*	Ⅲ／微分法（逆関数）
2	B**○	ⅢC／微分法，ベクトル
3	B**○	AB／確率（漸化式）
4	B***	Ⅲ／積分法，極限
5	C**○	Ⅱ／座標平面，式と証明

1（1）　よくある問題です．

（2）　中学受験にありそうな問題ですが，大学受験生にはちょっと難しい？

（3）　逆関数の微分法：$\{g^{-1}(x)\}'=\dfrac{1}{g'(g^{-1}(x))}$ がポイントです．

解　（**1**）*　$|z+i|$，$2|z-\sqrt{3}|$ は 0 以上であるから，

$$|z+i|=2|z-\sqrt{3}| \iff |z+i|^2=4|z-\sqrt{3}|^2$$
$$\iff (z+i)\overline{(z+i)}=4(z-\sqrt{3})\overline{(z-\sqrt{3})}$$
$$\iff (z+i)(\bar{z}-i)=4(z-\sqrt{3})(\bar{z}-\sqrt{3})$$
$$\iff z\bar{z}-\frac{4\sqrt{3}-i}{3}z-\frac{4\sqrt{3}+i}{3}\bar{z}+\frac{11}{3}=0$$
$$\iff \left|z-\frac{4\sqrt{3}+i}{3}\right|^2=\frac{16}{9}$$

これを満たす点 z 全体が表す図形は，中心が $\boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{3}+i}{3}}$，半径が $\boldsymbol{\dfrac{4}{3}}$ の円である．

（**2**）　6 で割り切れる自然数は，6，12，18，24，30，36，42，48，54，60，66，72，…

8 で割り切れる自然数は，8，16，$\underline{24}$，32，40，$\underline{48}$，56，64，$\underline{72}$，…

9 で割り切れる自然数は，9，$\underline{18}$，27，$\underline{36}$，45，$\underline{54}$，63，$\underline{72}$，…

（＿をつけた数は，それより前にも現れているもの）であるから，$a_{30}=\mathbf{9}$

また，$a_1\leqq a_2\leqq a_3\leqq\cdots$ であり，6，8，9 の最小公倍数が 72 であることより

n が 6（あるいは 8，あるいは 9）で割り切れる
$\iff n+72$ が 6（あるいは 8，あるいは 9）で割り切れる

であることに注意すると，自然数 n を 72 で割った商を q，余りを r とするとき，

$$\begin{cases} r=0 \text{ のとき，} a_n=qa_{72} \\ r\geqq 1 \text{ のとき，} a_n=qa_{72}+a_r \end{cases}$$

が成り立つ．

$a_{72}=22$，$1000=45\cdot 22+10$，および，$a_{35}=10$，$a_{36}=11$ より，$a_n=1000$ を満たす最大の n は，

$$n=45\cdot 72+35=\mathbf{3275}$$

（**3**）*　$h(x)=t^2x^2-f(g^{-1}(x))$ とおくと，

$$h'(x)=2t^2x-f'(g^{-1}(x))\{g^{-1}(x)\}'$$
$$=2t^2x-f'(g^{-1}(x))\cdot\frac{1}{g'(g^{-1}(x))}$$

$h(x)$ が $x=t^3+t$ で極値をとる，すなわち，$x=g(t)$ で極値をとるとすると，$h'(g(t))=0$

慶應義塾大学・理工学部（2021～2025）　出題分野一覧

	25	24	23	22	21
式の扱い（ＩⅡ）	❺	＊	＊	＊	❷
方程式・不等式・関数（ＩⅡ）	＊	＊	＊	＊	＊
データの分析（Ｉ）	＊	＊	＊	＊	＊
場合の数と確率（Ａ）	❸	❷	❸	❸	❸
統計的な推測（Ｂ）	＊	＊	＊	＊	＊
整数（Ａ）	❶	❶	❺	❶	＊
数列（Ｂ）	❶❸	❶	❸	＊	❸
指数関数・対数関数（Ⅱ）	＊	＊	＊	＊	＊
三角関数（Ⅱ）	＊	＊	＊	＊	❺
図形と三角比（ＩＡⅡ）	＊	＊	＊	❺	＊
図形と方程式（Ⅱ）	❺	＊	＊	＊	❶❺
平面ベクトル（Ｃ）	❷	＊	＊	＊	❺
空間ベクトルと空間座標（Ｃ）	＊	❹	❷	❶	＊
複素数・複素数平面（ⅡＣ）	❶	❺	❺	＊	❷
式と曲線（Ｃ）	＊	＊	＊	❷	＊
関数（Ⅲ）	＊	＊	＊	＊	＊
極限（ⅡⅢ）	❹	❶❺	❹	❹	❸
微分（ⅡⅢ）	❶❷	＊	❶	❹	❶
積分（ⅡⅢ）	❹	❺	❹	❷	＊
微積分総合（ⅡⅢ）	＊	❸	＊	＊	❹

【出題範囲】　　**【試験時間】** 120 分

● **現行課程**（2025）　**数Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・A・B・C**

数 A…「図形の性質」,「場合の数と確率」,
「数学と人間の活動」のうち「整数の性質」
に関する部分

数 B…「数列」

数 C…「ベクトル」,「平面上の曲線と複素数平面」

● 前課程（2015～2024）　数Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・A・B

数 A…「図形の性質」,「場合の数と確率」,
「整数の性質」

数 B…「数列」,「ベクトル」

※前課程では「平面上の曲線」と「複素数平面」は数Ⅲです.

▶本書についての質問などがありましたら，
「東京出版・大数・Q係」宛
（住所は下記）にお寄せ下さい．
質問は原則として封書（宛名を書いた，切手付の返信用封筒を同封のこと）を使用し，**1通につき1件**でお送り下さい（電話番号，学年を明記して，できましたら在学（出身）校・志望校も書いて下さい）．
なお，ただ漠然と‘この解説がわかりません’という質問では適切な回答ができませんので，‘この部分がわかりません’とか‘私はこう考えたがこれでよいのか’というように具体的にポイントをしぼって質問して下さい．以上の約束が守られていないものにはお答えできないことがあります．ご注意下さい．

大学への数学
入試の軌跡／
東京科学大（理工学系）・早大（理工系）・慶大（理工）
（2026年受験用）

令和7年9月27日　第1刷発行

編　者　東京出版編集部
発行者　黒木憲太郎
発行所　**東京出版**
〒150-0012　東京都渋谷区広尾3-12-7
電　話（03）-3407-3387
振　替　00160-7-5286
https://www.tokyo-s.jp/

整版所　錦美堂整版
印刷所　光陽メディア
製本所　技秀堂
落丁・乱丁の場合はご連絡下さい．送料弊社負担にてお取替えいたします．

ISBN978-4-88742-297-1