

# はじめに

望月俊昭

英語や国語で、試験場では意味がつかめなかったのに自宅に帰って解き直したら簡単にできた、ということは普通起こらない。数学では、いくらでもある。

問題数が少ない難関高入試では、満点を狙えるような平易な問題が並んでいるわけではなく、スルーした方がよい小問が2~3題あるかもしれない。その場合、問題数が少ないのだから、時間を使って解いた問題の正答率は、大きな意味をもって来る。問題数が少なく1題の配点が高い入試では、時間をかけて取り組んだ問題は正解しないと合格が遠のいてしまう。

こうした、科目の特殊性を考えて受験数学のいろいろな分野を見渡したとき、一番怖いのが、作図を前提にした問題である。

作図に関連した問題には、大きく分けて、二種類ある。

その第一は、定規とコンパスを用いて作図せよ、という、作図そのものが問われるいわゆる「作図問題」である。

その第二は、作図をして、その図について長さ、面積、体積等の値を求めよというタイプの問題（以下これを「作図が前提の求値問題」と呼ぶことにする）である。

前者は、定規・コンパスの使い方を問う問題ではなく、作図の対象となる図形がどのような性質を持っているかを考える、図形問題の本質に関する問題といってよい。図形の問題を得意にしたければ、一見遠回りだが、定規・コンパスによる作図問題は、図形の本質に触れる機会を増やす格好の材料といえる。

後者は、多くの受験生にとって、無視できない、厄介なテーマである。

東大および医学部を含む難関国私立大学を志望する生徒の入学を期待する高校が好んで出題

するテーマといってよい。

入試問題は、受験生全員が解ける問題として出題されるわけではなく、解ける生徒と解けない生徒を分ける、つまり差をつける問題として出題される。「作図が前提の求値問題」は、その差がつく問題の代表といえる。

自分で描いた図が正しければ、その図に関する問題の値を求める作業に意味があるが、もし、自分が描いた図が正しくなかった場合、その正しくない図で、長さや面積、体積の値を求める作業を進めることになる。図が正しくないのだから、当然正解には至らない。

ここで一番困るのは、得点できないだけでなく、時間を無駄に失う、ということだ。

図を描くことができなければ、問題から離れることになり、時間を失う危険を回避できる。しかし、困ったことに、多くの「作図が前提の求値問題」は、正しいか正しくないかは別として、図を描くことができってしまう。したがって、このテーマは、正しくない図で計算を進め時間を失うという、危険と隣り合わせのテーマといえる。

この種の作図問題に強くなるためには、発想の転換が必要である。どのような転換か。

自分で描いて解く問題を、与えられた図で解く普通の図形問題の中にときどき登場する問題として学ぶのではなく、独立したテーマとして体系立てて学ぶ、ということである。

三角形や正方形など多角形、また円やおうぎ形など、動く図形の形状も様々、そして、その動き方も様々で、作図のポイントも様々…。

本書が、こうした作図問題を系統立てて学ぶ手助けとなり、得意分野（テーマ）にするための一冊になることを願っている。

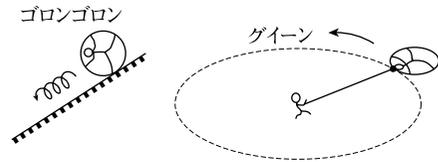
# ◆◇ 本書の利用法 ◇◆

## 前置き

- ◇この本は、高校受験で志望校合格をめざしている人を対象にして、図形分野の一部を占める作図と軌跡に関する問題を集めたものです。
- ◇第1部の「作図」は、多くの公立高校と一部の私立高校で頻出の「定規とコンパスによる作図」が中心です。
- ◇昭和時代の大学入試で出題されていた作図問題の多くは、作図法を示したあとに、その作図でよいことを証明する、という形式の問題でした。現在高校入試で出題される作図問題には、証明は課せられていません。
- ◇定規は、目盛りは利用不可で、単に直線を引くためにだけ使います。また、作図問題では、ほぼすべての問題文中に注意書きとして示されているように、作図に使った補助線を残しておくのが原則です。
- ◇作図の方法は、たいてい複数あります。ある直線に平行な直線を作図する方法は…
  - ・その直線の垂直二等分線を2本引いて、その直線から等距離の点を2点とって結ぶ。
  - ・平行四辺形の性質を利用して作図する。など、です。解答・解説では、紙面の都合上代表的な作図例を〔作図〕として、示しています。
- ◇定規とコンパスをつかったこのタイプの作図問題を、「本来の作図問題」と呼ぶことにします。
- ◇第2部の「動く図形と軌跡に関する問題」は、この「本来の作図問題」とは性格を異にする内容です。長さや面積を求める前段として、作図をしなければならぬのですが、定規とコンパスによる作図が指定されているわけではありません。動く図形のあとを追跡して、図形が動くことによって新たに生まれる長さや領域(=部分)の面積を求める問題が中心です。
- ◇このテーマが厄介なのは、動く図形を自分で追跡しなければならない、ということです。そのため、正しくない図を描いてしまって、その図で長さや面積を求めようとするという、「まえがき」に書いたように、得点できないだけでなく、成果を生むことのない時間を費やす、つまり、時間を失うという大トラブルが発生します。この意味で、動く図形は、合

否を左右する最重要テーマといっても過言ではありません。

- ◇動く図形には、いろいろな動き方があり、その代表は、<回転>です。ただし、日本語の「回転」という言葉は、転がるという意味の回転と、転がるのではない回転があります。私は、中学受験をする小学生を相手に、ホワイトボードに次のような2つの図を描いて、「どっちの方が



目が回るだろうか」と問いかけて回転のちがいをイメージしてもらっています。

転がるのではない方の回転は、どこかに回転の中心があり、その位置を確認する必要がある、という問題も登場します。

また、自転でも公転でもない、動きもあります。たとえば、三角形や半円が向きを変えずに動くというもの、また、円が正方形内を自由に動くというもの、などです。

さらに、同じ一つの図形、例えば、線分が多角形の周りを滑らずに転がる場合や、その線分上の点でない点を中心にして回転するという場合もあります。

- ◇本書では、与えられた線分、多角形、円などが動いて新たな曲線や曲線で囲まれた図形などをつくる問題を<動く図形>に関する問題とし、問題文中の条件を満たす点が動いてできる図形の問題を<軌跡>に関する問題、と分類しています。

<動く図形>については、動く図形の形(例えば三角形、正方形、円、おうぎ形など)ごとの問題分類と、動き方による問題分類があり、なるべく同タイプの問題をまとめて取り上げています。

<軌跡>については、軌跡そのもの(大きく分けて「直線か円か」)による分類と「一定であるもの(長さまたは角度がメイン)」による分類があります。これも、同タイプの問題をまとめて取り上げます。

## 本書を使うにあたって

### ◇本書の活用のポイントについて

#### 第1部「作図」について

作図方法は、一通りでない方が多いのですが、すべての問題に対して複数の作図法を紹介するのは解説スペース上無理なので、多くは〔作図例〕として、一つの作図法を解説の欄に示してあります。

作図問題に関しては、作図法をまちがえることは多分稀で、解決できなかった問題の多くで、作図法がわからなかった、ということが起こったはずですが、その場合、作図問題の解決スキルを上げていくための最重要課題は、個々の問題の作図の流れの反復練習ではなく——本書の解説の中で繰り返し触れているとおり——、次の3つのステップ…

- ▷ Step 1: フリーハンドで題意を満たす図を描く
- ▷ Step 2: その図に含まれる性質を確認する
- ▷ Step 3: その性質を定規とコンパスで再現する

このうちの、Step 1 から Step 2 の流れを理解し、その感覚を身に着け、その経験を積むこと、これに尽きます。

この意味では、作図問題は、定規とコンパスの操作が主要なテーマではなく、図形の性質を見抜いてその性質を定規・コンパスで実現するという、図形の本質に関する思考が主要なテーマです。

#### 第2部「動く図形」と「軌跡」について

前半の「動く図形」に関しては、いろいろな動き方の特徴を確認することが大事です。

後半の「軌跡」に関しては、何かが一定であるから追跡できるということを念頭に置いて、

<何が一定か>

<変わらないものは何か>

を確認することが大事です。

その、一定なものは、主に「角度」と「長さ(=距離)」です。

また、動く点の集まりは、高校入試では、直線(線分)か円(円弧)、またはその両方に限られます。

この、

<直線か円(円弧)か——そのどちらか>

という性質は、問題を解く場合の重大なヒントになります。

どのような性質をもって点が動くかがわからず、実際に何点かとってみると、例えば3点をとったとき、その3点が直線上にないとき、考えられるのは、

i) 3点が折れ線上にある

ii) 3点が円周上にある

のどちらかで、ほとんどの場合はiiに属します。

入試問題の解答欄にどこまで記述するかは、出題校によってちがいますが、式だけでなく考え方、とくにその根拠を説明する必要のある入試では、点の集まりが

㊦ 直線になる根拠

㊧ 円になる根拠

を示す必要があります。

ただし、入試本番では、直線上を動く、または円上を動くのが明らかな場合、その根拠を明らかにするのに時間をかける前に、動いた後の長さなどの数値を先に求めてしまうことも、時に必要です。普段の、つまり自分の机の上での勉強では、根拠を大切にす勉強がこのテーマをマスターする上で一番大事なことです。以上の観点から、まとめると、

### ◇本書の利用法のおすすめ

① 解説を読み、根拠を確認する。

② 数値を求める問題は…

- 解説部分をスルーして、答えをチラッと見て正解・不正解を確認
- 正解の場合→解説の内容を確認
- 不正解の場合→解説を読まずに解き直すという流れで、取り組む。

③ 「ヒント&留意点」←すべての問題に対してではありませんが、必要と思われる問題に関しては、「ヒント」および「留意点」をつけておきました。最初の一步が見えない場合は参考にしてください。

④ 「索引」←関連問題をさがすのに、利用してください。また、必要を感じたら、自分で「索引」を書き加えるとよいでしょう。

\* \* \* \* \*

受験数学のすべての分野の勉強に通じることですが、大事なことは<今できるかどうかでなく、入試本番でできるか>ということです。したがって、今できても入試でできなければ意味がないし、今できなくても、入試までにできるようになればよい、のです。

解けない問題に出くわすたびに、解答・解説から学び、自分の問題解決能力を高めていくわけですから、解答の結果だけを追うのではなく、解答に至る道筋を理解することを大切にすべきです。そして、<今理解したことを入試本番で再現できるか>という意識をもって、勉強を進めてください。

# 作図と軌跡

## パーフェクト演習

### 目次

|             |   |
|-------------|---|
| はじめに.....   | 1 |
| 本書の利用法..... | 2 |

### 第1部 作図

|                      |    |                |     |
|----------------------|----|----------------|-----|
| 等しい距離(1)             | 8  | 最大・最小：折れ線の和(1) | 80  |
| 等しい距離(2)             | 12 | 最大・最小：折れ線の和(2) | 84  |
| 角度：等角・倍角の作図          | 16 | 最大・最小：面積       | 88  |
| 角度：特別角の作図(1)         | 20 | 動点の作図          | 92  |
| 角度：特別角の作図(2)         | 24 | 作図して解く(1)      | 96  |
| 線分：分割する+和をつくる        | 28 | 作図して解く(2)      | 100 |
| 線分： $\sqrt{n}$ を作図する | 32 | 定規だけの作図        | 104 |
| 面積に関する作図(1)          | 36 | 応用問題総合演習(1)    | 108 |
| 面積に関する作図(2)          | 40 | 応用問題総合演習(2)    | 112 |
| 面積に関する作図(3)          | 44 |                |     |
| 線対称                  | 48 |                |     |
| 折り返し(1)              | 52 |                |     |
| 折り返し(2)              | 56 |                |     |
| 回転                   | 60 |                |     |
| 円の接線                 | 64 |                |     |
| 接する円(1)              | 68 |                |     |
| 接する円(2)              | 72 |                |     |
| 接する円(3)              | 76 |                |     |

|                         |     |
|-------------------------|-----|
| <b>コラム</b>              |     |
| コンパス・三角定規なしで、<br>平行線を引く | 116 |
| 検索の質が問われる新時代            | 118 |

## 第2部 軌跡

|                    |     |                      |     |
|--------------------|-----|----------------------|-----|
| 転がる多角形の頂点の軌跡(1)    | 122 | 動く円とおうぎ形(1)          | 186 |
| 転がる多角形の頂点の軌跡(2)    | 126 | 動く円とおうぎ形(2)          | 190 |
| 転がる多角形の頂点の軌跡(3)    | 130 | 動く図形・軌跡に関する総合問題演習(1) | 194 |
| 転がる多角形の頂点の軌跡(4)    | 134 | 動く図形・軌跡に関する総合問題演習(2) | 198 |
| 転がる三角形が通過する部分      | 138 |                      |     |
| 回転する線分・回転する多角形(1)  | 142 | <b>コラム</b>           |     |
| 回転する線分・回転する多角形(2)  | 146 | フリーハンドで              |     |
| 曲線(円弧)を含む図形の回転     | 150 | 正十二角形を描く             | 202 |
| 〈すべる〉図形のハイレベル問題    | 154 | 私の宝探し                | 204 |
| 〈一定であるもの〉がつくる軌跡(1) | 158 |                      |     |
| 〈一定であるもの〉がつくる軌跡(2) | 162 |                      |     |
| 〈一定であるもの〉がつくる軌跡(3) | 166 |                      |     |
| 〈一定であるもの〉がつくる軌跡(4) | 170 |                      |     |
| 〈一定であるもの〉がつくる軌跡(5) | 174 |                      |     |
| 〈一定であるもの〉がつくる軌跡(6) | 178 |                      |     |
| 〈一定であるもの〉がつくる軌跡(7) | 182 |                      |     |

---

|      |     |
|------|-----|
| 索引   | 206 |
| あとがき | 208 |

---

# 等しい距離 (1)



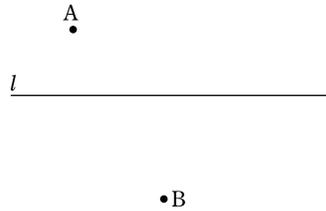
「はじめに」「本書の利用法」でもふれたように、この本では作図の問題のポイントを、実際の入試問題を解いていくことで確認していきます。

入試問題に登場する作図は、定規・コンパスで作図をする<いわゆる作図問題>と、図を自分で描いて値を求める<図を描く求値問題>に分かれます。この本でも、両方を扱います。第1部は、定規・コンパスを使う作図問題です。

今回のテーマは「等しい距離」です。基本中の基本から始めます。

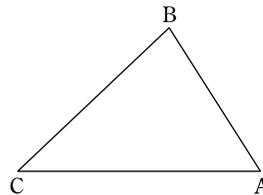
**問題 1.** 右の図において、直線  $l$  上にあって、2点  $A$ ,  $B$  から等しい距離にある点  $P$  を定規とコンパスを用いて作図して求め、その位置を点  $\bullet$  で示せ。ただし、作図に用いた線は消さずに残しておくこと。

▷目標時間：1分 (14 長崎県・B問題)



**問題 2.** 図の  $\triangle ABC$  の辺  $AC$  上に  $AP=BP$  となる点  $P$  を定規とコンパスを用いて作図しなさい。また、点  $P$  を示す文字も書きなさい。ただし、作図に用いた線は消さないでおくこと。

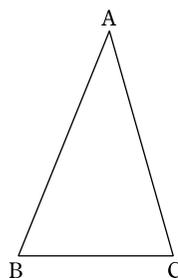
▷目標時間：1分 (17 島根県)



**問題 3.** 右の図で、 $\triangle ABC$  は鋭角三角形である。図をもとにして、辺  $AC$  上にあり、辺  $AB$  と辺  $BC$  までの距離が等しい点  $P$  を、定規とコンパスを用いて作図によって求めよ。ただし、作図に用いた線は消さないでおくこと。

▷目標時間：3分

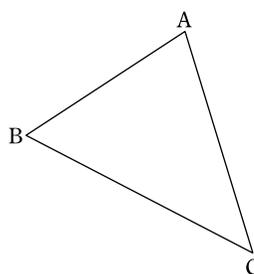
(12 東京都)



**問題 4.** 右の図の $\triangle ABC$ において、2点  $B$ ,  $C$  から等しい距離にあり、さらに、2つの辺  $AB$ ,  $BC$  までの距離が等しい点  $D$  を作図により求めなさい。ただし、作図にはコンパスと定規を用い、作図に使った線は消さないこと。

▷目標時間：3分

(11 大分県)

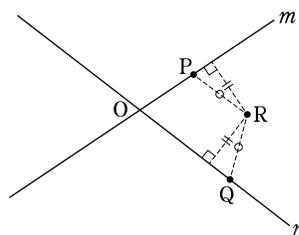


**問題 5.** 右の図は、点  $O$  で交わる2直線  $m$ ,  $n$  上に、それぞれ点  $P$ ,  $Q$  をとったもので、2点  $O$ ,  $P$  間の距離は、2点  $O$ ,  $Q$  間の距離より短くなっている。

この図において「2直線  $m$ ,  $n$  からの距離が等しく、2点  $P$ ,  $Q$  からの距離も等しい」という条件を満たす点は2つあり、点  $R$  はそのうちの1つである。この条件を満たすもう1つの点  $S$  を図中に作図しなさい。ただし、三角定規の角を利用して直線をひくことはしないものとする。また、作図に用いた線は消さずに残しておくこと。

▷目標時間：3分

(08 千葉県)



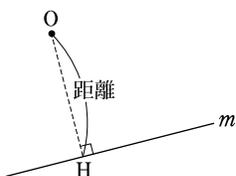
[ヒント&留意点] **問題 3.** ある点  $O$  から直線  $m$ ,  $n$  までの「距離が等しい」とは、点  $O$  から直線  $m$ ,  $n$  へ下ろした垂線  $OM$ ,  $ON$  の長さが等しいということ。2直線の交点を  $P$  とすると、 $\triangle OMP \equiv \triangle ONP$  となることがわかります。

**問題 4. 5.** 与えられた2点から等距離にある点がどのような線上にあるかというテーマと、平行でない2直線から等距離にある点がどのような線上にあるかというテーマが合体した問題です。

## 解答・作図のポイント

### [今回のテーマ]

数学では、 $\langle$ 2点間の距離 $\rangle$ は、2点を最短で結ぶ線(=線分)の長さを指します。また、 $\langle$ 点と直線の距離 $\rangle$ 、たとえば点Oと直線mの距離は、点Oと直線m上の点を最短で結ぶ線(=線分)の長さを意味し、実質的には、右の図のように、点Oから直線mに下ろした垂線OHの長さになります。



□速さに関する文章題で用いられる日常用語としての「距離」は、この意味でなく「道のり」と同義語です。

したがって、作図問題においては、 $\langle$ ある点から2直線までの距離が等しい $\rangle$ は、 $\langle$ ある点から2直線へ下ろした垂線の長さが等しい $\rangle$ を意味します。

題意を確認してからの作図の流れは、今後、何度も出てきますが、

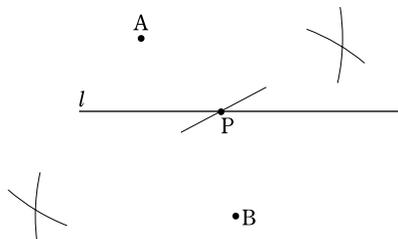
《1》フリーハンドで図を描く

《2》その図の性質を確認する

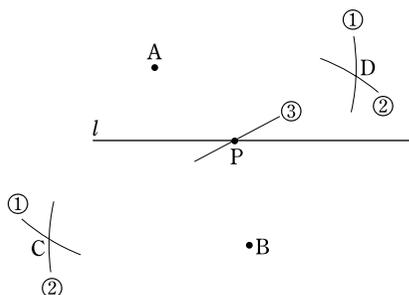
《3》その性質を定規・コンパスで再現するというものです。ただし、今回の内容は、題意を確認した直後にコンパスを手にして作図を開始することができるはずですが、

**問題1** 2点から等距離にある点は、2点を結ぶ線分の垂直二等分線上にあります。

(作図：答え)



(作図の手順)



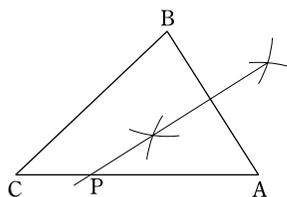
▶点Aを中心とし半径ABの円①と、点Bを中心とし半径ABの円②との交点をC、Dとする。

▶2点C、Dを結ぶ直線と直線lとの交点をPとする。

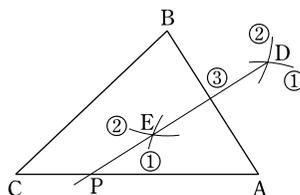
□ $\langle$ ABの垂直二等分線③を作図する $\rangle$ ということ。また、垂直二等分線を作図するための円は、全体を描く必要はありません。

**問題2**  $AP=BP$ となる点Pは、ABの垂直二等分線上にある。

(作図：答え)



(作図の手順)



▶半径の等しい2円(Aを中心とする円①とBを中心とする円②)の交点をD、Eとする。

▶2点D、Eを結ぶ直線③と辺ACとの交点をPとする。

# 転がる多角形の頂点の軌跡(1)

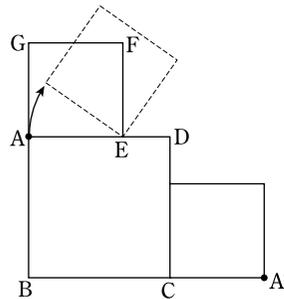


今回から「軌跡」に関する入試問題を扱います。点、線分、多角形、円・おうぎ形などが動いてできる図形を自分で描いて、動いたあとの長さや面積を求める問題です。

正しい図を描くことができないと、その後の値を求める作業そのものが無意味になり、制限時間のある入試では、失点するだけでなく、時間を失う(=図を描くのに要する時間と正しくない図で値を求めるのに要する時間の両方を、得点をもたらさない時間として、大幅に浪費する)ということが起こります。

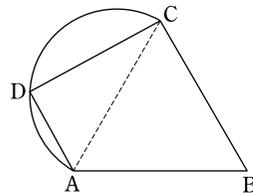
動く図形の軌跡を追う場合、普通は定規とコンパスを使って作図するのではなく、フリーハンドで図を描くことになります。難関校で頻出のこの「軌跡」に関する問題は、合否を左右する最も差がつく分野なので、得意分野にしたいところです。

**問題 1.** 図の四角形 ABCD は、1 辺 3 の正方形であり、四角形 AEFG は、1 辺 2 の正方形である。正方形 AEFG を、A が A' にはじめて重なるまで、正方形 ABCD にそってすべることなく、時計回りに回転させる。点 A の描く図形の長さを求めよ。



▷目標時間：8分 (05 中央大杉並)

**問題 2.** 図のように 1 辺の長さが 4 の正三角形 ABC を AC を直径とする半円が合わさっている。円弧 AC 上を点 D が移動するとき、次の各問に答えなさい。



(1) 四角形 ABCD の面積が  $6\sqrt{3}$  であるとき、AD と CD の長さを求めなさい。ただし、 $AD \leq CD$  とする。

(2) (1)のときの四角形 ABCD を直線 AB 上をすべることなく 1 回転させたとき、次の値を求めなさい。

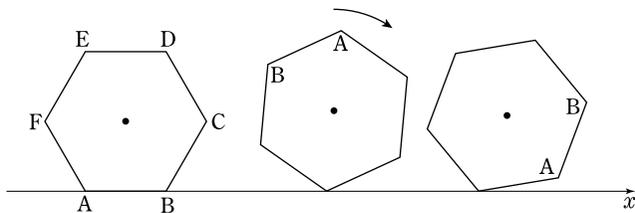
(i) 点 A が描く曲線(点 A の軌跡)の長さを求めなさい。

(ii) 点 A が描く曲線と直線 AB で囲まれた図形の面積を求めなさい。

▷目標時間：12分

(96 江戸川学園取手)

**問題 3.** 1 辺の長さ 1 の正六角形 ABCDEF が  $xy$  平面上にあります。辺 AB が  $x$  軸と重なる状態から始めて、正六角形を  $x$  軸上をすべることなく右回りに転がし、点 A が再び  $x$  軸に戻るまで続けます。



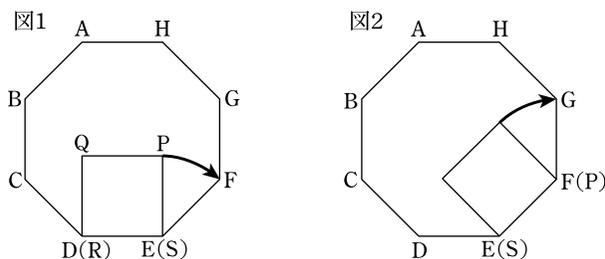
- (1) はじめの位置から、辺 BC が  $x$  軸に重なるまで転がる間に、点 A が通過する部分の長さを求めなさい。
- (2) 辺 BC が  $x$  軸上にある状態から、辺 CD が  $x$  軸に重なるまで転がる間に、点 A が通過する部分の長さを求めなさい。
- (3) はじめの位置から、辺 FA が  $x$  軸に重なるまで転がる間に、点 A が通過する部分の長さを求めなさい。

▷目標時間：10 分

(06 穎明館)

**問題 4.** 図 1 のように一辺が 1 cm の正八角形 ABCDEFGH と正方形 PQRS が辺 DE を共有している。

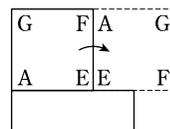
- (1) 正方形を点 E (つまり点 S) を中心として回転し、点 P を点 F に一致(図 2)させるとき、点 P が動いた距離を計算せよ。
- (2) (1) に続いて、正方形を点 F (つまり点 P) を中心に回転し、点 Q を点 G に一致させ、同様に回転し続ける。正方形が元の位置(図 1)に戻ったときの最初からの距離を計算せよ。
- (3) (2) で点 P の動いた曲線で囲まれる図形の面積を計算せよ。



▷目標時間：15 分

(01 駿台甲府)

[ヒント&留意点] **問題 1.~4.** 転がる多角形の軌跡で注意すべきは、移動先の図形の頂点の位置で、これをまちがえると、軌跡をまちがえることとなります。頂点を移動先の図形に記入するときに、図形の外側に記入する普通書き方だと頂点の記号が重なるので、図形の動きを追跡する解答前の作業では、右図のように、<図形の内側に記入する>のが、コツです。解答・解説では、スペースの都合上、その図は省いてあります。



## 解答・作図のポイント

### [今回のテーマ]

日常用語では、地上をボールが転がるのも回転で、メリーゴーランドの大きな輪が回るのも回転です(個々の座席は回転しません)。言葉では同じ「回転」ですが、その動きのちがいは明らかで、前者は「転がる」動きですが、後者は「転がる」動きではありません。転がる図形は、円を除いて回転の中心が変化するので、回転の中心を追跡(=確認)することが重要になります。

**問題1** コーナーを通過するときの回転の中心を確認すると同時に、頂点が回転するときの半径が決まります。

[解説] 頂点Aは、

図の太線を描いてA'に達する。このとき、図で、

$$\begin{aligned} \angle A_1DA_2 \\ = \angle A_2HA' \\ = 90^\circ \dots\dots * \end{aligned}$$

とわかる。

□ 2組の直角三角形は合同( $\triangle A_1ED \equiv \triangle A_2E_1D$ ,  $\triangle A_2E_1H \equiv \triangle A'E_2H$ )で、それぞれ $90^\circ$ 回転して重なることから、上の\*が確認できます。

はじめの正方形AEFGは、順に、

- ㉞…点Eを中心に $90^\circ$ 回転、
- ㉟…点Dを中心に $90^\circ$ 回転、
- ㊱…図の点Hを中心に $90^\circ$ 回転

して、頂点Aは、(出発点) $\rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A'$ と動く。このとき、半径は、それぞれ

- ㉞…  $AE=2$ ,
- ㉟…  $A_1D = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$ ,
- ㊱…  $A_2H = 2\sqrt{2}$ ,

よって、求める長さは、

$$\begin{aligned} & 2\pi \times (2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{2}) \times \frac{90}{360} \\ & = \left(1 + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\pi \end{aligned}$$

**問題2** 転がる四角形が特別な直角三角形と合体したものとわかります。

[解説] (1) 図の

ように、DからACにおろした垂線の足をH、ACの中点をMとすると、正三角形ABCの面積は

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = 4\sqrt{3},$$

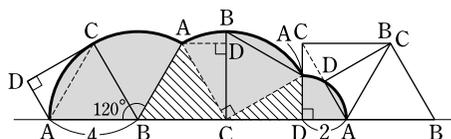
$$\text{また、} \triangle DAC = 6\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3},$$

$$\text{よって、} \frac{1}{2} \times 4 \times DH = 2\sqrt{3} \text{ より、} DH = \sqrt{3},$$

また、 $DM=AM=2$ より、 $\angle DMH=60^\circ$ 、 $\triangle DAM$ は正三角形、 $\triangle DAC$ は $60^\circ$ 定規形なので、 $AD=2$ 、 $CD=2\sqrt{3}$ とわかる。

□ 点Mを使わないとすれば、 $\triangle AHD \sim \triangle DHC$ で $AH:HD=DH:HC$ より、 $AH=a$ として、 $a:\sqrt{3}=\sqrt{3}:(4-a)$ より、 $a$ に関する2次方程式を解いて、( $a \leq 4-a$ とから) $a=1$ を導き、これより、 $\triangle DAH$ が $60^\circ$ 定規形であることが確認できます。

(2) 四角形ABCDは次のように転がる。



(i) 点Aが動く曲線は、図の太線で、半径4で中心角 $120^\circ$ のおうぎ形の弧、半径4の四分円の弧、半径2の四分円の弧からなっているので、求める長さは、

$$2\pi \times 4 \times \frac{120+90}{360} + 2\pi \times 2 \times \frac{90}{360} = \frac{17}{3}\pi$$

(ii) 題意を満たす図形は、(i)のおうぎ形と2つの三角形(斜線部分)からなっていて、斜線部分は初めの四角形ABCDの面積( $6\sqrt{3}$ )に等しいので、求める面積は、

$$\begin{aligned} & 4^2\pi \times \frac{120+90}{360} + 2^2\pi \times \frac{90}{360} + 6\sqrt{3} \\ & = \frac{31}{3}\pi + 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

## あとがき

最近は、いろいろなスタイルの入試方式が導入され、画一的な入試方式が徐々に変化しつつある。しかし、難関高校、難関大学の入試スタイルは、当分続くだろう。

難関高校・大学の大学入試形式で出題された数学の問題は、まちがえると、大変なことになる。手をつけなければ得点できないが、時間を失うことはない。手をつけてまちがえると、得点できない上に取り戻すことのできない時間を失う。

入試数学でのまちがいはについては、教室の元教え子の優秀生たちの大学入試体験が思い起こされる。

私の教室では、中学受験をする小学生と、国私立中学に合格した生徒が続けて通ってくるため、小3から中2までの生徒が在籍している。その中から、大学入試最難関の東大理Ⅲに合格していく生徒がいる。中2で教室を離れていくので彼らの合格に関する私の貢献度は無いに等しいのだが、みな合格の連絡をくれる。その彼らも、数学でまちがえる。

女子生徒 A. 入試の一年前に実施された予備校の同日模試（東大の問題そのものを高2生が解くイベント）で、全国1位。各科目について「合格（目標点）まであと何点」という評価方式で、英語・数学・物理の3教科でオーバーという、驚きの

成績だった。その彼女は、高3時の各予備校の東大模試で最低でも4完（6題中4題正解）、ほぼ5完以上だったが、本番の入試1日目の数学で2完に終わり（他に部分点を取った問題はあったが）、帰宅して気持ちを切りかえるのに相当時間がかかったという。

男子生徒 B. 絶対に落としてはいけない第1問のミスに帰宅途中に気づき、合格発表まで苦しかったと口にしていた。彼は、複数の東大模試で、5回受験中全国1位も含めすべて1桁順位だった。そんな彼でも、帰宅途中で頭の中で直せるようなミスをした。結果は、驚異の首席（最高得点）合格で、数学は120点満点中113点だった。

女子生徒 C. なぜ数学ができないといつも嘆いていた生徒だが、中学受験をしなかったため、数学を一学年飛び級させたこともあって、高1のときに『大学への数学』の「日々の演習」を、高2のときに「学力コンテスト」を解きまくっていた。その彼女も、入試当日、体積を求める問題で値がマイナスになり、何度見直しても直すことができなかったという。約3000人が合格する東大入試で上位約100人の理Ⅲ合格者に食い込むのは、至難といってよい。

つまり、それだけ優秀な彼らでも、

入試本番でまちがえるということが起こる、ということだ。

問題の読みちがいが、方針の立て方の誤り、式変形の過程での作業ミスなど、原因は様々だ。

まちがいを0%にする業はない。

まちがいが起こる可能性を念頭に置き、その意識を日々の勉強にも反映させる必要がある。

〈まちがうこともあるが対処する〉という意識をもって、日々の勉強の中で本番を想定した取り組みを続けることが、入試本番でのまちがいを減らす近道だと思う。

\* \* \* \*

本書は、月刊誌『高校への数学』に連載した記事をまとめたものです。まとめるにあたって、編集部の塩繁さんには大変お世話になりました。別の著書でも書いたとおり、普通の出版社では、書籍の全体の構成や各ページのレイアウト、また文字の校正などの面から執筆者を支える人たちのことを編集者というのですが、東京出版の編集者は、普段原稿を執筆し、受験数学の講師も務める、いわば受験数学の専門家たちです。編集作業を担っていただいた塩繁さんには、月刊誌での連載から本書の成立に至るまで、その専門家の観点からいろいろ助けていただきました。ありがとうございました。

## 高校への数学 作図と軌跡 パーフェクト演習

令和7年7月14日 第1刷発行

著者 望月俊昭

発行者 黒木憲太郎

発行所 株式会社 東京出版

〒150-0012 東京都渋谷区広尾3-12-7

電話 03-3407-3387 振替 00160-7-5286

<https://www.tokyo-s.jp/>

整版所 錦美堂整版

印刷・製本 技秀堂

落丁・乱丁の場合は、ご連絡ください。

送料弊社負担にてお取り替えいたします。

© Toshiaki Mochizuki 2025 Printed in Japan

ISBN 978-4-88742-294-0