

# はじめに

月刊「大学への数学」の増刊号として、2002年から『合否を分けたこの1題』を刊行して来ました。

その増刊号の特徴は、

- 大学（学部）ごとに、その年の「合否を分けたこの1題」を厳選
- 入試突破に必要なレベルが分かり、今後の勉強の指針となる
- 問題ごとに、それを解くのに必要な手法や定理などを詳しく説明。問題によってはその背景や周辺の話題、類題も解説

です。

その過去3年分の増刊号で取り上げた問題をまとめて書籍にしたものが本書「この問題が合否を決める！2022～2024年入試」です。過去3年分について同じようなテーマの重複をなくし、74題を精選しました。

本書の特徴は、

- 最近の入試傾向に沿った“重要問題”に一通りあたることができる
- どの問題からも始められる
- 1題1題詳しい解説がしてある

とまとめることができるでしょう。

（なお、原則として、本書の解説は、増刊号をそのまま転載しています。「なぜこの1題か」も出題当時に書かれたものです。出題年度を表示するなどはしていません。）

本書で取り上げる問題は、やや程度の高い、入試の典型問題、融合問題、総合問題

です。

この本では、次のような使い方を想定しています。入試の標準問題にほぼ一通りあたった人、

たとえば、

- 「1対1対応の演習」シリーズや、
- 「新数学スタンダード演習」
- 「数学ⅢCスタンダード演習」

をほぼ終えた人が、

さらなるレベルアップを図る

あるいは

総仕上げのために用いる

などです。

また、本書の問題編は、原則として

見た目の分野で分類

（複数の分野にまたがるときは主要な1つ）

したので、分類のタイトルがヒントになることはなく、実戦的な演習するのに最適です。

見た目だけで分類したので、たとえば「座標」の問題を解くにも、場合によっては、数C（平面上の曲線）の知識が必要になることもあります。数Ⅲが必要でない問題を解きたいという場合もあるでしょうから、p.4にどれが文系範囲（数ⅠAⅡBC（ベクトル））の問題が分かるようにしました。

いろいろな使い方に配慮した本書で、より実戦力をつけていって下さい。また、今年増刊号『合否を分けたこの1題』（7月末日発売予定）とは問題が重複していない（入試年度が違う）ので、併せて活用すると、より効果的でしょう。

# 本書の構成と利用法

本書の対象者などは、前ページで述べました。次に、本書の構成などを説明しましょう。本書は大きく問題編（p.5～34）と解説編（p.35～247）に分かれています。

## ○問題編

見た目の分野で分類しました。その分類のタイトルが解く上でのヒントとなることはほとんどありませんので、実戦的な演習をするのに最適です。p.4にどれが文系範囲の問題か分かるようにしてあります。

## ○解説編

問題文の右上に、その年のセットがどのようなものであったか分かるように、各問の難易、目標時間、分野をまとめたものを掲載しました。また、取り上げた問題の番号を②、それ以外を①のように表しました。

\* \* \*

「なぜこの1題か」：その問題が合否を分けた1題となっている理由を書いています。入試傾向の分析などについての情報を盛り込んでいる場合もあります。最後に、その問題について、何分くらいで解いたらよいかなどの「目標」をコメントしています。

「解答」：実際の答案ではこの程度で十分と思われる詳しさで書いていますが、その行間等を補うために解答の右側に傍注として、なぜそのような解法をとったのか、あるいは使った定理、公式などの補足、また、どんな計算や工夫をしているのか、などの説明を加えました。

「解説」：その問題を解くのに必要な手法や定理をここで詳しく説明しました。また、問題によってはその背景や周辺の話、類題にも踏み込みました。

「受験報告」：これは、実際に入試を受けてこられた「大学への数学」の読者のみなさんから届いた手紙などからこの1題として取り上げた問題を中心に紹介したものです。試験においてどう解いたのか、またどのくらいの時間がかかったのか、出来具合はどのようであったのかなどが書かれています。大半が試験当日、あるいは翌日に書かれた生々しいものであり、非常に参考になることが多いはずです。

## ○本書で学習するにあたって

普段の学習での問題演習においては、その分野の理解

が目標であるので、解答にかかった時間をあまり気にすることはありません。しかし、本書で、合否を分けたかどうかをテーマにして学習する場合は、実際の試験を想定して、とりあえず30分でできるだけ多く得点できるような解き方をして下さい。さらに、完答するのにどれだけかかったかをメモしておきましょう。なお、「なぜこの1題か」の「目標」のところ時間にコメントのある場合もあります。時間を意識して演習することで、より志望大学のレベルが分かり、今後の勉強の指針となるでしょう。

\* \* \*

以上の方法を入試直前期に行えば、かなり実戦的で、効果的な演習となることでしょう。

### ◇解説編の記号について

・問題文の右上で使っている記号（C\*\*など）  
問題の難易は、入試問題を10段階に分けたとして、

A(基本)…5以下、B(標準)…6、7、  
C(発展)…8、9、D(難問)…10

目標時間は\*1つにつき10分、○は5分である。  
平均的な難関校志望者が入試直前期において、自分の力を出しきれた場合を基準にしている。

分野は、出題時点のもので、I…数I、II…数II、III…数III、A…数A、B…数Bである。

例えば、「① B\*\* B/ベクトル」とあれば、標準問題で目標時間は20分、数学Bのベクトルの問題であることを意味する（ベクトルは旧課程では数B）。

・解答・解説で現れる記号

解答の**別解**などにつけた☆、★について。

☆ 巧妙であるが、ぜひ身につけて欲しい解法

★ 相当に巧妙で、思いつかなくても心配のいらない解法

次に、主に解答の最後にある注意事項について。

⇒注 すべての人のためのもの

➡注 意欲的な人のためのもの

また、  はコメントを意味するマークで、

 すべての人のためのもの

 意欲的な人のためのもの

◇受験報告の出来具合について

○……完答（のつもり）

△……半答（のつもり）

×……誤答・手つかず・ほぼダメ

# 大学への数学

## この問題が 合否を決める!

2022~2024年入試

### CONTENTS

はじめに	坪田三千雄	1
本書の構成と利用法	坪田三千雄	2
問題編		5
解説編		35

#### 掲載校一覧 (解説編)

北大・理系 22年…… 36	横浜市大・医 24年…… 88	京都薬大 23年……144	22年……194
23年…… 38	防衛医大 22年…… 92	同志社大・理系23年……148	大阪大・理系22年……197
東北大・理系22年…… 40	24年…… 95	山梨大・医 22年……151	23年……200
24年…… 42	上智大・理工22年…… 98	23年……154	大阪大・工 23年……204
筑波大・理系22年…… 45	24年……101	新潟大・理系24年……156	神戸大・理系22年……208
24年…… 48	早大・理工系22年……104	金沢大・理系23年……158	24年……211
千葉大・理系24年…… 50	23年……107	24年……160	岡山大・理系22年……214
東大・文系 23年…… 54	24年……110	名大・理系 23年……163	24年……217
24年…… 56	慶大・医 23年……113	24年……166	広島大・理系22年……220
東大・理系 22年…… 58	慶大・薬 23年……116	京大・文系 23年……170	23年……223
24年…… 62	慶大・理工 23年……120	24年……172	24年……226
一橋大 22年…… 66	24年……124	京大・理系 22年……174	九大・理系 22年……228
23年…… 68	日本医大 24年……127	23年……177	23年……232
東工大 22年…… 70	23年……130	24年……180	24年……235
東京農工大 22年…… 74	慈恵医大 23年……132	京都府立医大22年……182	産業医大 22年……238
23年…… 76	24年……134	23年……185	熊本大・医 22年……242
24年…… 78	近畿大・医 22年……136	阪大・文系 23年……188	徳島大・医歯薬23年……245
医科歯科大 22年…… 80	24年……138	24年……190	
24年…… 84	大阪医薬大・医 24年……142	阪大・理系 24年……192	

## 問題編の説明

### ◇問題の右側の枠囲みについて

一番上に、解説編の頁（太字が解答の頁）を、その下に小社の刊行物に掲載されている類題・参考問題を紹介した（2025年に発売されている本の頁を紹介）。

なお、書名は以下のように略称した。

「入試数学の基礎徹底」……………基礎徹  
「数学ⅢCの入試基礎／講義と演習」……………Ⅲ基礎  
「新数学スタンダード演習」……………新スタ  
「数学ⅢCスタンダード演習」……………Ⅲスタ  
「新数学演習」……………新数演  
「入試の軌跡」シリーズ……………軌跡  
「解法の探求・微積分」……………解探微積  
「解法の探求・確率」……………解探確率  
「共通テスト必勝マニュアル数学ⅠA」…必マニⅠ  
「共通テスト必勝マニュアル数学ⅡB」…必マニⅡ  
「1対1対応の演習（三訂版）」シリーズ …1対1  
「プレ1対1対応の演習」シリーズ …プレ1対1  
「教科書Nextベクトルの集中講義」 …ベクトル  
「教科書Next数列の集中講義」……………数列  
「教科書Next図形と方程式の集中講義」  
……………図形と方程式  
「教科書Next三角比と図形の集中講義」  
……………三角比  
「マスター・オブ・整数」……………整数  
「マスター・オブ・場合の数」……………場合の数  
「微積分／基礎の極意」……………極意  
「数学を決める論証力」……………論証力  
「ハッとめざめる確率」……………ハッ確  
「解法の突破口 [第3版]」……………突破  
「数学ショートプログラム」……………ショート  
「入試のツボを押さえる重点学習  
—数学ⅠAⅡBC（ベクトル）」  
……………入試のツボⅠAⅡBC  
「入試のツボを押さえる重点学習  
—数学ⅢC（平面上の曲線，複素数平面）」  
……………入試のツボⅢC  
「難関大入試数学・解決へのアプローチ」  
……………アプローチ  
「難関大入試数学・方針をどう立てるか」…方針  
「難関大入試数学・発展していく三角関数」  
……………三角関数

「難関大入試数学・数列の難問とその周辺」

……………数列難問

「思考力を鍛える不等式」……………不等式

「ちょっと差がつくうまい解法」……………うまい

「思考力・判断力・表現力トレーニング」

シリーズ …トレ

「東大数学で1点でも多く取る方法

理系編（第5版）」… 東大理系

「東大数学で1点でも多く取る方法

文系編（第5版）」… 東大文系

「考え抜く数学～学コンに挑戦～」……………学コン

「考え抜く数学理系編～学コンに挑戦～」

……………学コン理系編

「もっと考え抜く数学～学コンの発展問題に挑戦～」

……………もっと学コン

「難関大学受験対策

真・解法への道！ 数学ⅠAⅡBC（ベクトル）」

……………解法への道ⅠAⅡBC

「難関大学受験対策

真・解法への道！ 数学ⅢC

（平面上の曲線，複素数平面）」

……………解法への道ⅢC

## 文系範囲(Ⅰ～B+ベクトル)の問題

p.6～p.19の合計39題。

ただし、p.9の岡山大は(2)まで、p.10の東京農工大は(3)以外、p.11の産業医大は(1)だけ、p.12の千葉大は(2)まで、p.15の上智大は(3)の前半まで、p.17の同志社大は(2)まで。

# 問題編

場合の数・確率	6
整数, 数列	10
2次関数, 2次方程式, 3次方程式	12
指数関数・対数関数, 三角関数	13
平面図形	13
座標	14
ベクトル, 立体図形	15
数Ⅱの微分・積分	18
数Ⅲ (極限)	20
数Ⅲ (微分)	23
数Ⅲ (数式の積分)	24
数Ⅲ (面積, 体積, 弧長)	27
複素数平面	30
2次曲線	33
小問セット (数ⅠAⅡBⅢC)	34

## 場合の数・確率

### ○2024 早稲田大学・理工系（基幹，創造，先進）

$n$  を自然数とし，数 1, 2, 4 を重複を許して  $n$  個並べてできる  $n$  桁の自然数全体を考える．そのうちで 3 の倍数となるものの個数を  $a_n$ ，3 で割ると 1 余るものの個数を  $b_n$ ，3 で割ると 2 余るものの個数を  $c_n$  とする．

- (1)  $a_{n+1}$  を  $b_n, c_n$  を用いて表せ．同様に， $b_{n+1}$  を  $a_n, c_n$  を用いて， $c_{n+1}$  を  $a_n, b_n$  を用いて表せ．
- (2)  $a_{n+2}$  を  $n$  と  $c_n$  を用いて表せ．
- (3)  $a_{n+6}$  を  $n$  と  $a_n$  を用いて表せ．
- (4)  $a_{6m+1}$  ( $m=0, 1, 2, \dots$ ) を  $m$  を用いて表せ．

p.110  
新数演 3・8

### ○2024 岡山大学・理系

数直線上を動く点 P がある．点 P は，原点 O を出発して，1 枚のコインを 1 回投げるごとに，表が出たら数直線上を正の向きに 1 だけ進み，裏が出たら数直線上を負の向きに 1 だけ進むものとする．コインの表が出る確率と裏が出る確率はともに  $\frac{1}{2}$  であるとし，コインを  $n$  回投げ終えた時点での点 P の座標を  $x_n$  とする．コインを 10 回投げるとき，以下の問いに答えよ．

- (1)  $x_{10}=0$  となる確率を求めよ．
- (2)  $x_5 \neq 1$  かつ  $x_{10}=0$  となる確率を求めよ．
- (3)  $0 \leq x_n \leq 3$  ( $n=1, 2, \dots, 9$ ) かつ  $x_{10}=0$  となる確率を求めよ．

p.217  
1 対 1A p.42

- ① B\*\*\* II/平面座標
- ② C\*\*\* AB/場合の数, 漸化式
- ③ C\*\*\* I B/図形と計量, 空間ベクトル
- ④ B\*\*\* AB/確率, 漸化式
- ⑤ B\*\*\* III/微積分(媒介変数表示, 体積)

$n$  を自然数とし, 数 1, 2, 4 を重複を許して  $n$  個並べてできる  $n$  桁の自然数全体を考える. そのうちで 3 の倍数となるものの個数を  $a_n$ , 3 で割ると 1 余るものの個数を  $b_n$ , 3 で割ると 2 余るものの個数を  $c_n$  とする.

- (1)  $a_{n+1}$  を  $b_n, c_n$  を用いて表せ. 同様に,  $b_{n+1}$  を  $a_n, c_n$  を用いて,  $c_{n+1}$  を  $a_n, b_n$  を用いて表せ.
- (2)  $a_{n+2}$  を  $n$  と  $c_n$  を用いて表せ.
- (3)  $a_{n+6}$  を  $n$  と  $a_n$  を用いて表せ.
- (4)  $a_{6m+1}$  ( $m=0, 1, 2, \dots$ ) を  $m$  を用いて表せ.

**なぜこの 1 題か**

今年は昨年より難化したので, ボーダーラインは, 50%~55%程度と思われる. ただし, ③の(4)で出題ミスがあり, そこで時間を浪費してしまった受験生は少なくなかったと思われる. 近年, 早大理工系は出題ミスも多いので, 「答がない」場合は, 「また出題ミスか?」と思って余り時間をかけない方が良いだろう.

①は, 平面図形の面積の最大・最小問題で, 多くの人が類題をやったことがあり, 冷静に対処できただろう.

②は, 整数の合同式や, 数列の漸化式の立式に慣れていけば, 難しくないが, 立式に慣れていないと, 立

式に時間がかかったであろう.

③は(1)~(3)は標準的. (4)で「最大値を求めよ」とあるが, 実際には存在しないので, 不適切な出題であった.

④は確率の漸化式で, 3 項間漸化式の解法が指定されているので, 比較的簡単であっただろう.

⑤は, パラメータ表示曲線の図示, 求積問題で頻出問題であった.

②を着実に解けた人は, 安心して他の問題に取り組めたであろう.

**【目標】** 5 題 120 分なので, 24 分で完答が目標.

**解答**

自然数を 3 で割った余りは, 各位の数の和を 3 で割った余りに等しいことに着目する.

**解** 整数  $a, b$  に対して,  $a-b$  が 3 の倍数であるとき,  $a \equiv b \pmod{3}$  と表す.

$n$  桁の自然数  $X = A_{n-1}A_{n-2}\dots A_1A_0$  ( $n$  個の数字を並べてできる数) は

$$X = A_0 + A_1 \cdot 10 + A_2 \cdot 10^2 + \dots + A_{n-1} \cdot 10^{n-1}$$

であるが,  $10 \equiv 1 \pmod{3}$  なので,

$$X \equiv A_0 + A_1 + A_2 + \dots + A_{n-1} \pmod{3}$$

であることに注意する.

$n$  桁の自然数  $X$  の末尾に  $Y$  をつけ加えた数は,

$$10X + Y \equiv X + Y \pmod{3}$$

なので, 1, 4 をつけ加えたとき mod 3 で  $X+1$  に, 2 をつけ加えたとき  $X+2$  となる. よって,

$n$  桁の自然数に 1, 4 をつけ加える操作を  $\longrightarrow$  で

$n$  桁の自然数に 2 をつけ加える操作を  $\longrightarrow$  で表すと

■ 一般に整数  $a, b$ , 自然数  $m$  に対して,  $a-b$  が  $m$  の倍数のとき

$$a \equiv b \pmod{m}$$

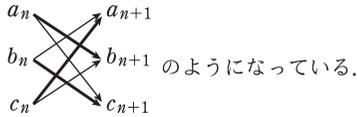
と表す. すると

$$a \equiv b, c \equiv d \pmod{m}$$

のとき

$$\left\{ \begin{aligned} a+c &\equiv b+d \pmod{m} \\ a-c &\equiv b-d \pmod{m} \\ a \cdot c &\equiv b \cdot d \pmod{m} \end{aligned} \right.$$

が成立する.



よって,

$$a_{n+1} = b_n + 2c_n, \quad b_{n+1} = c_n + 2a_n, \quad c_{n+1} = a_n + 2b_n \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(2) ①より,

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= b_{n+1} + 2c_{n+1} \\ &= (c_n + 2a_n) + 2(a_n + 2b_n) \\ &= 4a_n + 4b_n + c_n \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①を辺々足して,

$$a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = 3(a_n + b_n + c_n) \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$a_1 = 0, \quad b_1 = 2 \quad (1 \text{ と } 4), \quad c_1 = 1 \quad (2 \text{ のみ}) \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

を考えて, ③, ④より,  $\{a_n + b_n + c_n\}$  は初項 3, 公比 3 の等比数列なので,

$$a_n + b_n + c_n = 3^n$$

これと, ②より

$$a_{n+2} = 4(a_n + b_n + c_n) - 3c_n$$

$$\therefore a_{n+2} = 4 \cdot 3^n - 3c_n \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

(3) ①の漸化式は  $a_n, b_n, c_n$  をローテーションしても変わらないので,

⑤より, 同様にして,

$$b_{n+2} = 4 \cdot 3^n - 3a_n, \quad c_{n+2} = 4 \cdot 3^n - 3b_n$$

も成立する. よって,

$$\begin{aligned} a_{n+6} &= 4 \cdot 3^{n+4} - 3c_{n+4} \\ &= 4 \cdot 3^{n+4} - 3(4 \cdot 3^{n+2} - 3b_{n+2}) \\ &= (36 - 12)3^{n+2} + 9b_{n+2} \\ &= 24 \cdot 3^{n+2} + 9(4 \cdot 3^n - 3a_n) \end{aligned}$$

$$\therefore a_{n+6} = 28 \cdot 3^{n+2} - 27a_n$$

(4) (3)の結果より  $n = 6m + 1$  として

$$a_{6m+7} = 28 \cdot 3^{6m+3} - 27a_{6m+1} \quad \cdots \cdots \textcircled{6}$$

である.

( $x_{m+1} = px_m + q \cdots \cdots \textcircled{7}$  の漸化式なら, 解法はシンプル)  
 なので, ⑥を⑦の形に変形することを考えて,

$3^{6m+7}$  で⑥の両辺を割ると

$$\frac{a_{6m+7}}{3^{6m+7}} = \frac{28}{81} - \frac{1}{27} \cdot \frac{a_{6m+1}}{3^{6m+1}}$$

となるので,  $d_m = \frac{a_{6m+1}}{3^{6m+1}}$  とおくと,

$$\textcircled{6} \iff d_{m+1} = \frac{28}{81} - \frac{1}{27} d_m \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

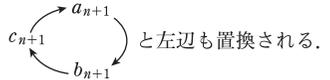
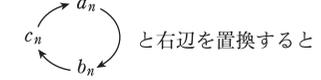
ここで,  $\alpha = \frac{28}{81} - \frac{1}{27} \alpha \iff \frac{28}{27} \alpha = \frac{28}{81} \iff \alpha = \frac{1}{3}$  なので,

$$\textcircled{8} \iff d_{m+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{27} \left( d_m - \frac{1}{3} \right)$$

よって,  $d_m - \frac{1}{3} = \left( -\frac{1}{27} \right)^m \left( d_0 - \frac{1}{3} \right)$

である.  $a_1 = 0$  より  $d_0 = 0$  なので,  $d_m = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left( -\frac{1}{27} \right)^m$

■ ①の漸化式では



$x_n = a_n + b_n + c_n$   
 は 1, 2, 4 を重複を許して  $n$  個の数  
 $\triangleleft$  を並べる並べ方なので,

$$x_n = 3^n$$

であるとしてももちろん良い.

◇ ⑤より

$a_{n+6}$  が  $c_{n+4}$  で表せて,  
 $c_{n+4}$  が  $b_{n+2}$  で表せて,  
 $b_{n+2}$  が  $a_n$  で表せるので,  
 $a_{n+6}$  が  $a_n$  で表される  
 とわかる.

■ ⑥が

$$a_{6m+7} - p \cdot 3^{6m+3} = (-27)(a_{6m+1} - p \cdot 3^{6m-3}) \cdots \star$$

と変形できれば

$$f_m = a_{6m+1} - p \cdot 3^{6m-3}$$

は公比  $-27$  の等比数列で

$$f_m = (-27)^m f_0$$

と分かる.

☆は,

$$a_{6m+7} = -27a_{6m+1} + p \cdot 3^{6m+3} + 27p \cdot 3^{6m-3}$$

と変形できるので, ⑥と比較して,

$$28 = p + \frac{1}{27} p \iff p = 27$$

とおくと⑥は☆の形になっている.

つまり

$$\textcircled{6} \iff a_{6m+7} - 3^{6m+6} = (-27)(a_{6m+1} - 3^{6m})$$

であり,

$\{a_{6m+1} - 3^{6m}\}$  が公比  $-27$  の等比数列  
 なので,

よって,

$$a_{6m+1} = 3^{6m+1} d_m = 3^{6m+1} \left\{ \frac{1}{3} - (-1)^m \frac{1}{3^{3m+1}} \right\}$$

$$\therefore a_{6m+1} = 3^{6m} - (-1)^m 3^{3m}$$

$$a_{6m+1} - 3^{6m} = (-27)^m (a_1 - 3^0)$$

と分かる.  $a_1 = 0$  なので,

$$a_{6m+1} = 3^{6m} - (-27)^m$$

$$= 3^{6m} - (-1)^m 3^{3m}$$

と分かる.

### 解説

(受験報告は p.106)

#### 【⑥の漸化式の解き方】

解答, および傍注で計2通りの方法を紹介した. 階差数列を活用する方法もある. 次のようにする.

⑥の両辺を  $(-27)^{m+1}$  で割ると  $(-27)$  は  $a_{6m+1}$  の係数),  $3^{6m+3} = 3^{3(2m+1)} = 27^{2m+1}$  に注意して,

$$\frac{a_{6m+7}}{(-27)^{m+1}} = \frac{a_{6m+1}}{(-27)^m} - 28(-27)^m \quad (m \geq 0)$$

と変形できる. これは, 数列  $\left\{ \frac{a_{6m+1}}{(-27)^m} \right\}$  の階差数列が  $\{-28(-27)^m\}$  であることを意味するから,  $m \geq 1$  のとき,

$$\frac{a_{6m+1}}{(-27)^m} = \frac{a_1}{1} - 28 \sum_{k=0}^{m-1} (-27)^k$$

$$= -28 \cdot \frac{1 - (-27)^m}{1 - (-27)}$$

$$= (-27)^m - 1 \quad (m=0 \text{ のときも OK})$$

$$\therefore a_{6m+1} = 27^m - (-27)^m = 3^{6m} - (-1)^m \cdot 3^{3m}$$

#### 【類題の紹介】

平面上に正五角形 ABCDE があり, 頂点 A, B, C, D, E は時計回りに配置されている. 点 P をまず頂点 A の位置に置き, この正五角形の辺にそって時計回りに頂点から頂点へ与えられた正の整数  $n$  だけ動かす. たとえば,  $n=2$  ならば点 P は頂点 C の位置にあり,  $n=6$  ならば点 P は頂点 B の位置にある. さいころを  $k$  回投げるとき  $6^k$  通りの出方があるが, 出た目の積で  $n$  を与えるとき,  $P=A$  となる場合の数を  $a_k$ ,  $P=B$  となる場合の数を  $b_k$  とする.

- (1)  $a_2, b_2$  を求める.
- (2)  $a_k$  を求める.
- (3)  $b_k$  を求めよ. (類 21 新潟大・理系)

点 P の位置は  $n$  を 5 で割った余りで決まり, 余りが 0 のときは A, 余りが 1 のときは B である.

頂点 A の位置にあるのは,  $n$  が 5 の倍数のときで, 少なくとも 1 回 5 の目が出る場合であるから, (2) は '余事象' を使う.

(3) 漸化式を立てよう.  $k+1$  回投げ終えたときに余りが 1 となるのは,  $k$  回投げ終えたときは余りが 0 でない.

$i, j$  を 1~5 とするとき,  $ij \equiv 1 \pmod{5}$  となる  $i, j$  は,  $i$  を決めると  $j$  はただ 1 つに決まることに注意しよう (例えば  $i=2$  のとき,  $j=3$  に決まる).

**解** 以下, 合同式は mod 5 とする.

さいころを  $k$  回投げて出た目の積を  $z_k$  とする.

$$z_k \equiv 0 \text{ のとき } P=A$$

$$z_k \equiv 1 \text{ のとき } P=B$$

である.

(1)  $a_2$ :  $z_2 \equiv 0$  となる場合で, それは 5 の目が少なくとも 1 回出るときである. 余事象は 5 の目が一度

も出ないときで  $5^2$  通りあるから,  $a_2 = 6^2 - 5^2 = 11$

$b_2$ : さいころの目を順に  $x, y$  とする.

$z_2 = xy \equiv 1$  となるのは, 次の表の場合である.

$x \equiv$	1	2	3	4
$y \equiv$	1	3	2	4

さいころの目について, 5 で割った余りが 1 と } ...①  
 なるのが 2 通り, それ以外の余りは 1 通りずつ }  
 であるから,  $z_2 \equiv 1$  となる場合の数  $b_2$  は

$$b_2 = 2 \times 2 + 3 \times 1 = 7$$

(2)  $a_2$  と同様に考えて,  $a_k = 6^k - 5^k$

(3)  $b_{k+1}$  を  $b_k$  で表すことを考える.  $z_{k+1} \equiv 1$  のとき  $z_k \equiv 0$  であり,  $z_k \equiv 0$  となる場合の数は  $5^k$  通りある. このうち,

$$z_k \equiv 1 \text{ となる場合の数が } b_k$$

$$z_k \equiv 1 \text{ となる場合の数が } 5^k - b_k$$

であり, 上表で  $x \leftrightarrow z_k, y \leftrightarrow k+1$  回目の目 とすると,

①とから,  $z_{k+1} \equiv 1$  となる場合の数  $b_{k+1}$  は

$$b_{k+1} = b_k \times 2 + (5^k - b_k) \times 1$$

$$\therefore b_{k+1} = b_k + 5^k$$

を満たす. よって,  $k \geq 2$  のとき,

$$b_k = b_1 + \sum_{m=1}^{k-1} (b_{m+1} - b_m) = 2 + \sum_{m=1}^{k-1} 5^m$$

$$= 2 + 5 \cdot \frac{5^{k-1} - 1}{5 - 1} = \frac{5^k + 3}{4} \quad \left( k=1 \text{ のときも} \right)$$

(これでよい)

(古川)



## あとがき

毎年の入試から、「合否を分けたこの1題」を集めて刊行してきました。集めてきた問題は良問ばかりで、しかも1題1題じっくり解説してあります。

その2022～2024年で取り上げた問題から、さらに問題を選びすぎり、ほぼ全分野をカバーするように74題を精選しました。

詳しく解説しているので、例えば、p.197の大阪公立大の問題はデルトイドという曲線の性質がテーマであ

ることが分かります。

また、類題や関連問題も充実しています。例えばp.120の慶大・理工の問題は、無限級数がテーマなのですが、誘導のつけ方が違う問題を紹介してあります。

このように関連事項を詳しく解説してありますから、1問1問をより深く理解できるはずです。

みなさんの実力upに役立てて頂ければ幸いです。 (坪田)

---

### この問題が合否を決める！ 2022～2024年入試

---

令和7年7月4日 第1刷発行

定価：本体2,000円＋税

編者 東京出版編集部

発行者 黒木憲太郎

発行所 東京出版

〒150-0012 東京都渋谷区広尾3-12-7

電話 (03)-3407-3387

振替 00160-7-5286

URL <https://www.tokyo-s.jp/>

---

整版所 錦美堂整版

印刷所 光陽メディア

製本所 技秀堂

落丁・乱丁の場合はご連絡下さい。送料弊社負担にてお取替えいたします。

©Tokyo shuppan 2025 Printed in Japan

ISBN 978-4-88742-293-3