はじめに

『1対1対応の演習』シリーズは，入試問題から基本的あるいは典型的で重要な意味を持っていて，得るところが大きいものを精選し，その問題を通して

入試の標準問題を確実に解ける力

をつけてもらおうというねらいで作った本です．

さらに，難関校レベルの問題を解く際の足固めをするのに最適な本になることを目指しました．

解説においては，分かりやすさを心がけました．学校で一つの単元を学習した後でなら，その単元について，本書で無理なく入試のレベルを知ることができるでしょう．

また，数学Cで扱う曲線との融合問題も多いこともあり，数学Ⅲ・Cでやや応用的なものや総合的な問題は，本シリーズ「数学C」の“いろいろな関数・曲線”，“数ⅢC総合問題”に掲載しました．

問題のレベルについて，もう少し具体的に述べましょう．水準以上の大学で出題される10題を易しいものから順に1，2，3，…，10として，

1～5の問題……A（基本）
6～7の問題……B（標準）
8～9の問題……C（発展）
10の問題………D（難問）

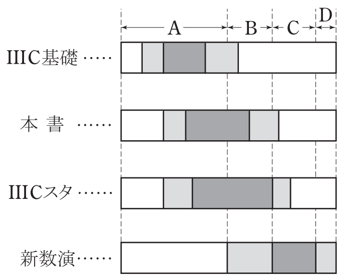
とランク分けします．

この基準で本書と，本書の前後に位置する月刊「大学への数学」の増刊号および書籍（↗）

「数学ⅢCの入試基礎」（「ⅢC基礎」と略す）
「数学ⅢCスタンダード演習」
（「ⅢCスタ」と略す）
「新数学演習」（「新数演」と略す）

「ⅢCスタ」は5月増刊（4月末日発売予定），
「新数演」は10月増刊（9月末日発売予定）

のレベルを示すと，次のようになります．（濃い網目の問題を主に採用）



さて，本書は，入試の標準問題を確実に解ける力を，問題を精選してできるだけ少ない題数（本書で取り上げた例題は75題です）になるように心がけ，そのレベルまで，

効率よく到達してもらうこと

を目標に編集しました．

本書を活用して，数Ⅲの入試への足固めをしていってください．

皆さんの目標達成に本書がお役に立てれば幸いです．

本書の構成と利用法

坪田三千雄

本書のタイトルにある‘1対1対応’の意味から説明しましょう．

まず例題(四角で囲ってある問題)によって，例題のテーマにおいて必要になる知識や手法を確認してもらいます．その上で，例題と同じテーマで1対1に対応した演習題によって，その知識，手法を問題で適用できる程に身についたかどうかを確認しつつ，一歩一歩前進してもらおうということです．この例題と演習題，さらに各分野の要点の整理（2～4ページ）などについて，以下，もう少し詳しく説明します．

要点の整理：　その分野の問題を解くために必要な定義，用語，定理，必須事項などをコンパクトにまとめました．入試との小さくはないギャップを埋めるために，一部，教科書にない事柄についても述べていますが，ぜひとも覚えておきたい事柄のみに限定しました．

例題：　原則として，基本～標準の入試問題の中から

・これからも出題される典型問題
・一度は解いておきたい必須問題
・幅広い応用がきく汎用問題
・合否への影響が大きい決定問題

の75題を精選しました（出典のないものは新作問題，あるいは入試問題を大幅に改題した問題）．そして，どのようなテーマかがはっきり分かるように，一題ごとにタイトルをつけました（大きなタイトル／細かなタイトル の形式です）．なお，問題のテーマを明確にするため原題を変えたものがありますが，特に断っていない場合もあります．

解答の**前文**として，そのページのテーマに関する重要手法や解法などをコンパクトにまとめました．前文を読むことで，一題の例題を通して得られる理解が鮮明になります．入試直前期にこの部分を一通り読み直すと，よい復習になるでしょう．

解答は，試験場で適用できる，ごく自然なものを採用し，計算は一部の単純計算を除いては，ほとんど省略せずに目で追える程度に詳しくしました．また解答の右側には，傍注(⇦ではじまる説明）で，解答の補足や，使った定理・公式等の説明を行いました．どの部分についての説明かはっきりさせるため，原則として，解答の該当部分にアンダーライン（――）を引きました（容易に分かるような場合は省略しました）．

演習題：　例題と同じテーマの問題を選びました．例題よりは少し難し目ですが，例題の解答や解説，傍注等をじっくりと読みこなせば，解いていけるはずです．最初はうまくいかなくても，焦らずにじっくりと考えるようにしてください．また横の枠囲みをヒントにしてください．

そして，例題の解答や解説を頼りに解いた問題については，時間をおいて，今度は演習題だけを解いてみるようにすれば，一層確実な力がつくでしょう．

演習題の解答：　解答の最初に各問題のランクなどを表の形で明記しました（ランク分けについては前ページを見てください）．その表にはA＊，B＊∘というように＊や∘マークもつけてあります．これは，解答を完成するまでの受験生にとっての“目標時間”であって，＊は1つにつき10分，∘は5分です．たとえばB＊∘の問題は，標準問題であって，15分以内で解答して欲しいという意味です．

ミニ講座：　例題の前文で詳しく書き切れなかった重要手法や，やや発展的な問題に対する解法などを1ページで解説したものです．

コラム：　その分野に関連する話題の紹介です．

本書で使う記号など：　上記で，問題の難易や目標時間で使う記号の説明をしました．それ以外では，
⇨**注**は初心者のための，➾**注**はすべての人のための，➡**注**は意欲的な人のための注意事項です．▨は関連する事項の補足説明などです．また，

　∴　ゆえに
　∵　なぜならば

1対1対応の演習

数学Ⅲ 三訂版

目次

ミニ講座

コラム

積分法（数式）
要点の整理

1．不定積分

1・1　不定積分の定義

関数 $f(x)$ に対して，$\dfrac{d}{dx}F(x)=f(x)$ をみたす関数 $F(x)$ を $f(x)$ の**不定積分**（**原始関数**）といい，$\int f(x)\,dx$ で表す．

$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数であるとき，任意の定数 C について $(F(x)+C)'=f(x)$ が成り立つから，$F(x)+C$ も $f(x)$ の原始関数である．

1・2　基本関数

微分法の公式 $(x^{k+1})'=(k+1)x^k$ から

1°　$\displaystyle\int x^k dx=\frac{x^{k+1}}{k+1}+C$　（$k\neq-1$，C は積分定数）

が得られる．このように，微分の公式から簡単に不定積分が求められる関数をここでは基本関数と呼ぶことにする．

以下，基本関数の不定積分を列挙すると，

2°　$\displaystyle\int \frac{1}{x}dx=\log|x|+C$

3°　$\displaystyle\int \cos x\,dx=\sin x+C$

4°　$\displaystyle\int \sin x\,dx=-\cos x+C$

5°　$\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+C$

6°　$\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}dx=-\frac{1}{\tan x}+C$

7°　$\displaystyle\int e^x dx=e^x+C$

8°　$\displaystyle\int a^x dx=\frac{a^x}{\log a}+C$　（$a>0$）

これらの不定積分は，右辺を微分することで確かめられる．なお，2° の右辺の導関数は，$x<0$ のときも

$(\log|x|+C)'=(\log(-x)+C)'=\dfrac{1}{-x}(-1)=\dfrac{1}{x}$

となるから，2° は確かに成り立つ．

1・3　不定積分についての基本公式

1°　$\displaystyle\int kf(x)\,dx=k\int f(x)\,dx$　（k は定数）

2°　$\displaystyle\int\{f(x)+g(x)\}\,dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$

ただし，両辺の定数の差を無視して等しい，ということである．

$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数であるとき，合成関数の微分法により $\{F(ax+b)\}'=af(ax+b)$ であるから

3°　$\displaystyle\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$

が成り立つ．よって，$f(x)$，$g(x)$ が基本関数なら

（ア）　$af(x)+bg(x)$

（イ）　$f(ax+b)$

は，不定積分を計算できる．

1・4　$\{f(x)\}^k f'(x)$ 型の積分

この型の関数の積分は，一般に $f(x)=t$ と置換して求める（☞4．置換積分）．特にこの型は頻出なので公式として覚えておきたい．

$(\{f(x)\}^{k+1})'=(k+1)\{f(x)\}^k f'(x)$

が，合成関数の微分法からわかる．したがって，

$\{f(x)\}^k f'(x)$　（$k\neq-1$）

という積の形をしている関数は

1°　$\displaystyle\boldsymbol{\int\{f(x)\}^k f'(x)\,dx=\frac{1}{k+1}\{f(x)\}^{k+1}+C}$

と不定積分を求めることができる．

$k=-1$ の場合は，これに相当する式として

2°　$\displaystyle\boldsymbol{\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|+C}$

となる（右辺を微分すれば確かめられる）．

例えば，$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ も 2° の形とみなすことができて，

$$\int\tan x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=\int\frac{-(\cos x)'}{\cos x}dx$$
$$=-\log|\cos x|+C$$

となる．

2. 定積分

2・1　定積分の定義

$F(x)$を，区間$a \leqq x \leqq b$で連続な関数$f(x)$の原始関数とするとき，$F(b)-F(a)$を$f(x)$のaからbまでの定積分といい，$\int_a^b f(x)\,dx$と表す．

すなわち$\int_a^b f(x)\,dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$

$f(x)$の原始関数として，$F(x)$の代わりに$F(x)+C$をとっても，

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Big[F(x)+C\Big]_a^b$$
$$=(F(b)+C)-(F(a)+C)=F(b)-F(a)$$

となるから，定積分の値は積分定数によらないことがわかる．

2・2　定積分の基本公式

1・3の1°，2°は定積分に対しても同様に成り立つ．

1°　$\int_a^b kf(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx$　（kは定数）

2°　$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$

この他に，定積分の積分区間に関わる性質として

3°　$\int_a^a f(x)\,dx=0$，$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$

4°　$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$

5°　$f(x)$が偶関数（任意のxに対し$f(x)=f(-x)$が成り立つ：グラフがy軸対称）ならば

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx$$

6°　$f(x)$が奇関数（任意のxに対し$f(x)=-f(-x)$が成り立つ：グラフが原点対称）ならば

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx=0$$

7°　$f(x)$が周期$p(>0)$を持つ（任意のxに対し$f(x)=f(x+p)$が成り立つ）ならば

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_{a+p}^{b+p} f(x)\,dx$$
$$\int_a^{a+p} f(x)\,dx=\int_a^{a+p} f(x+b)\,dx$$

2・3　絶対値入り関数の定積分

絶対値の入った関数の定積分は，絶対値記号の中身の正負によって積分区間を分けて（左の4°を利用する），絶対値を外した関数に対して積分計算を行う．5°，6°が使えることもうまく見抜きたい．

3. 部分積分

3・1　部分積分法

積の関数の微分の公式から，

$$\{F(x)g(x)\}'=f(x)g(x)+F(x)g'(x)$$

（$F(x)$は$f(x)$の原始関数とする）である．

従って，$f(x)g(x)=\{F(x)g(x)\}'-F(x)g'(x)$

両辺を積分することで，

$$\int f(x)g(x)\,dx=F(x)g(x)-\int F(x)g'(x)\,dx$$

が得られる．

これを使うとき，$F(x)g'(x)$が元の関数$f(x)g(x)$よりも積分しやすい関数となることが大切である．

$A(x)B(x)$という積の形の関数について部分積分を用いるとき，$A(x)$，$B(x)$のどちらを微分してどちらを積分するかが問題となる．

およその指針は次のとおり．

指数関数 ⟶ 積分　　対数関数 ⟶ 微分

三角関数 ⟶ 積分

3・2　定積分の部分積分法

定積分の場合も，不定積分と同様に，公式

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=\Big[F(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b F(x)g'(x)\,dx$$

が成り立つ．

3・3　定積分の漸化式

$I_n=\int_a^b f(x,\ n)\,dx$で表される$I_n$についての漸化式を求めるとき，部分積分を用いることがほとんどである．（☞○17）

$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$については，上にあてはまらない．$1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$を用いると，$I_n+I_{n+2}=\dfrac{1}{n+1}$が導ける．

1 $(x-p)^{\alpha}$ の積分

次の定積分を求めよ．

（1） $\displaystyle\int_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx$ （愛知工大） （2） $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x+1}{(x+2)(x+3)}dx$ （宮崎大・工，教文，農）

（$x-p$）で展開 x の多項式は $x-p$ で展開できる（☞本シリーズ「数Ⅱ」p.6，2・3）．すると，$\{(x-p)^{\alpha}\}'=\alpha(x-p)^{\alpha-1}$ なので，$x-p$ で展開した式はそのまま積分することができる．多項式のみならず，根号の中身が1次式である場合は，置換するまでもなく，$x-p$ で展開する筋に持ち込める．

分母が2次式の分数関数 分母が2次式（実数係数の範囲で因数分解できる）の分数関数は

$$\frac{ex+f}{(ax+b)(cx+d)}=\frac{A}{ax+b}+\frac{B}{cx+d}\quad(a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f \text{ は与えられた数})$$

となる A，B を求め，分母が1次式の分数の和に変形する（部分分数分解．☞本シリーズ「数Ⅱ」p.17）

分子を分母より低次に $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ で $f(x)$ の次数が $g(x)$ の次数以上のときは，$f(x)$ を $g(x)$ で割って，$f(x)=Q(x)g(x)+R(x)$ （$Q(x)$：商，$R(x)$：余り）となることを用いて，

$\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{Q(x)g(x)+R(x)}{g(x)}=Q(x)+\dfrac{R(x)}{g(x)}$ と分子を分母より低次にしてから計算する．

解 答

（1） $x\sqrt{x+1}=(x+1)\sqrt{x+1}-\sqrt{x+1}=(x+1)^{\frac{3}{2}}-(x+1)^{\frac{1}{2}}$ なので

$$\int_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx=\int_0^3\left\{(x+1)^{\frac{3}{2}}-(x+1)^{\frac{1}{2}}\right\}dx$$

$$=\left[(x+1)^{\frac{5}{2}}\cdot\frac{2}{5}-(x+1)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{2}{3}\right]_0^3=\left(\frac{64}{5}-\frac{16}{3}\right)-\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{3}\right)=\boldsymbol{\frac{116}{15}}$$

ルートの中身で展開する．

⇦ $(x+1)\sqrt{x+1}=(x+1)^1(x+1)^{\frac{1}{2}}$
$=(x+1)^{\frac{3}{2}}$

なお，$\sqrt{x+1}=t$ とおいて置換すると，

$x=t^2-1$ $\quad \dfrac{dx}{dt}=2t$

$\therefore\ dx=2t\,dt$

x	$0\to3$
t	$1\to2$

（2） $\dfrac{x+1}{(x+2)(x+3)}=\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{x+3}$ が恒等式となる A，B を求める．

両辺に $(x+2)(x+3)$ をかけると，

$x+1=A(x+3)+B(x+2)$ ……………………………①

$=(A+B)x+3A+2B$

両辺で，x の係数，定数項を比べて，

$1=A+B$，$1=3A+2B$

これを解いて，$A=-1$，$B=2$

⇦代入法を用いると，①に
$x=-2$ を代入して，$-1=A$
$x=-3$ を代入して，$-2=-B$
$\therefore\ B=2$

これより，$\dfrac{x+1}{(x+2)(x+3)}=\dfrac{-1}{x+2}+\dfrac{2}{x+3}$

$$\int_{-1}^0\frac{x+1}{(x+2)(x+3)}dx=\int_{-1}^0\left(\frac{-1}{x+2}+\frac{2}{x+3}\right)dx$$

$$=\Big[-\log|x+2|+2\log|x+3|\Big]_{-1}^0$$

$$=(-\log2+2\log3)-(2\log2)=\boldsymbol{2\log3-3\log2}$$

1 演習題（解答は p.96）

次の不定積分，または定積分を求めよ．

（1） $\displaystyle\int_1^4\frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx$ （東京理科大・工）

（2） $\displaystyle\int\frac{2x^3+3x^2-16x-45}{x^2-9}dx$ （中部大・工）

（1） $2x+1$ で展開
（2） 分子を次数下げ

2 $\{f(x)\}^k f'(x)$を見抜いて積分する

次の不定積分，または定積分を求めよ．

（１） $\displaystyle\int\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{2}{x}\right)^2dx$ （茨城大・工） （２） $\displaystyle\int_0^2\frac{2x}{x^2+1}dx$ （東京薬大・生命）

（３） $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}(x+x^3)\sqrt{1+x^2}\,dx$ （東京都市大） （４） $\displaystyle\int_1^4\frac{1}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+1)}dx$ （東京電機大）

$\{f(x)\}^k f'(x)$と見る 積分は微分の逆演算であることをうまく利用しよう．$\{f(x)\}^{k+1}$を微分すると，$(\{f(x)\}^{k+1})'=(k+1)\{f(x)\}^k f'(x)$である．この式の両辺を積分することで，

$$\int\{f(x)\}^k f'(x)\,dx=\frac{1}{k+1}\{f(x)\}^{k+1}+C\quad(k\neq-1)$$

が成り立つ．kは整数でなくてもよい．$k=-1$のときは，次のようになる．

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|+C$$

積分する式（被積分関数）の一部のかたまりを$f(x)$とおき，$f'(x)$が式の中にないかどうかを探すとよい．特に分数形の場合は，分母に現れる式を微分してみて，分子にその形が現れないか確認しよう．なお，上の形そのものでなくても，微分すると被積分関数になるものを見つけられれば積分できる（見つけにくいときは，次頁のように置換積分を利用する）．

解 答

（１） $\left(1+\dfrac{2}{x}\right)'=-\dfrac{2}{x^2}$ なので，

$$\int\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{2}{x}\right)^2dx=-\frac{1}{2}\int\left(1+\frac{2}{x}\right)'\left(1+\frac{2}{x}\right)^2dx=\boldsymbol{-\frac{1}{6}\left(1+\frac{2}{x}\right)^3+C}$$

⇦$f(x)=1+\dfrac{2}{x}$とおくと，与式$=-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\{f(x)\}^2f'(x)\,dx$となっている．

（２） $(x^2+1)'=2x$ なので

$$\int_0^2\frac{2x}{x^2+1}dx=\int_0^2\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx=\Big[\log(x^2+1)\Big]_0^2=\boldsymbol{\log 5}$$

（３） $(1+x^2)'=2x$ なので

$$\int_0^{\sqrt{3}}(\underline{x+x^3})\sqrt{1+x^2}\,dx=\int_0^{\sqrt{3}}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}x\,dx$$

⇦$x+x^3=x(1+x^2)$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}(x^2+1)'dx=\frac{1}{2}\left[(1+x^2)^{\frac{5}{2}}\cdot\frac{2}{5}\right]_0^{\sqrt{3}}=\frac{32}{5}-\frac{1}{5}=\boldsymbol{\frac{31}{5}}$$

（４） $(\sqrt{x}+1)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ なので

$$\int_1^4\frac{1}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+1)}dx=\int_1^4\frac{2}{\sqrt{x}+1}(\sqrt{x}+1)'dx=\Big[2\log(\sqrt{x}+1)\Big]_1^4$$

$$=2(\log 3-\log 2)=\boldsymbol{2\log\frac{3}{2}}$$

▨ $\{f(x)\}^k f'(x)$の形の関数を，この本では「特殊基本関数」と呼ぶ．

2 演習題（解答は p.96）

次の定積分を求めよ．

（１） $\displaystyle\int_e^{e^4}\frac{1}{x(\log x)^2}dx$ （藤田医大・医） （２） $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2x\cos^2x}dx$ （高知工科大）

（１）：$\log x$，（２）：$\tan x$の微分は？

積分法（数式）演習題の解答

1…A*○	2…A○	3…B*○
4…B**	5…C***	6…A*○
7…B*○	8…B**	9…A*○
10…B**○	11…B**	12…B**
13…B***	14…C**	15…B**
16…B**	17…B***	18…C***

1 （1） 置換積分でもできるが，$(x-p)^\alpha$ の積分でやってみる．

（2） 分子の次数下げをしてから，部分分数分解する．

解 （1） $\displaystyle\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx=\int_1^4 \frac{1}{2}\cdot\frac{2x+1-1}{\sqrt{2x+1}}dx$

$$=\frac{1}{2}\int_1^4\left\{(2x+1)^{\frac{1}{2}}-(2x+1)^{-\frac{1}{2}}\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[(2x+1)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}-(2x+1)^{\frac{1}{2}}\cdot2\cdot\frac{1}{2}\right]_1^4$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{27}{3}-3\right)-\left(\frac{3\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}\right)\right\}=\mathbf{3}$$

別解 （置換積分法による）$\sqrt{2x+1}=t$ とおく．

$2x+1=t^2$ により $x=\dfrac{t^2-1}{2}$ であり，微分して，

$\dfrac{dx}{dt}=t \qquad \therefore\ dx=t\,dt$

積分区間は，

x	$1\to4$
t	$\sqrt{3}\to3$

$$\int_1^4\frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx=\int_{\sqrt{3}}^3\frac{t^2-1}{2t}\cdot t\,dt$$

$$=\int_{\sqrt{3}}^3\frac{1}{2}(t^2-1)\,dt=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}t^3-t\right)\right]_{\sqrt{3}}^3$$

$$=\frac{1}{2}\{(9-3)-(\sqrt{3}-\sqrt{3})\}=\mathbf{3}$$

（2） $2x^3+3x^2-16x-45$ を x^2-9 で割ることにより，

$2x^3+3x^2-16x-45=(x^2-9)(2x+3)+2x-18$

$\therefore\ \dfrac{2x^3+3x^2-16x-45}{x^2-9}=2x+3+\dfrac{2x-18}{x^2-9}$ ……①

ここで，$\dfrac{2x-18}{x^2-9}=\dfrac{2x-18}{(x-3)(x+3)}=\dfrac{a}{x-3}+\dfrac{b}{x+3}$

とおき，分母を払って，

$$2x-18=a(x+3)+b(x-3)$$

$$\therefore\ 2x-18=(a+b)x+3(a-b)$$

$\therefore\ a+b=2,\ a-b=-6 \qquad \therefore\ a=-2,\ b=4$

$$\int①dx=\int\left(2x+3-\frac{2}{x-3}+\frac{4}{x+3}\right)dx$$

$$=\boldsymbol{x^2+3x-2\log|x-3|+4\log|x+3|+C}$$

（C は積分定数）

2 （1） $(\log x)'=\dfrac{1}{x}$ （2） $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

に着目する．

解 （1） $\displaystyle\int_e^{e^4}\frac{1}{x(\log x)^2}dx=\int_e^{e^4}\frac{1}{(\log x)^2}(\log x)'dx$

$$=\left[-\frac{1}{\log x}\right]_e^{e^4}=-\frac{1}{4}+1=\boldsymbol{\frac{3}{4}}$$

（2） $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2x\cos^2x}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2x}(\tan x)'dx$

$$=\left[-\frac{1}{\tan x}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=\boldsymbol{-1+\sqrt{3}}$$

3 （1） $\sqrt{1+\log x}=t$ とおき，$t^2=1+\log x$ を微分．

（2） $e^x=t$ とおくと，分数関数になる．

解 （1） $\sqrt{1+\log x}=t$ とおく．$1+\log x=t^2$ を x で微分して，

$$\frac{1}{x}=2t\frac{dt}{dx} \qquad \therefore\ \frac{1}{x}dx=2t\,dt$$

積分区間は，

x	$1\to e$
t	$1\to\sqrt{2}$

$$\int_1^e\frac{\sqrt{1+\log x}}{x}dx=\int_1^{\sqrt{2}}t\cdot2t\,dt=\int_1^{\sqrt{2}}2t^2dt$$

$$=\left[\frac{2}{3}t^3\right]_1^{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{4}{3}\sqrt{2}-\frac{2}{3}}$$

（2） $e^x=t$ とおく．x で微分して，$e^x=\dfrac{dt}{dx}$

$\therefore\ e^xdx=dt$ 　積分区間は，

x	$0\to\log3$
t	$1\to3$

$$\int_0^{\log3}\frac{1}{e^x+5e^{-x}-2}dx=\int_0^{\log3}\frac{e^x}{e^{2x}-2e^x+5}dx$$

$$=\int_1^3\frac{1}{t^2-2t+5}dt=\int_1^3\frac{1}{(t-1)^2+4}dt\ \cdots\cdots①$$

$t-1=2\tan\theta$ とおく．θ で微分して，$\dfrac{dt}{d\theta}=\dfrac{2}{\cos^2\theta}$

$dt=\dfrac{2}{\cos^2\theta}d\theta$ 　積分区間は，

t	$1\to3$
θ	$0\to\frac{\pi}{4}$

ミニ講座・9 フーリエ展開の話

p.68 では，一般の関数を多項式関数によって近似する“マクローリン展開”を紹介しました．ここでは，一般の関数を三角関数の一次結合の形（和の形）で近似する“フーリエ展開”について述べます．

フーリエ展開とは

区間 $(-\pi,\ \pi)$ で定められた関数 $f(x)$ が適当な条件を満たすとき，実数 a_n，b_n を

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

と定めると，関数 $f(x)$ は，

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

と書ける．

$f(x)$ として具体的な関数 x，x^2 をあてはめた例を示すと，

$$x=2\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\cdots\right)\ \cdots\cdots①$$

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\left(-\cos x+\frac{\cos 2x}{2^2}-\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 4x}{4^2}-\cdots\right)$$

となります．①は直線が“曲線の和”で表されるという不思議な味わいのある式ですね．

x は奇関数なので sin のみを用い，x^2 は偶関数なので cos のみを用いているところも面白いです．どちらも区間 $(-\pi,\ \pi)$ だけで成り立つことに注意して下さい．

これをネタにした入試問題で頻出なのは次のパターンです．

例題　a，b を実数とする．定積分

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\sin x-b\sin 2x)^2dx$$

で a，b を変化させたときの I の最小値と，そのときの a，b の値を求めよ．　（お茶の水女子大）

x のフーリエ展開では，$\sin x$，$\sin 2x$，$\sin 3x$，…… という三角関数を用いましたが，この問題では $\sin x$，$\sin 2x$ だけを用いています．積分値 I は，関数 $y=x$ と $y=a\sin x+b\sin 2x$ がどれだけ“離れているか”を表している数値と考えられます．空間座標における 2 点 A，B 間の距離が，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分の 2 乗和の平方根であったことを思い浮かべると，感覚的にもわかってもらえるでしょうか．積分値を一番小さくする a，b を求めるということは，$a\sin x+b\sin 2x$ の形の関数で x に一番近いものを探すということです．

解　I の右辺を展開して，

$$\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+a^2\sin^2 x+b^2\sin^2 2x-2ax\sin x-2bx\sin 2x+2ab\sin x\sin 2x)\,dx\ \cdots②$$

となる．以下，m，n を自然数とする．

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}(1-\cos 2nx)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4n}\sin 2nx\right]_{-\pi}^{\pi}=\pi$$

$m\neq n$ のとき，

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\{\cos(m-n)x-\cos(m+n)x\}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{m-n}\sin(m-n)x-\frac{1}{m+n}\sin(m+n)x\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$=0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}x\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)'dx$$

$$=\left[x\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\right]_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)dx$$

$$=(-1)^{n-1}\cdot\frac{2\pi}{n}-\left[-\frac{1}{n^2}\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi}=(-1)^{n-1}\cdot\frac{2\pi}{n}$$

これらを用いると②は，

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx+a^2\pi+b^2\pi-2a\cdot 2\pi+2b\cdot\pi$$

$$=\pi a^2+\pi b^2-4\pi a+2\pi b+\frac{2}{3}\pi^3$$

［平方完成して］

$$=\pi(a-2)^2+\pi(b+1)^2+\frac{2}{3}\pi^3-5\pi$$

この式より，I は $\boldsymbol{a=2}$，$\boldsymbol{b=-1}$ のとき最小値 $\boldsymbol{\frac{2}{3}\pi^3-5\pi}$ をとる．

☆　　　☆

上で求めた a，b は，x をフーリエ展開したときの式①の $\sin x$，$\sin 2x$ の係数に一致しています．

上の問題と同じようにして，$\sin 3x$，$\sin 4x$ の係数を求めることができます．さらに，関数 $f(x)$ のフーリエ展開の係数も同様に求めることができます．

ミニ講座・10

$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n}x\,dx$ がらみの問題

p.75で述べたように，表題の$\{I_n\}$に関する漸化式を作るときは，部分積分を使わない例外のケースです．例外のケースですが，このI_nを利用して

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots=\frac{\pi}{4}$$

を導けるので，入試でも少なからず目にします．そこでここでは，入試問題をもとに作成した次の問題を考えてもらうことにしましょう．

$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n}x\,dx$（$n=0$，1，2，…）とおく．

（1） I_0を求めよ．ただし，$\tan^0 x=1$とする．

（2） $\tan^2x=\dfrac{1}{\cos^2x}-1$に着目することにより，$I_1$を求めよ．

（3） I_{n+1}をI_nで表せ．

（4） $I_n>0$，$I_{n+1}>0$と(2)に着目することにより，$\lim\limits_{n\to\infty}I_n$を求めよ．

（5） $a_n=(-1)^nI_n$，

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2n-1}=S_n$$

とおく，$n\geqq1$のとき，S_nをa_nとa_0で表せ．

（6） $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$を求めよ．

（2）のヒントの式は，（3）でも活躍します．

解 （1） $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{4}}1\cdot dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$

（2） $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2x}-1\right)dx$

$$=\Big[\tan x-x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\boldsymbol{1-\frac{\pi}{4}}$$

（3） $I_{n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n+2}x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n}x\cdot\tan^2x\,dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n}x\left(\frac{1}{\cos^2x}-1\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n}x\cdot\frac{1}{\cos^2x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n}x\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n}x(\tan x)'dx-I_n$$

$$=\left[\frac{\tan^{2n+1}x}{2n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-I_n=\frac{1}{2n+1}-I_n$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{I_{n+1}=\frac{1}{2n+1}-I_n}\quad\cdots\cdots\text{①}$$

（4） $0<x<\dfrac{\pi}{4}$で$\tan x>0$であるから，

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n}x\,dx>0,\quad I_{n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n+2}x\,dx>0$$

が成り立つ．$I_{n+1}>0$と①により，$\dfrac{1}{2n+1}-I_n>0$

$I_n>0$とから，$0<I_n<\dfrac{1}{2n+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n+1}=0$であるから，はさみうちの原理により，

$$\lim_{n\to\infty}I_n=\mathbf{0}$$

（5） ①により，$I_k+I_{k+1}=\dfrac{1}{2k+1}$

（この右辺で，$k=0$，1，2…とすると1，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{5}$，…となる）

両辺を$(-1)^k$倍して，

$$(-1)^kI_k-(-1)^{k+1}I_{k+1}=\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

$$\therefore\quad a_k-a_{k+1}=\frac{(-1)^k}{2k+1}\quad\cdots\cdots\text{②}$$

②で$k=0$，1，2，…，$n-1$としたものを加えると，

$$\sum_{k=0}^{n-1}(a_k-a_{k+1})=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

左辺$=\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_k-\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_{k+1}$

$=(a_0+a_1+\cdots+a_{n-1})$

$\quad-(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n)$

$=a_0-a_n$

右辺$=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n-1}=S_n$

$$\therefore\quad \boldsymbol{S_n=a_0-a_n}$$

（6） $a_0=I_0=\dfrac{\pi}{4}$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(-1)^nI_n=0$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(a_0-a_n)=a_0=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

あとがき

本書をはじめとする『1対1対応の演習』シリーズでは，スローガン風にいえば，

志望校へと続く
バイパスの整備された幹線道路

を目指しました．この目標に対して一応の正解のようなものが出せたとは思っていますが，100点満点だと言い切る自信はありません．まだまだ改善の余地があるかもしれません．お気づきの点があれば，どしどしご質問・ご指摘をしてください．

本書の質問や「こんな別解を見つけたがどうだろう」というものがあれば，“東京出版・大学への数学・1対1係宛（住所は下記）”にお寄せください．

質問は原則として封書（宛名を書いた，切手付の返信用封筒を同封のこと）を使用し，**1通につき1件**でお送りください（電話番号，学年を明記して，できたら在学（出身）校・志望校も書いてください）．

なお，ただ漠然と‘この解説が分かりません’という質問では適切な回答ができませんので，‘この部分が分かりません’とか‘私はこう考えたがこれでよいのか’というように具体的にポイントをしぼって質問するようにしてください（以上の約束を守られないものにはお答えできないことがありますので注意してください）．

毎月の「大学への数学」や増刊号と同様に，読者のみなさんのご意見を反映させることによって，100点満点の内容になるよう充実させていきたいと思っています．

（坪田）

大学への数学
1対1対応の演習／数学Ⅲ［三訂版］

令和6年3月21日　第1刷発行

編　者　東京出版編集部
発行者　黒木憲太郎
発行所　株式会社　東京出版
〒150-0012　東京都渋谷区広尾3-12-7
電話 03-3407-3387　振替 00160-7-5286
https://www.tokyo-s.jp/

製版所　日本フィニッシュ
印刷所　光陽メディア
製本所　技秀堂
落丁・乱丁の場合は，送料弊社負担にてお取り替えいたします．

ISBN978-4-88742-279-7（定価はカバーに表示してあります）