はじめに

本書を手に取った人は，数学ⅢC の基礎に不安がある人が多いでしょう．本書はそんな人のための本です．これから数ⅢC の入試対策をしようという人を対象とし，基本事項を理解し入試の基本問題が解けるようになることを目標にしています．

講義編と演習編を用意しました．講義編で押さえておくべき重要事項を解説したうえで，演習編に取り組んでもらう構成です．

本書の演習編のレベルについて説明しましょう．

小社で発行している演習書として，

「1 対 1 対応の演習」シリーズ

「数学ⅢC スタンダード演習」

（「ⅢC スタ」と略す）

「新数学演習」　（「新数演」と略す）

がありますが，これらは入試の標準レベル，あるいは発展レベルの問題を中心に構成されています．

それに対して，本書の演習編は，

入試の基本レベルの問題を精選

して，構成しました．

問題のレベルについて，上記の演習書と比較できるように，もう少し具体的に述べておきましょう．入試問題を 1 から 10 の 10 段階に分け，易しい方を 1 として，

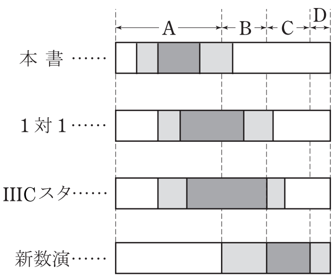
1〜5 の問題……A（基本）

6〜7 の問題 ……B（標準）

8〜9 の問題 ……C（発展）

10 の問題 ………D（難問）

とします．この基準で本書と，本書の後に位置する上記の演習書のレベルを示すと，次のようになります．濃い網目の問題を主に採用し，網目部が右側にあるほど難し目であることを表すイメージ図です．



さて，本書は，月刊「大学への数学」に連載した記事をまとめたものに講義編の 0 章と 5 章を加えるなどしたものです．

さらに巻末に，定理・公式など（精選集）をつけました．

本書で基本事項のチェックをし，基本を固めていって下さい．数ⅢC の入試の基礎固めにお役に立てれば幸いです．

追伸　本書を終えた後，「1 対 1 対応の演習」シリーズで，さらに力をつけていって下さい．

本書の構成と利用法

本書は，大きく講義編と演習編の 2 つから構成されています．

講義編：

章立てを

0 章　分数関数，無理関数など
1 章　極限
2 章　微分法
3 章　積分法（計算問題）
4 章　面積・体積・弧長
5 章　ベクトル
6 章　平面上の曲線
7 章　複素数平面

としました．

各分野の入試の基本問題を解く際に，必要となる定理や公式の使い方を例題を通して解説しました．また，間違えやすいポイントなども取り上げました．

各分野について，講義編を学習した後，演習編に取り組みましょう．

演習編：

各分野 2 セットずつの構成になっています．

入試の基本レベルの問題を精選しました．

問題文の直後に，問題の難易と目標時間を表の形で明記しました．難易については前ページで述べた A〜D で表し，目標時間は，＊，○で表しました．＊は 1 つにつき 10 分，○は 5 分です．5 分もかからず解いて欲しい問題は無印です．

解答は，解から始まる部分ですが，解答の前文で，各問を解く際のポイントなどを書きました．もしも解答の方針が立たなかったり途中でつまずいたりしたら，ここをヒントに解いてみましょう．

演習編の使い方は自由です．例えば，まずセット 1 だけやる；不得意分野から 2 セットずつやる，など各自で工夫して活用してください．

なお，講義編の 0 章に対応する演習編はありませんが，その代わりに講義編に練習問題を 8 題掲載しました．

ミニ講座：　教科書で取り上げている「近似式」を解説しました．

定理・公式など：　巻末に，定理・公式など（精選集）をつけました．詳しい証明などは省略しましたが，公式の確認などに活用してください．

本書で使う記号・用語など：

⇨**注**　すべての人のための注意事項
➡**注**　意欲的な人のための注意事項
▨　関連する事項の補足説明など
∴　ゆえに
∵　なぜならば
パラメータ　媒介変数の意味

数学ⅢCの入試基礎

講義と演習 増補版

目 次

講義 1

極 限

§1．極限の公式の使い方

1. 次の極限を求めよ．

（1） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{4}-\frac{n^2}{4n+1}\right)$　（国士舘大・理工）

（2） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n(n+3)}-n)$　（会津大）

（3） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot5^{n+1}-3^n}{5^n}$　（国士舘大・理工）

（4） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}+3^n}{4^n+2^{n+1}}$　（東京電機大・理工）

【解説】 公式が使える塊を探す・作るが目標です．

（1） $\displaystyle\underset{\sim\sim}{\frac{n}{4}}-\underline{\underline{\frac{n^2}{4n+1}}}$ ……① では，〰〰，═══は共に ∞ になり，このままでは極限がわかりません．通分してまとめると，整理した式

$$①=\frac{n(4n+1)-4n^2}{4(4n+1)}=\frac{n}{16n+4}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

は分母・分子が多項式なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ を使うために $\dfrac{1}{n}$ の塊を作ります．②では，分母・分子を n で割り，

$$②=\frac{1}{16+4\cdot\frac{1}{n}}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{16+4\cdot0}=\mathbf{\frac{1}{16}}$$

（2） $\sqrt{A}-\sqrt{B}$ ……（＊）タイプの極限です．

$\underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{n(n+3)}}-\underline{\underline{n}}$ ……③ も，〰〰，═══は共に ∞ になり，極限がわかりませんし，今度は通分もできません．そこで次の“**分子の有理化**”を行います．

$$（＊）=\frac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{1}$$

と見て，分母・分子に $\sqrt{A}+\sqrt{B}$ をかけることで，

$$（＊）=\frac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{1}\times\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}=\frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$$

として，この形を利用します．

本問で見てみましょう（$n>0$ より，$n=\sqrt{n^2}$ です）．

$$③=\frac{\sqrt{n(n+3)}-n}{1}\times\frac{\sqrt{n(n+3)}+n}{\sqrt{n(n+3)}+n}$$

$$=\frac{n(n+3)-n^2}{\sqrt{n(n+3)}+n}=\frac{3n}{\sqrt{n(n+3)}+n}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

ここで分母の $\sqrt{n(n+3)}$ は，$n\to\infty$ で大雑把に見積もるとほとんど $\sqrt{n^2}=n$（n の 1 次式）とみなせます．

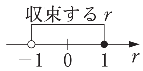
つまり，④は $\dfrac{1\text{次式}}{1\text{次式}}$ とみなせます．

これより（1）と同様に考え，分母・分子を n で割り，

$$④=\frac{3}{\sqrt{\frac{n^2+3n}{n^2}}+1}=\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1}\xrightarrow{n\to\infty}\mathbf{\frac{3}{2}}$$

⇨注　このように，$x\to\infty$ では $\sqrt{x^k+\cdots\cdots}$ を大雑把に見て $\sqrt{x^k}$ と解釈します．大雑把に見積もることが極限では大切です．

（3） ここでは，下の表を利用した，r^n 型の極限を扱います．



r	…	-1	…	1	…
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n$	$\pm\infty$ を振動	±1 を振動	0	1	$+\infty$

この表から，n の指数関数の極限での目標は，

（絶対値が 1 より小さい定数）^{n} の塊…♪を作る

ことです．本問では，分数を分けることで♪を作れて，

$$\frac{2\cdot5^{n+1}-3^n}{5^n}=2\cdot\frac{5^{n+1}}{5^n}-\frac{3^n}{5^n}=2\cdot5-\underset{\sim\sim\sim}{\left(\frac{3}{5}\right)^n}\ \cdots\cdots\cdots ⑤$$

上の表で $r=\dfrac{3}{5}$ のときは，$n\to\infty$ で〰〰が 0 に収束するので，⑤ $\xrightarrow{n\to\infty}2\cdot5-0=\mathbf{10}$

（4） まずは指数をそろえましょう．

$$\frac{2^{2n+1}+3^n}{4^n+2^{n+1}}=\frac{2\cdot4^n+3^n}{4^n+2\cdot2^n}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑥$$

ここから，♪を作るために，**●^{n} にしたときの●について，『|●| が最も大きいもの』で割ること**を考えます．本問では，⑥の●^{n} での各●を比較すると，4^n が一番大きいので，分母・分子を 4^n で割って，

$$⑥=\frac{2+\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1+2\cdot\left(\frac{2}{4}\right)^n}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{2+0}{1+2\cdot0}=\mathbf{2}$$

2. (1)　極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{4+x}-2}$ を求めよ．

（関東学院大・理工）

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-a}{x-2}$ が有限の値 b となるとき，

$a=\boxed{}$，$b=\boxed{}$ である．　（東邦大・理）

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to -\infty}x(\sqrt{x^2+6x+10}+x+3)$ を求めなさい．

（駒大・医療健康科学）

【解説】（1）（2）はとりあえず極限をとると $\dfrac{0}{0}$ になるタイプの確認，（3）は $x\to-\infty$ の扱い方の確認です．

(1)　分母を有理化すると，

$$\frac{x}{\sqrt{4+x}-2}=\frac{x(\sqrt{4+x}+2)}{(4+x)-2^2}=\frac{x(\sqrt{4+x}+2)}{x}\quad\cdots①$$

となり，「極限をとったとき 0 に行く塊」（①では，$x\to 0$ なので“x”）が分母・分子に現れました．

このように，$\dfrac{0}{0}$ 型になるときは，分母・分子から 0 に行く塊を取り出すことを考えます．

$$①=\sqrt{4+x}+2\xrightarrow{x\to 0}2+2=\mathbf{4}$$

(2)　分母→0 でも分数全体として収束する場合は，分子→0 でなくてはなりません（分子に 0 に行く塊がないといけません）．

本問では，「分母 $x-2$ が 0 に近づくが，分数全体は収束する」ことから，「分子 $\sqrt{x+2}-a$ も $x\to 2$ で 0 に近づく」ことがわかります．つまり，

$$(\text{分子})\xrightarrow{x\to 2}\sqrt{2+2}-a=0\quad\therefore\quad \boldsymbol{a=2}$$

これより，(分子)$=\sqrt{x+2}-2$ ですから，

$$(\text{与式})=\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

で，分子から 0 に行く塊“$x-2$”をとり出すために，分子を有理化します．

$$②=\frac{(x+2)-2^2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}=\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}\xrightarrow{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{2+2}+2}=\frac{1}{4}\quad\therefore\quad \boldsymbol{b=\frac{1}{4}}$$

(3)　$x\to-\infty$ とすると，(　) の中は，

$$\sqrt{x^2+6x+10}+x+3\xrightarrow{x\to-\infty}\infty+(-\infty)$$

となり，$\infty-\infty$ なので，分子の有理化をします．

$$x(\sqrt{x^2+6x+10}+x+3)=\frac{x}{\sqrt{x^2+6x+10}-x-3}\quad\cdots③$$

問題はこの後で，次に分母・分子を x で割るとき，

$$③=\frac{1}{\sqrt{1+6\cdot\frac{1}{x}+10\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2}-1-3\cdot\frac{1}{x}}$$

とする人がいますが，これは**間違い**!!

$x\to-\infty$ では $x<0$ を考えますが，

$|x|=\sqrt{x^2}$ でしたので，$x<0$ では，$-x=\sqrt{x^2}$ です．

このように「$x<0$」では，無頓着に x を $\sqrt{}$ の中に入れてはいけません．

$x\to-\infty$ では x の中に隠れている符号がミスを招きやすいので，次のように置き換えてミスを防止します．

$x=-t$ とおくと $t=-x$ から，$x\to-\infty$ では $t\to\infty$

すると，③より，

$$③=\frac{-t}{\sqrt{(-t)^2+6(-t)+10}-(-t)-3}$$

$$=\frac{-t}{\sqrt{t^2-6t+10}+t-3}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots④$$

となるので，分母・分子ともに「t の 1 次式」の感覚で見れば，分母・分子を t (>0) で割ることで，

$$④=\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{6}{t}+\frac{10}{t^2}}+1-\frac{3}{t}}\xrightarrow{t\to\infty}\frac{-1}{1+1}=-\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

§2．三角関数の極限

3.　次の極限を求めなさい．

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}2x\sin\frac{4}{3x}$　（国士舘大・理工）

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$　（関東学院大・理工）

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos 3x}$　（国士舘大・理工）

(4)　$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta^3}{\tan\theta-\sin\theta}$　（愛媛大・理，工）

【解説】　三角関数の極限での基本公式は

$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$（$\theta$ は弧度法による角）

ですが，実戦的には次の形にも慣れておきましょう．

●→0 ならば，$\dfrac{\sin●}{●}\to 1$　0 に行く同じもの

（分母と sin の中は 0 に収束する同じものにする）

●$=\theta$ と置くと公式の形ですが，慣れてくれば置き換えることなく使えることがこの形のメリットです．もちろん，sin の中身と分母が違うときは使えません．例えば，

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}$ の値は「1」ではなく，sin の中身に合わせて分母を変えることで（sin の中を変えるのは大変!!），

$$\frac{\sin\boxed{7x}}{x}=\frac{\sin\boxed{7x}}{\boxed{7x}}\cdot 7\xrightarrow{x\to 0}1\cdot 7=7$$

となります．同様に，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}=1$ なども言えます．

（1）　$2x\sin\dfrac{4}{3x}$ ……①　は sin の中身が見にくいので，置き換えてから公式に近づけます．

$t=\dfrac{4}{3x}$ と置くと $x=\dfrac{4}{3t}$，$x\to\infty$ から $t\to0$

ですから，①を t で表すと，

$$①=2\cdot\frac{4}{3t}\cdot\sin t=\frac{8}{3}\cdot\frac{\sin t}{t}\xrightarrow{t\to0}\frac{8}{3}\cdot1=\boldsymbol{\frac{8}{3}}$$

（2）　公式に近づけるためには，cos よりも sin です．$1-\cos$● から半角の公式を使って sinを作ってみます．

$1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}$ より，$\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}$　…②

次に，sin の中と分母をそろえますが，係数を合わせるときのミス防止のために，ここでも置き換えてみます．

②での sin の中身を t，つまり $t=\dfrac{x}{2}$ とおくと，

$x\to0$ のとき $t\to0$ です．$x=2t$ から②を t で表して

$$②=\frac{2\sin^2t}{(2t)^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\xrightarrow{t\to0}\frac{1}{2}\cdot1^2=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

⇨注 1　$1-\cos$● の形の処理法として，
$1-\cos^2$●$=\sin^2$● を使うために，分母・分子に
「$1+\cos$●」をかける方法もあります．本問では，

$$\frac{1-\cos x}{x^2}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos^2x}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}\xrightarrow{x\to0}1^2\cdot\frac{1}{1+1}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

⇨注 2　本問の結果 $\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\frac{1}{2}$ も有名な公式ですが，自分で導けるようにしてから使いましょう．

（3）　$\dfrac{x^2}{1-\cos3x}$ ……③　なので，$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

を使えそうです（公式の逆数の形に近い!!）．ここでの上の公式のイメージは，

●$\to0$ ならば，$\dfrac{1-\cos●}{●^2}\to\dfrac{1}{2}$　0に行く同じもの

です．つまり，本問では $\cos3x$ に合わせて，

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos3x}{(3x)^2}=\frac{1}{2}$ が公式の形

です．よって，

$$③=\frac{9x^2}{1-\cos3x}\cdot\frac{1}{9}=\frac{(3x)^2}{1-\cos3x}\cdot\frac{1}{9}\xrightarrow{x\to0}2\cdot\frac{1}{9}=\boldsymbol{\frac{2}{9}}$$

（4）　tan は $\dfrac{\sin}{\cos}$ の形で使います．例えば，

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=1$$

のように扱います．本問では，

$$\frac{\theta^3}{\tan\theta-\sin\theta}=\frac{\theta^3}{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}-\sin\theta}=\frac{\theta^3\cos\theta}{\sin\theta(1-\cos\theta)}\quad…④$$

（2）の注 1 と同様にして，

$$④=\frac{\theta^3\cos\theta(1+\cos\theta)}{\sin\theta(1-\cos^2\theta)}=\frac{\theta^3\cos\theta\cdot(1+\cos\theta)}{\sin^3\theta}$$
$$=\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)^3\cdot\cos\theta(1+\cos\theta)\xrightarrow{\theta\to0}1^3\cdot1\cdot2=\boldsymbol{2}$$

⇨注　導けるようになれば，$\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{\tan\theta}{\theta}=1$ も公式として用いてもかまいません．

§3．指数関数・対数関数の極限

4． 次の極限を求めよ．

（1）　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{x}$　（神奈川大・理，工）

（2）　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1+3^{2n})^{\frac{1}{n}}$　（中部大）

【解説】　指数関数・対数関数の極限では，

Ⓐ　$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$（$=2.71828\cdots$）

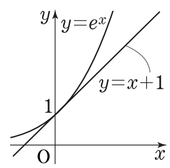
を基本とします．また，Ⓐから置き換えなどで得られる次も大切です．（☞ p.90，右段2の e に関する極限値も参照）．以下，log は自然対数とします．

Ⓑ　$\displaystyle\lim_{h\to0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$　（Ⓐで $h=\dfrac{1}{x}$ とする）

Ⓒ　$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{\log(1+h)}{h}=1$

Ⓓ　$\displaystyle\lim_{u\to0}\frac{e^u-1}{u}=1$　（Ⓒで $u=\log(1+h)$ とおく）

⇨注　ⒷやⒹを自然対数の底 e の定義とする立場もあります．特に，$y=a^x$ の $x=0$ での接線の傾きが 1 となる a の値として e を定義した式がⒹです．



これらの公式も三角関数のときと同様，例えばⒶでは

●$\to\infty$ ならば，$\left(1+\dfrac{1}{●}\right)^{●}\to e$　∞に行く同じもの

の形で使います．Ⓑ～Ⓓでも同様で，▲$\to0$ として，

Ⓑなら $\displaystyle\lim_{▲\to0}(1+▲)^{\frac{1}{▲}}=e$

Ⓒ：$\displaystyle\lim_{▲\to0}\frac{\log(1+▲)}{▲}=1$，　Ⓓ：$\displaystyle\lim_{▲\to0}\frac{e^{▲}-1}{▲}=1$

の形で使っていきます．1 つ例を見てみましょう．

$\displaystyle\lim_{h\to0}(1+2h)^{\frac{1}{h}}$ では，Ⓑを使いますが，（　）内は変形しにくいので指数部分を変え，次のように求まります．

$$(1+2h)^{\frac{1}{h}}=(1+2h)^{\frac{1}{2h}\times2}=\left\{(1+2h)^{\frac{1}{2h}}\right\}^2\xrightarrow{h\to0}e^2$$

（1）　Ⓓに近づけるために，$e^{-2x}\xrightarrow{x\to0}e^0=1$ から，

$$\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{x} \xrightarrow{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x}=\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot 2 \xrightarrow{x\to 0} 1\cdot 2$$

のように，**部分的に極限をとりながら変形していくのは大間違い**です．

本問は，分子を e^{-2x} でくくって $e^{\bullet}-1$ の形を出し，

$$\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{x}=\frac{e^{-2x}(e^{4x}-1)}{x} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots①$$

すると，分母が $4x$ ならⒹが使えて解決します．

$$①=e^{-2x}\cdot\frac{e^{4x}-1}{4x}\cdot 4 \xrightarrow{x\to 0} 1\cdot 1\cdot 4=\mathbf{4}$$

⇨注 部分的に極限をとるという間違いの典型例は

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} (1+0)^n=1^n=1$$

です（正しくは e）．$n\to\infty$ とした後に n を残してはいけません．

（**2**） $(1+3^{2n})^{\frac{1}{n}}=(1+9^n)^{\frac{1}{n}}$ ……② で，$9^n\to\infty$ なので，使う公式はⒶが近そうです．しかし，

$3^{2n}=9^n=t$ とおき，$n\log 9=\log t$，つまり

$\dfrac{1}{n}=\dfrac{\log 9}{\log t}$ から，$②=(1+t)^{\frac{\log 9}{\log t}}$ と変形しても手がとまりがちです．そこで，②で 9^n を取り出し，

$$②=\{9^n\cdot(1+9^{-n})\}^{\frac{1}{n}}=9\cdot\underbrace{(1+9^{-n})^{\frac{1}{n}}}_{③}$$

$③ \xrightarrow{n\to\infty} (1+0)^0=1$ より，$② \xrightarrow{n\to\infty} 9\cdot 1=\mathbf{9}$

⇨注 ③のまま極限をとるのが不安な人は log をとり

$$\log ③=\frac{1}{n}\cdot\log(1+9^{-n}) \xrightarrow{n\to\infty} 0\cdot\log 1=0$$

とすれば，$③ \xrightarrow{n\to\infty} 1$ がわかります．

§4. 無限級数

数列 $\{a_n\}$ の $a_1+a_2+a_3+\cdots$ を**無限級数**といい，その和を $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ のように表します．

5.（1） 次の無限級数の収束，発散について調べ，収束する場合はその和を求めなさい．

$$\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{6^2-1}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2-1}+\cdots$$

（福島大・人間発達文化）

（2） 初項が $\dfrac{1}{2}$ である無限等比級数の和と，その各項を2乗した無限等比級数の和が等しいとき，もとの無限等比級数の公比を求めなさい．

（龍谷大・理工）

【解説】 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+a_3+\cdots$ は，$\sum_{k=1}^{n}a_k$ が求まるときは，それを求めてから極限を計算します．つまり，

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{a_k}$ です．

（**1**） 和を求めるところは，部分分数分解です．

$$\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}=\frac{2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{2}{(2k)^2-1}$$

に注意しましょう．これを用いると，

$$\frac{1}{(2k)^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right) \text{ です．}$$

$$(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)}_{\sim\sim} \quad \cdots\cdots\cdots①$$

となり，

$$\sim\sim=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)$$

$$+\cdots+\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right)+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{2n+1}$$

です．これは，$n\to\infty$ で収束するので，①も収束して，

$$①=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

⇨注 無限級数では，**一つ一つが0に収束しても，それらの和を無限に足した結果も0に収束するとは言えません**．例えば，n 個の $\dfrac{1}{n}$ の和 …（＊）の場合，

$$\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{n\text{ 個}} \xrightarrow{n\to\infty} 0+0+\cdots+0=0$$

は成り立たず，$(*)=n\cdot\dfrac{1}{n}=1$ から，極限値は1です．

（**2**） 等比数列の無限級数（**無限等比級数**）では，次の公式を利用できます．

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{ar^{n-1}}$ **は，「$\boldsymbol{a=0}$ または $\boldsymbol{|r|<1}$」**

のときのみ収束して，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{ar^{n-1}=\frac{a}{1-r}}$

本問では，求める公比を r とすると，

$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2}r$，$\dfrac{1}{2}r^2$，$\dfrac{1}{2}r^3$，…（初項 $\dfrac{1}{2}$，公比 r）

の無限等比級数の和が求まるので，$|r|<1$ ……（＊）

また，その和は $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-r}$ ……………………②

この数列の各項を2乗した数列について，

$\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{1}{4}r^2$，$\dfrac{1}{4}(r^2)^2$，$\dfrac{1}{4}(r^2)^3$，…（初項 $\dfrac{1}{4}$，公比 r^2）

の無限等比級数の和が，$\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{1-r^2}$ ………………③

②＝③ より，

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-r}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-r^2} \quad \therefore\ 2(1-r^2)=(1-r)$$

（＊）から，$2(r+1)=1 \quad \therefore\ r=-\mathbf{\dfrac{1}{2}}$

演習1 セット1

極限

▶テーマは「極限」ですが，区分求積法は「積分法（計算問題）」で扱います．◀

1．分数式の極限

（1） 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^4}{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}$ を求めよ．

（藤田保健衛生大・医）

（2） $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{\log_2(64x^2-6x+9)-\log_4(x^4+x^2+6)\}$

$=\boxed{}$ （国士舘大・理工）

（3） $\displaystyle\lim_{x\to 1-0}\frac{x^3-1}{|x-1|}$ を求めよ． （東京都市大・工）

2．$\sqrt{}$ の極限

（1） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{(n+1)(n+3)}-\sqrt{n(n+2)})$ を求めよ．

（福島大・人間発達文化）

（2） $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(4x+3+\sqrt{16x^2+9})=\boxed{}$ である．

（聖マリアンナ医大）

3．r^n の極限

（1） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{3^{n+1}+2^{n+1}}=\boxed{}$ （広島市立大－後）

（2） 無限数列 $\left\{\dfrac{x^n-5}{x^n+5}\right\}$ の収束・発散について，x の値を場合分けしたうえで調べなさい．

（前橋工科大）

4．三角関数の極限

（1） $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^2\sin\frac{1}{x^2}=\boxed{}$ （中部大）

（2） $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\boxed{}$ （国士舘大・理工）

（3） $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\tan 2x}-\sqrt{1+\tan 2x}}{x}$ を求めよ．

（奈良県医大）

（4） $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sqrt{4+x^2}-2}$ を求めよ． （電通大－後）

5．指数・対数関数の極限

（1） $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x+x-1}{\sin x}=\boxed{}$ （立教大・理）

（2） $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-\log(1-x)}{x}=\boxed{}$

（関大・理工系）

（3） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1+n^2}$ を求めよ． （小樽商大－後）

6．無限級数

（1） 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+4n-3}$ の和は $\boxed{}$ である．

（神奈川大・理，工）

（2） 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-2^n}{5^n}$ の和は $\boxed{}$ である．

（福岡大・理系）

（3） 初項 1，公比 $x(1-x)$ の無限等比級数が収束するための x のとりうる範囲は，$\boxed{}$ となる．

（類　自治医大・医）

7．やや応用的な問題

（1） $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x^2-\pi^2}=\boxed{}$ （神奈川大・理，工）

（2） $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{h}{\tan 2(x+h)-\tan 2x}=\boxed{}$

（北見工大）

（3） 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{a\sqrt{x}-4}{x-1}$ が有限な値となるような定数 a の値は $\boxed{}$ であり，そのときの極限値は $\boxed{}$ である． （関学・教，総政，理工）

（4） $f'(a)$が存在するとき，

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}=\boxed{}f'(a),$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a+h)}{h}=\boxed{}f'(a)$$

が成り立つ． （玉川大）

◎**問題の難易と目標時間**（記号については☞ p.2）

5 分もかからず解いて欲しい問題は無印です．

1…(1) A　(2) A○　(3) A　**2**…(1) A　(2) A○
3…(1) A　(2) A○
4…(1) A　(2) A　(3) A○　(4) A○
5…(1) A　(2) A　(3) A　**6**…(1) A○　(2) A　(3) A
7…(1) A○　(2) A○　(3) A○　(4) A○

解　説

1．$n\to\infty$のとき，$\dfrac{\infty}{\infty}$になるものは，分母・分子を同じもので割って，各項が定数や$\dfrac{1}{n}$など収束する形に直します．分母・分子がnの多項式の場合は，その最高次の項（例えば3次ならn^3）で割ります．

　なお，(1)(2)ともまず lim の中身を計算します．

(2)では，底を2にそろえ log を1つにまとめます．

(3)　$x\to1-0$のときは$x<1$なので絶対値が外れます．

解　(**1**)　$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

であるから，lim の中身をAとおくと，

$$A=\frac{n^4}{\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2}=4\cdot\frac{n^2}{(n+1)^2}\quad\left(\begin{array}{l}\text{分母・分子を}\\ n^2\text{で割って}\end{array}\right)$$

$$=4\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}\xrightarrow{n\to\infty}4\cdot\frac{1}{(1+0)^2}=\mathbf{4}$$

(**2**)　lim の中身をBとおくと，

$$B=\log_2(64x^2-6x+9)-\log_4(x^4+x^2+6)$$

$$=\log_2(64x^2-6x+9)-\frac{\log_2(x^4+x^2+6)}{\log_2 4}$$

$$=\frac{1}{2}\{2\log_2(64x^2-6x+9)-\log_2(x^4+x^2+6)\}$$

$$=\frac{1}{2}\log_2\frac{(64x^2-6x+9)^2}{x^4+x^2+6}\quad\left(\begin{array}{l}\text{分母・分子を}\\ x^4\text{で割って}\end{array}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\log_2\frac{\left(64-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}\right)^2}{1+\frac{1}{x^2}+\frac{6}{x^4}}\xrightarrow{x\to\infty}\frac{1}{2}\log_2 64^2$$

$$=\log_2 64=\log_2 2^6=\mathbf{6}$$

(**3**)　$x\to1-0$のとき，$x<1$であるから，このとき，

$$\frac{x^3-1}{|x-1|}=\frac{x^3-1}{-(x-1)}=-(x^2+x+1)$$

$$\xrightarrow{x\to1-0}-(1+1+1)=\mathbf{-3}$$

2．(1)　$\infty-\infty$になるものは，分母1の分数とみて，分子を有理化するのが定石です．

(2)　$x\to-\infty$のままでは符号ミスなどしやすいので，$x=-y$とおいて，$y\to\infty$に直しましょう（☞注）．

解　(**1**)　$A=(n+1)(n+3)$，$B=n(n+2)$とおくと，

$$\sqrt{(n+1)(n+3)}-\sqrt{n(n+2)}=\sqrt{A}-\sqrt{B}$$

$$=\frac{(\sqrt{A}-\sqrt{B})(\sqrt{A}+\sqrt{B})}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}=\frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$$

$$=\frac{(n+1)(n+3)-n(n+2)}{\sqrt{(n+1)(n+3)}+\sqrt{n(n+2)}}$$

$$=\frac{2n+3}{\sqrt{(n+1)(n+3)}+\sqrt{n(n+2)}}$$

（分母・分子をnで割って）

$$=\frac{2+\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{2}{1+1}=\mathbf{1}$$

(**2**)　$x=-y$とおくと，$x\to-\infty$のとき$y\to\infty$．

$$4x+3+\sqrt{16x^2+9}=\sqrt{16y^2+9}-(4y-3)$$

$$=\frac{\{\sqrt{16y^2+9}-(4y-3)\}\{\sqrt{16y^2+9}+(4y-3)\}}{\sqrt{16y^2+9}+(4y-3)}$$

$$=\frac{(16y^2+9)-(4y-3)^2}{\sqrt{16y^2+9}+(4y-3)}=\frac{24y}{\sqrt{16y^2+9}+(4y-3)}$$

$$=\frac{24}{\sqrt{16+\frac{9}{y^2}}+4-\frac{3}{y}}\xrightarrow{y\to\infty}\frac{24}{4+4}=\mathbf{3}$$

➩**注**　$\sqrt{16x^2+9}+4x+3$

$$=\frac{-24x}{\sqrt{16x^2+9}-4x-3}=\frac{-24}{\underline{\sqrt{16+\frac{9}{x^2}}}-4-\frac{3}{x}}\xrightarrow{x\to-\infty}-\infty$$

とするのは間違いです．$x<0$のときは，$\sqrt{x^2}=-x$なので，〰〰の前にマイナスがつきます．このやり方はミスしやすいので止めましょう．

3．$n\to\infty$のとき，r^nが収束するのは，

- $r=1$のとき，$r^n\to1$（$n\to\infty$）
- $-1<r<1$のとき，$r^n\to0$（$n\to\infty$）

の2つの場合だけです．

(1)　●^{n}について，|●|が一番大きい●^{n}で，分母・分子を割ります．

解　(**1**)（分母・分子を3^nで割って）

$$\frac{3^n-2^n}{3^{n+1}+2^{n+1}}=\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{3+2\left(\frac{2}{3}\right)^n}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1-0}{3+0}=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

(**2**)　・**$-1<x<1$のとき，**

$$\frac{x^n-5}{x^n+5}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{0-5}{0+5}=\mathbf{-1}\ \text{（収束）}$$

・**$x=1$のとき，**$\dfrac{x^n-5}{x^n+5}=\dfrac{1-5}{1+5}=\mathbf{-\dfrac{2}{3}}$（**収束**）

・**$x=-1$のとき，**$\dfrac{x^n-5}{x^n+5}=\dfrac{(-1)^n-5}{(-1)^n+5}$は，$n$が偶数のとき$-\dfrac{2}{3}$，$n$が奇数のとき$-\dfrac{3}{2}$となるので，**発散する．**

定理・公式など（精選集）

本書の問題を解いていく際，公式がうろ覚えで確認したい，というときのためなどに，定理や公式などを用意しました．網羅するのではなく，本書の問題を解く上で確認したくなる可能性の高いものなどに絞りました．各自，必要に応じて教科書などをご参照下さい．

§1．極限

☆　数列の極限

1　演算と極限

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が収束して，

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha,\ \lim_{n\to\infty} b_n=\beta$$

ならば，

$$\lim_{n\to\infty}(pa_n+qb_n)=p\alpha+q\beta \quad (p,\ q \text{ は定数})$$

$$\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\alpha\beta$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\alpha}{\beta} \quad (\text{ただし，}\beta\neq 0)$$

2　はさみうちの原理

つねに $a_n \leqq x_n \leqq b_n$ が成り立ち（$<$でも OK），

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha,\ \lim_{n\to\infty} b_n=\alpha$$

ならば，数列 $\{x_n\}$ も収束して

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\alpha$$

3　等比数列 $\{r^n\}$ の極限

数列 $\{r^n\}$ の極限は，

$r>1$ のとき，	∞ に発散
$r=1$ のとき，	1 に収束
$-1<r<1$ のとき，	0 に収束
$r=-1$ のとき，	± 1 を振動
$r<-1$ のとき，	$\pm\infty$ を振動

4　無限級数の和

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ において，部分和 $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ の作る数列 $\{S_n\}$ が S に収束するとき，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束するといい，S をこの無限級数の和という．このとき，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=S$ と表す．$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k=S\right)$

5　無限級数の収束性と $\{a_n\}$ の極限値

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば，$\lim_{n\to\infty} a_n=0$

［証明］　$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\beta$ とすると，

$$a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k-\sum_{k=1}^{n-1} a_k \to \beta-\beta=0\ (n\to\infty) \ /\!/$$

なお，上の定理の逆は成立しない．（反例は，$a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$．このとき，

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\to 0\ (n\to\infty)$$

であるが，

$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})=\sqrt{n}\to\infty\ (n\to\infty)$ である）

6　無限等比級数

無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ は，$a=0$ または $-1<r<1$ の場合に限り収束し，その和 S は

$a=0$ のとき $S=0$

$-1<r<1$ のとき $S=\dfrac{a}{1-r}$ $\left(=\dfrac{\text{初項}}{1-\text{公比}}\right)$

☆関数の極限

1　三角関数の極限

・$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

これから導かれる公式として，

・$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$

・$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

2　e に関する極限値

・$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

・$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$　　・$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

・$\displaystyle\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$

・$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h)}{h}=1$

・$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$

あとがき

数Ⅲの微積分では，例えば「次の定積分を求めよ」という，計算問題でも一筋縄ではいかないものが出てきます．いわゆる計算問題でも，十分に演習している必要があるのです．

そこで，本書では，入試問題を解く上で必須の計算練習などが行えるような問題を豊富に取り上げました．とくに積分計算では，他分野より多くのページ数を割きました．

また，基本事項のチェックと理解にふさわしい入試の基本レベルの問題を精選しました．

本書で足固めをして，「1対1シリーズ」にステップアップしてください．

（坪田）

▶本書の質問があれば，「東京出版・大数Q係」宛（住所は下記）にお寄せください．

原則として封書（宛名を書いた，切手付の返信用封筒を同封のこと）を使用し，**1通につき1件**でお送りください（電話番号，学年を明記して，できたら在学（出身）校・志望校も書いてください）．

なお，ただ漠然と‘この解説が分かりません’という質問では適切な回答ができませんので，‘この部分が分かりません’とか‘私はこう考えたがこれでよいのか’というように具体的にポイントをしぼって質問するようにしてください（以上の約束が守られていないものにはお答えできないことがありますので注意してください）．

大学への数学
数学ⅢCの入試基礎／講義と演習 増補版

令和 6 年1月30日　第1刷発行

編　者　　東京出版編集部
発行者　　黒 木 憲 太 郎
発行所　　**東　京　出　版**
〒150-0012　東京都渋谷区広尾3-12-7
電　話（03)-3407-3387
振　替　00160-7-5286
URL　https://www.tokyo-s.jp/

整版所　　錦美堂整版
印刷所　　光陽メディア
製本所　　技秀堂

ISBN　978-4-88742-278-0