まえがき

これからの数学で重要になるキーワードは？

「活用」である．

数学が，定量的なものから定性的なものに変わる，とも言えるかも知れない．厳密な論証による正しい数学が不要になるわけではないが，実用面では納得できる説明ができれば十分であることも多い．

本質的な数学理解に基づく定性的なアプローチ．

本書で最も重視している視点である．教科書に書かれた内容，特に定義の確認を丁寧に扱うようにしている．

「解法を定着させる」というこれまでの数学参考書・問題集とはまったく違う思想に基づいて本書は作られている．網羅的な勉強をするのには全く向かないから，他の参考書・問題集を使用していただきたい．「活用」をキーワードに，「難しくはないが答えにくい問題」を取り上げている．表面的な問題ではなく，数学を深く理解し，正しくイメージできていないと考えられない問題ばかりである．人によっては, すごく難しく (または，易しく) 感じるかも知れない．

正しいイメージとは何だろう．

数学を表現するのには「数式」「日本語」「図」という 3 つの形態がある．それらを自由に行き来しながら概念を正確にイメージでき，言語化できることが必要になる．また，一般的な解法のみに頼るのではなく，個別の問題に対して最適な解法を選択することも必要になる．問題の個性を感じ取り，必要な情報のみを抽出するのである．

問題と解答を１対１対応させるような「知識・技能」重視の数学教育は終わりを迎える．また，数学的厳密性を重視し過ぎて生徒を置き去りにすることも許されない．生きていくための「思考力・判断力・表現力」の育成を意識しなければならない．その流れは

【題意を明確化，論点を抽出】

↓

【議論に必要な情報収集】

↓

【正しい推論，論証】

である．「基本解法の中から使えるものを探す」というこれまでの数学とは頭の使い方が違う．道具頼りのこれまでの数学ではなく，工夫することが必要になるような数学である．ずる賢さも求められる．問題を型にはめるのではなく，問題に合う型を自ら作り出す．

新しい時代に向けて，そんな問題集を作りたい．

それが本シリーズに込めた思いである．

既存問題集にあるような問題は掲載していない．正しい知識があれば思考・判断・表現できるように問題を作っている．困ったときは，参考書よりは教科書を参照すると良いだろう．

各章は，基本概念の列挙，問題，解答解説からなる．問題は１人で考えても良いし, 仲間と一緒に考えても良い．解答解説を見る前に, あぁだこぉだと考えてもらいたい．解答解説に先立って問題を考えるためのヒントを挙げているものもあるので，そちらも参照しながら考えてもらいたい．そうして確認のために解答解説を読んでもらいたい．

「答えを見て丸暗記」という使い方はしないでもらいたい．「どうしてこんな風に考えるのか？」「自分はどうやったらこう考えられるか？」と自問自答してもらいたい．そのヒントとなるように，解説は思考部分を重視している．

数学を道具として，また現象として，正しくイメージできるようになってもらいたい．身に付けてもらいたいイメージについてもできるだけ詳しく解説する．特に数学 B，数学 C は理論が難しかったり，計算手法が複雑だったりで，知識・技能の習得で苦労するかも知れない．だからこそ，確固としたイメージを掴み，正しいかどうかを自分で「判断」できるようになってもらいたい．

これまでも本シリーズは“共通テスト対策”を謳ってはいないが，特に本書はそうである．これまではアンチ計算のタイトルであったが，今回は，敢えて計算も辞さない．必要に応じて，数学Ⅲの極限・微分・積分も使っていく．そうしないと見えない部分まで踏み込みたいからである．文系諸氏にとってはかなり高度な内容も含まれることをお伝えしておく．

高校生にとって新しい数学は，定期テストでさえ暗記で乗り切れないから，既存の感覚では苦しいものになるかも知れない．しかし，自分で考える自由度が増し，楽しさを感じることができるものになる．

勉強はつらい反復だけではなく，問題を自分で解決する楽しいものでもある．本書を通じてそれを感じてくれる人がいたら，この上ない喜びである．

数学を通じて「思考力・判断力・表現力」を磨いていこう！

吉田　信夫

目　次

1 数学BC－①：数列

数学 BC －①：「数列」で扱う概念は

□数列とその和

・等差数列　・等比数列　・和の記号Σ

・階差数列　・いろいろな数列の和

□数学的帰納法

・漸化式　・数学的帰納法

である.

数の並びの法則を扱うのが数列であるが，予想だけで済ますことができないのが高校数学での数列である．そのため，公式適用に終始したり，漸化式から一般項を求める種々の方法を暗記したり，パターン学習に陥りやすい.

本章では，「数の並び」に真剣に取り組むような問題を用意している．数列を体感していこう.

問題

問題 1-1

初項が a で公差が d の等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とおくと,

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

である. このように書かれていると, 例えば, 等差数列

$\{a_n\}:2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ \cdots\cdots$

の第 20 項から第 100 項までの和を求めるとなると……『初項が 2, 公差が 3 で, 求める和は $S_{100}-S_{19}$ であるから……』となる.

(1) $S_{100}-S_{19}$ を計算して, 和を求めよ.

(2) 以下の空欄を埋めよ.

しかし, 等差数列の和の公式は, 決まった数列 $\{a_n\}$ に使うものだと考える必要はない.

$a_{20},\ a_{21},\ \cdots\cdots,\ a_{100}$

という $\boxed{\ ①\ }$ 項からなる数列も, 等差数列である. こういうときにも使いやすくするには,「言葉」で公式を記述しておくことも考えられる.

$$(\text{等差数列の和})=\frac{(\text{項数})\times(\text{初項}+\text{末項})}{2}$$

このように捉えておくと,『a_{20} と a_{100} を足して, 項数の①をかけて, 2 で割る』となる. 一般項は,「x の係数が公差で, $x=1$ で 2 になる 1 次式 $Ax+B$ の x に n を代入した形だから, $a_n=\boxed{\ ②\ }n-\boxed{\ ③\ }$」と求めておくことで,

$a_{20}=\boxed{\ ④\ }$, $a_{100}=\boxed{\ ⑤\ }$

となって, 求める和は $\boxed{\ ⑥\ }$ と分かる.

問題 1-2

n を自然数とする．平方根の整数部分が n になるような自然数の総和を求めよ．

問題 1-3

初項が a で公比が r ($r \neq 1$) の等比数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とおくと，

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

である．この公式を暗記するときは，分子の指数が n であることに注意しながら覚えるはずである．n になる理由は導出方法を見れば分かる：

$$\begin{array}{rrl} & S_n = & a + ar + ar^2 + \cdots\cdots + ar^{n-1} \\ -) & rS_n = & \phantom{a+{}} ar + ar^2 + \cdots\cdots + ar^{n-1} + ar^n \\ \hline & (1-r)S_n = & a \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - ar^n \end{array}$$

これを見ると，公式を次のように捉えることも有効だと分かる：

$$(\text{等比数列の和}) = \frac{(\text{初項}) - (\text{末項}) \times (\text{公比})}{1 - (\text{公比})}$$

項数が現れない形なのが使いやすい. これを利用して和を求めてみよう.

$$2+4+8+16+32+64+128+256+512+1024$$

を計算すると $\boxed{\quad ① \quad}$ である.

3 進法の小数で

$$0.1010101010101_{(3)}$$

と表される数を，10 進法の分数として表すと $\boxed{\quad ② \quad}$ である ($3^{\bullet}$ が残って良い).

$N = 2^4 \cdot 3^3$ の正の約数の総和は $\boxed{\quad ③ \quad}$ である.

$a_1 = 3$，$a_{n+1} = a_n + 2^n$ ($n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$) で定義される数列 $\{a_n\}$ の第 n 項 a_n を n の式で表すと $\boxed{\quad ④ \quad}$ である.

解答・解説

問題 1-1

初項が a で公差が d の等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とおくと,

$$S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = \frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

である．このように書かれていると，例えば，等差数列

$\{a_n\}: 2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ \cdots\cdots$

の第 20 項から第 100 項までの和を求めるとなると……『初項が 2，公差が 3 で，求める和は $S_{100}-S_{19}$ であるから……』となる．

(1) $S_{100}-S_{19}$ を計算して，和を求めよ．

(2) 以下の空欄を埋めよ．

しかし，等差数列の和の公式は，決まった数列 $\{a_n\}$ に使うものだと考える必要はない．

$a_{20},\ a_{21},\ \cdots\cdots,\ a_{100}$

という $\boxed{\ ①\ }$ 項からなる数列も，等差数列である．こういうときにも使いやすくするには,「言葉」で公式を記述しておくことも考えられる．

$$(\text{等差数列の和}) = \frac{(\text{項数})\times(\text{初項}+\text{末項})}{2}$$

このように捉えておくと,『a_{20} と a_{100} を足して，項数の①をかけて，2 で割る』となる．一般項は,「x の係数が公差で，$x=1$ で 2 になる 1 次式 $Ax+B$ の x に n を代入した形だから，$a_n = \boxed{\ ②\ }\,n - \boxed{\ ③\ }$」と求めておくことで,

$a_{20} = \boxed{\ ④\ }$, $a_{100} = \boxed{\ ⑤\ }$

となって，求める和は $\boxed{\ ⑥\ }$ と分かる．

【ヒント】

公式の当てはめだけでなく，意味を考えて活用していこう．

この観点がなかった人は，改めて考えてみよう！

【解答・解説】

（1）
$$S_{100}-S_{19}=\frac{100(4+99\cdot 3)}{2}-\frac{19(4+18\cdot 3)}{2}$$
$$=15050-551=14499$$

（2）　$100-20+1=81$ で，81 項ある．

　a_n は 1 次式に n を代入した $An+B$ という形で表され，A は公差の 3 である．$a_1=2$ であるから

$$a_n=3n-1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

である．

$$a_{20}=59,\ a_{100}=299$$

であるから，和は

$$\frac{81(59+299)}{2}=81\cdot 179=14499$$

■

※　公式の原理を理解していれば当たり前の計算なのだが，公式の当てはめしかやっていないと目新しく感じるかもしれない．

　本章では，数列の普通の問題はできるだけ排除し，原理の理解を促すような問題を紹介していくようにする．

あとがき

これまでの数学とこれからの数学は大きく異なる．

数学が苦手な人にとって，基本知識の定着，繰り返し学習と，苦行でしかなかった数学の勉強．正しいイメージ付けを重視し，現象として定性的に数学を捉えられることが，これからの数学学習で重視されなければならない．これが数学嫌いを減らすチャンスになるかも知れない．

本シリーズは，そのことを伝える問題集として作成してきた．その最終段階である本書では，数学Ⅲのハードな計算をすることをいとわず，重量感のある問題もたくさん入れた．これまで通りの，頭を使わないと答えられないような引っかけ問題や，嫌がらせの要素も盛り込んだ．これらが数学概念の深い理解につながってくれるように祈っている．

何度も繰り返し解いて定着させるような問題集ではないが，嫌がらせ対応モードで数学に接する機会は少ないので，忘れたころに解き直してもらえるのは良いことだ．その際も，できるだけ記憶を頼りにせず，よく問題を読んで，慎重に判断し，正しく推論してもらいたい．

本書が新時代の高校数学の 1 つの基準となれば，筆者として嬉しく思う．

本書の作成にあたり，東京出版の飯島康之さん，坪田三千雄さんには企画から内容の吟味までお世話になりました．また，多くの問題は尊敬すべき数学仲間のみなさんのアイデアを元に作成させてもらいました．

これまで関わったすべての方々に感謝申し上げ，本書を捧げます．ありがとうございました．

著者紹介：

吉田　信夫（よしだ・のぶお）

1977 年　広島で生まれる
1999 年　大阪大学理学部数学科卒業
2001 年　大阪大学大学院理学研究科数学専攻修士課程修了
2001 年より研伸館にて，2022 年からはお茶の水ゼミナール (お茶ゼミ√+) にて，主に東大・京大・医学部などを志望する中高生への大学受験数学を担当する．研伸館では，灘校の生徒を多数指導してきた．
そのかたわら，「大学への数学」などの雑誌での執筆活動も精力的に行う．
著書『複素解析の神秘性』(現代数学社 2011),『ユークリッド原論を読み解く』(技術評論社 2014),『超有名進学校生の数学的発想力』(技術評論社 2018) など多数.

東京出版から刊行のこのシリーズは
ほぼ計算不要の　思考力・判断力・表現力トレーニング　数学 IA
ちょっと計算も必要な　思考力・判断力・表現力トレーニング　数学 II
できるだけ計算しない　思考力・判断力・表現力トレーニング　理系微積分
に続く 4 作目.

敢えて計算も辞さない

思考力・判断力・表現力トレーニング 数学BC

令和５年４月17日　第１刷発行

著　者　吉田　信夫
発行者　黒木憲太郎
発行所　株式会社 東京出版
〒150-0012 東京都渋谷区広尾3-12-7
電話：03-3407-3387　振替：00160-7-5286
https://www.tokyo-s.jp/

印刷所　株式会社 光陽メディア
製本所　株式会社 技秀堂
落丁・乱丁本がございましたら，送料弊社負担にてお取り替えいたします．

ISBN978-4-88742-274-2
（定価はカバーに表示してあります）