

はじめに

『1対1対応の演習』シリーズは、入試問題から基本的あるいは典型的だけど重要な意味を持っていて、得るところが大きいものを精選し、その問題を通して

入試の標準問題を確実に解ける力をつけてもらおうというねらいで作った本です。

さらに、難関校レベルの問題を解く際の足固めをするのに最適な本になることを目指しました。

そして、入試の標準問題を確実に解ける力が、問題を精選してできるだけ少ない題数（本書で取り上げた例題は44題です）で身につくように心がけ、そのレベルまで、

効率よく到達してもらうことを目標に編集しました。

以上のように、受験を意識した本書ですが、教科書にしたがった構成ですし、解説においては、高2生でも理解できるよう、分かりやすさを心がけました。学校で一つの単元を学習した後でなら、その単元について、本書で無理なく入試のレベルを知ることができるでしょう。

なお、教科書レベルから入試の基本レベルの橋渡しになる本として『**プレ**1対1対応の演習』シリーズがあります。また、数ⅠAⅡBを一通り学習した大学受験生を対象に、入試の基礎を要点と演習で身につけるための本として「入試数学の基礎徹底」（月刊「大学への数学」の増刊号として発行）があります。

問題のレベルについて、もう少し具体的に述べましょう。入試問題を10段階に分け、易しい方を1として、

1～5の問題……A（基本）

6～7の問題……B（標準）

8～9の問題……C（発展）

10の問題……D（難問）

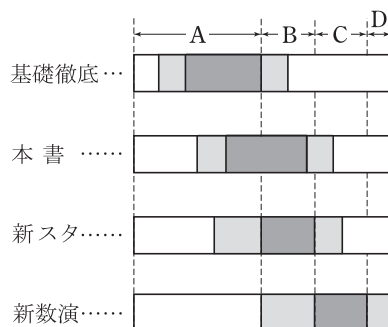
とランク分けします。この基準で本書と、本書の前後に位置する月刊「大学への数学」の増刊号

「入試数学の基礎徹底」（「基礎徹底」と略す）

「新数学スタンダード演習」（「新スタ」と略す）

「新数学演習」（「新数演」と略す）

のレベルを示すと、次のようになります。（濃い網目のレベルの問題を主に採用）



本書を活用して、数Bの入試への足固めをしていてください。

皆さんの目標達成に本書がお役に立てれば幸いです。

本書の構成と利用法

坪田三千雄

本書のタイトルにある‘1対1対応’の意味から説明しましょう。

まず例題(四角で囲ってある問題)によって、例題のテーマにおいて必要になる知識や手法を確認してもらいます。その上で、例題と同じテーマで1対1に対応した演習題によって、その知識、手法を問題で適用できる程に身についたかどうかを確認しつつ、一步一步前進してもらおうということです。この例題と演習題、さらに各分野の要点の整理(2ページ)などについて、以下、もう少し詳しく説明します。

要点の整理： その分野の問題を解くために必要な定義、用語、定理、必須事項などをコンパクトにまとめました。入試との小さくはないギャップを埋めるために、一部、教科書にない事柄についても述べていますが、ぜひとも覚えておきたい事柄のみに限定しました。

例題： 原則として、基本～標準の入試問題の中から

- ・これから出題される典型問題
- ・一度は解いておきたい必須問題
- ・幅広い応用がきく汎用問題
- ・合否への影響が大きい決定問題

の44題を精選しました(出典のないものは新作問題、あるいは入試問題を大幅に改題した問題)。そして、どのようなテーマかがはっきり分かるように、一題ごとにタイトルをつ

けました(大きなタイトル／細かなタイトルの形式です)。なお、問題のテーマを明確にするため原題を変えたものがありますが、特に断っていない場合もあります。

解答の前文として、そのページのテーマに関する重要手法や解法などをコンパクトにまとめました。前文を読むことで、一題の例題を通して得られる理解が鮮明になります。入試直前期にこの部分を一通り読み直すと、よい復習になるでしょう。

解答は、試験場で適用できる、ごく自然なものを採用し、計算は一部の単純計算を除いては、ほとんど省略せずに目で追える程度に詳しくしました。また解答の右側には、傍注(⇐ではじまる説明)で、解答の補足や、使った定理・公式等の説明を行いました。どの部分についての説明かはっきりさせるため、原則として、解答の該当部分にアンダーライン(——)を引きました(容易に分かるような場合は省略しました)。

演習題： 例題と同じテーマの問題を選びました。例題よりは少し難しい目ですが、例題の解答や解説、傍注等をじっくりと読みこなせば、解いていけるはずですが、最初はいかにいかに焦らずにじっくりと考えるようにしてください。また横の枠囲みをヒントにしてください。

そして、例題の解答や解説を頼りに解いた問題については、時間をお

いて、今度は演習題だけを解いてみるようにすれば、一層確実な力がつくでしょう。

演習題の解答： 解答の最初に各問題のランクなどを表の形で明記しました(ランク分けについては前ページを見てください)。その表にはA*、B*○というように*や○マークもつけてあります。これは、解答を完成するまでの受験生にとっての“目標時間”であって、*は1つにつき10分、○は5分です。たとえばB*○の問題は、標準問題であって、15分以内で解答して欲しいという意味です。高2生にとってはやや厳しいでしょう。

ミニ講座： 例題の前文で詳しく書き切れなかった重要手法や、やや発展的な問題に対する解法などを1～2ページで解説したものです。

コラム： その分野に関連する話題の紹介です。

本書で使う記号など： 上記で、問題の難易や目標時間で使う記号の説明をしました。それ以外では、⇐注は初心者のための、⇒注はすべての人のための、➡注は意欲的な人のための注意事項です。また、

∴ ゆえに

∴ なぜならば

1対1対応の演習

数学B 三訂版

目次

数列	石井 俊全	5
統計的な推測	飯島 康之	33
融合問題(数IAIIB)	坪田三千雄	55
●		
ミニ講座		
1 Σ の変数の置き換え		32
2 ペル方程式		86
3 チェビシェフの多項式		87
●		
特別講座		
期待値のテクニック		50

数列

要点の整理

1. 数列とは

1・1 定義

文字通り、数の列を数列といい、その各数を項という。数列を一般的には、

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots; \text{または } \{a_n\}$$

のように表す。第1項 a_1 を初項、一般の n に対して第 n 項 a_n を一般項という。

2. 等差数列

2・1 定義

$a_{n+1} = a_n + d$, $a_1 = a$ で定められる数列 $\{a_n\}$ を等差数列といい、 d をその公差という。初項 a 、公差 d の等差数列の一般項 a_n は、

$$a_n = a + (n-1)d$$

2・2 和の公式

初項から第 n 項までの和を S_n とすると、

$$S_n = \frac{\text{初項} + \text{末項}}{2} \times \text{項数} = \frac{a_1 + a_n}{2} \times n$$

3. 等比数列

3・1 定義

$a_{n+1} = ra_n$, $a_1 = a$ で定められる数列 $\{a_n\}$ を等比数列といい、 r をその公比という。

初項 a 、公比 r の等比数列の一般項 a_n は、

$$a_n = ar^{n-1}$$

3・2 和の公式

初項から第 n 項までの和を S_n とすると、

$$r \neq 1 \text{ のとき, } S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

$r=1$ のとき, $S_n = na$

4. 階差数列

4・1 定義

数列 $\{a_n\}$ があるとき、 $b_n = a_{n+1} - a_n$ として得られる数列 $\{b_n\}$ を $\{a_n\}$ の階差数列という。

この階差数列を用いると、 $\{a_n\}$ の一般項は、

$$a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_n - a_{n-1})$$

$$= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad (n \geq 2)$$

5. 和の公式と計算方法

5・1 累乗の和の公式

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$$

総和で、 k が 1 以外の数から始まる場合は、例えば

$$\begin{aligned} \sum_{k=10}^{20} k^2 &= \sum_{k=1}^{20} k^2 - \sum_{k=1}^9 k^2 \\ &= \frac{1}{6} \cdot 20 \cdot 21 \cdot 41 - \frac{1}{6} \cdot 9 \cdot 10 \cdot 19 = 2585 \end{aligned}$$

というように計算すればよい。

5・2 《 k の 1 次関数》 $\times r^k$ の和の計算

$S_n - rS_n$ を作ると、等比数列の和を求めることに帰着される。

5・3 差の形に分解

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \text{ は, } \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \text{ であること}$$

とを利用して、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

と計算するが、これと同様に、 a_n ($n=1, 2, \dots$) を、

$$a_n = f(n) - f(n-1) \text{ の形に分解する}$$

ことができれば（上の例では、 $f(n) = -\frac{1}{n+1}$ ）,

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \{f(k) - f(k-1)\} = f(n) - f(0)$$

と計算できる。

[例]

$$1^\circ \quad k(k+1) = \{ \underbrace{k(k+1)(k+2)} - (k-1)\underbrace{k(k+1)} \} \cdot \frac{1}{3}$$

を利用して,

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$$2^\circ \quad k(k+1)(k+2)$$

$$= \{ \underbrace{k(k+1)(k+2)(k+3)} - (k-1)\underbrace{k(k+1)(k+2)} \} \cdot \frac{1}{4}$$

を利用して,

$$\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

$$3^\circ \quad \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \left\{ \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right\} \cdot \frac{1}{2}$$

を利用して,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

$$4^\circ \quad k \cdot k! = (k+1)! - k! \text{ を利用して,}$$

$$\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1$$

$$5^\circ \quad \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \text{ を利用して,}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sqrt{n+1} - 1$$

$$6^\circ \quad \frac{2k}{k^4 + k^2 + 1} = \frac{1}{(k-1)^2 + (k-1) + 1} - \frac{1}{k^2 + k + 1}$$

を利用して,

$$\sum_{k=1}^n \frac{2k}{k^4 + k^2 + 1} = 1 - \frac{1}{n^2 + n + 1}$$

* * *

これらに見られるように, a_k と $f(k)$ は形が似ている.

5・4 和と一般項の関係

$$a_1 = S_1, \quad a_n = S_n - S_{n-1} \quad (n=2, 3, \dots)$$

($n \geq 2$ に注意. 形式的に $S_0 = 0$ とすれば, $n=1$ のときも含めて第2式だけでO.K.)

6. 漸化式

$$6 \cdot 1 \quad a_{n+1} = pa_n + q \quad (p, q \text{ は定数, } p \neq 1) \dots\dots\dots ①$$

$$① \text{ に対して, } \alpha = p\alpha + q \dots\dots\dots ② \text{ をみたす } \alpha = \frac{q}{1-p}$$

を考え, ①-②をつくると,

$$a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$$

これは, 数列 $\{a_n - \alpha\}$ ($a_1 - \alpha, a_2 - \alpha, \dots$ のこと.

以下同様) が公比 p の等比数列であることを示すから,

$$a_n - \alpha = p^{n-1}(a_1 - \alpha)$$

$$\therefore a_n = (a_1 - \alpha)p^{n-1} + \alpha$$

$$\therefore a_n = \left(a_1 - \frac{q}{1-p} \right) p^{n-1} + \frac{q}{1-p}$$

$$6 \cdot 2 \quad a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n \dots\dots\dots ③$$

a_{n+2}, a_{n+1}, a_n をそれぞれ $x^2, x, 1$ でおきかえた2次方程式 $x^2 = px + q$ の2解を α, β とおくと,

$\alpha + \beta = p, \alpha\beta = -q$ だから, ③は,

$$a_{n+2} = (\alpha + \beta)a_{n+1} - \alpha\beta a_n$$

となり, これは, 次のように2通りに変形できる.

$$\begin{cases} a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \\ a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \end{cases}$$

よって, 2つの数列 $\{a_{n+1} - \beta a_n\}, \{a_{n+1} - \alpha a_n\}$ はそれぞれ公比 α, β の等比数列だから,

$$\begin{cases} a_{n+1} - \beta a_n = \alpha^{n-1}(a_2 - \beta a_1) \dots\dots\dots ④ \\ a_{n+1} - \alpha a_n = \beta^{n-1}(a_2 - \alpha a_1) \dots\dots\dots ⑤ \end{cases}$$

$\alpha \neq \beta$ のとき, ④-⑤により,

$$a_n = \frac{1}{\alpha - \beta} \{ (a_2 - \beta a_1)\alpha^{n-1} - (a_2 - \alpha a_1)\beta^{n-1} \}$$

$\alpha = \beta$ のときは, ④は, $a_{n+1} - \alpha a_n = \alpha^{n-1}(a_2 - \alpha a_1)$

この漸化式は, $a_{n+1} = \alpha a_n + f(n)$

の形をしていて, 詳しくは p.16~17 の ○9, 10 で扱うが, 上の場合は, 両辺を α^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{\alpha^{n+1}} = \frac{a_n}{\alpha^n} + \frac{a_2 - \alpha a_1}{\alpha^2}$$

となり, $\frac{a_n}{\alpha^n} = b_n$ とおくと, $\{b_n\}$ は等差数列で, a_n が

求まる.

6・3 推定し, 数学的帰納法で証明

解法がすぐには思いつかないというときは, $a_1, a_2, a_3, \dots$ を具体的に求めて a_n を推定し, それが正しいことを数学的帰納法で証明する, という手段があることも忘れてはならない.

6・4 漸化式的应用

漸化式は, いつも一般項が求められるとは限らない. とくに証明問題では, 無理に一般項を出そうとするのではなく数学的帰納法を利用したり, 漸化式を漸化式のままで活用することが重要である.

1 等差数列の最大・最小

(ア) 等差数列 $a_1, a_2, a_3, \dots$ の第10項が37, 第20項が-33であるとき, 数列 $\{a_n\}$ の初項は $a_1 = \square$ であり, 項の値が負の数になる最初の項は第 $\square$ 項である. 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を最大にする n は $\square$ である. (東京都市大)

(イ) 初項が-35であり, 第7項から第13項までの和が7である等差数列の公差は $\square$ である. また, この数列の初項から第 n 項までの和を S_n とすると, $|S_n|$ が最小となるのは $n = \square$ であり, そのとき $|S_n| = \square$ である. (共立薬大)

等差数列の和 (等差数列の和) $= \frac{(\text{初項}) + (\text{末項})}{2} \times (\text{項数})$ で計算するのがオススメ.

S_n が最大となるとき $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$ なので, 図1のように $a_5 > 0$ のとき S_5 は S_4 より大きく, $a_6 < 0$ のとき S_6 は S_5 より小さくなる. $\{a_n\}$ が等差数列で, 初項が正, 公差が負であれば, a_n の符号が正から負に変わるところで, S_n が最大となる(図1). 数列のうち正の項ばかりを足せば, 和が最大になるのは当然. S_n の式を求めずとも, S_n が最大となる n を求めることができる.

図1

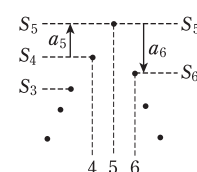
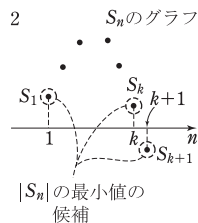


図2



$|S_n|$ の最小値の求め方 $|S_n|$ の最小値の候補は, S_n の符号が変わる前後と $|S_1|$ (図2).

解答

(ア) 初項を a , 公差を d とすると,

$$a_{10} = a + 9d = 37 \dots\dots ① \quad a_{20} = a + 19d = -33 \dots\dots ②$$

$$② - ① \text{ より, } 10d = -70 \quad \therefore d = -7. \quad ① \text{ より, } a_1 = a = 37 - 9d = \mathbf{100}$$

$$\text{一般項は, } a_n = 100 + (n-1) \cdot (-7) = 107 - 7n$$

$$a_n < 0 \text{ は, } 107 - 7n < 0 \quad \therefore 15.2 \dots < n$$

負になる最初の項は第16項であり, それ以降すべて負である. 第15項までは加えるごとに増加するので和を最大にする n は, $n = \mathbf{15}$ である.

(イ) 公差を d とすると, 第7項から第13項までの7項の和が7だから,

$$\frac{a_7 + a_{13}}{2} \cdot 7 = 7 \quad \therefore a_7 + a_{13} = 2 \quad \therefore (-35 + 6d) + (-35 + 12d) = 2$$

$$\therefore -70 + 18d = 2 \quad \therefore d = 4$$

$$\text{総和は, } S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{-35 + \{-35 + 4(n-1)\}}{2} \cdot n = n(2n - 37)$$

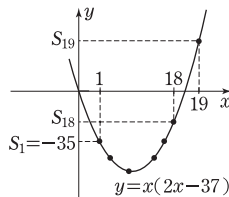
右図より, 最小値の候補は

$$|S_1| = |-35| = 35,$$

$$|S_{18}| = |18 \cdot (-1)| = 18$$

$$|S_{19}| = |19 \cdot 1| = 19$$

よって, $|S_n|$ は, $n = \mathbf{18}$ のとき, 最小値 $\mathbf{18}$ をとる.



初項 a , 公差 d の等差数列の第 n 項は, $a_n = a + (n-1)d$

$n \leq 15$ のとき $a_n > 0$

$n \geq 16$ のとき $a_n < 0$ なので,

$$\dots < S_{13} < S_{14} < S_{15} > S_{16} > S_{17} > \dots$$

1 演習題 (解答は p.24)

初項が50, 公差が整数である等差数列の初めの n 項の和を S_n で表すとき, $S_1, S_2, S_3,$

$\dots$ の中で最大なものが S_{17} である. このとき, この等差数列の公差 d , 一般項 a_n , $\sum_{k=1}^n S_k$

を求めよ.

(東海学園大)

$a_{17} > 0, a_{18} < 0$ となることと整数条件を用いる.

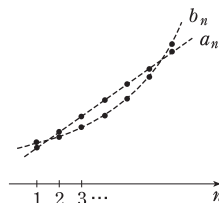
2 等比数列

(ア) a, b, c は相異なる実数で, $abc = -27$ を満たしている. さらに, a, b, c はこの順で等比数列であり, a, b, c の順序を適当に変えると等差数列になる. a, b, c を求めよ. (宮城教大)

(イ) 初項と第2項の和が135で, 第4項と第5項の和が40である等比数列 $\{a_n\}$ の公比は である. ただし各項は実数とする. また, 初項が84で, 初項から第5項までの和が290である等差数列 $\{b_n\}$ の公差は である. これら2つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ に関して, $a_n > b_n$ が成り立つ最小の n の値は である. (東京工科大・メディア)

3項が等差数列, 等比数列になる条件 a, b, c がこの順に等差数列であるとき $a+c=2b$, また, x, y, z がこの順に等比数列であるとき, $xz=y^2$ が成り立つ ($b-a=c-b$; $x:y=y:z$ より分かる).

等差数列・等比数列の大小 $\{a_n\}$ が等差数列, $\{b_n\}$ が等比数列 (公比は正) のとき, (n, a_n) は直線上, (n, b_n) は指数関数のグラフ (下に凸) 上に乗る. 等差数列, 等比数列の各項の大小はグラフを描くと様子がはっきり分かる. (右図のように, 2交点の間では, 等差 > 等比)



■ 解答 ■

(ア) a, b, c はこの順で等比数列だから, $ac = b^2$

これと $abc = -27$ より, $b^3 = -27 \therefore b = -3 \therefore ac = 9$

c を a で表して, $(a, b, c) = (a, -3, 9/a)$

以下, 等差数列の条件を考える. 中央項がどれになるかで場合分けする.

$$1^\circ -3 + \frac{9}{a} = 2a \quad 2^\circ a + \frac{9}{a} = 2 \cdot (-3) \quad 3^\circ a + (-3) = 2 \cdot \frac{9}{a}$$

$$1^\circ \text{ のとき, } 2a^2 + 3a - 9 = 0 \therefore (a+3)(2a-3) = 0$$

$$a \neq b \text{ より } a \neq -3 \text{ だから, } a = 3/2 \therefore c = 6$$

$$2^\circ \text{ のとき, } a^2 + 6a + 9 = 0 \therefore a = -3 \text{ これは } a = b \text{ に反する.}$$

$$3^\circ \text{ のとき, } a^2 - 3a - 18 = 0 \therefore (a+3)(a-6) = 0 \therefore a = 6$$

$$\text{以上から, } (a, b, c) = (3/2, -3, 6), (6, -3, 3/2)$$

(イ) $\{a_n\}$ の初項を a , 公比を r とおくと, $a_n = ar^{n-1}$

$$\left. \begin{aligned} a_1 + a_2 &= a + ar = a(1+r) = 135 \\ a_4 + a_5 &= ar^3 + ar^4 = ar^3(1+r) = 40 \end{aligned} \right\} \text{より, } r^3 = \frac{ar^3(1+r)}{a(1+r)} = \frac{40}{135} = \frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$\text{よって, } r = \frac{2}{3}, a = \frac{135}{1+r} = \frac{135}{5/3} = 81$$

$$\{b_n\} \text{ の公差を } d \text{ とおく. } b_1 \sim b_5 \text{ の和} = \frac{b_1 + b_5}{2} \cdot 5 = \frac{84 + (84 + 4d)}{2} \cdot 5 \text{ が } 290$$

$$\text{なので, } (84 + 2d) \cdot 5 = 290 \therefore 42 + d = 29 \therefore d = -13$$

$$a_n = 81 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}, b_n = 84 - 13(n-1)$$

と表より $a_n > b_n$ となる最小の n は 7.

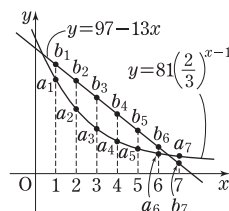
n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	81	54	36	24	16	$\frac{32}{3}$	$\frac{64}{9}$
b_n	84	71	58	45	32	19	6

⇨ 中央項が a, b, c で場合分け.

⇨ 1° は a が中央項で, $b+c=2a$ となる. 2° は b が中央項, 3° は c が中央項のとき.

⇨ $a=6$ のとき, $c=9/6=3/2$

[(イ)後半の方針] $a_n > b_n$ は解ける不等式ではない. 最小の n を求めたいので, $n=1, 2, \dots$ から順に調べていくのが早い. なお, 座標平面上に $(n, a_n), (n, b_n)$ をプロットすると下図のようになる.



2 演習題 (解答は p.24)

p, q を実数とし, $p < q$ とする. さらに, 3つの数 $4, p, q$ をある順に並べると等比数列となり, ある順に並べると等差数列となるとする. このとき p, q の組 (p, q) をすべて求めよ. (小樽商大)

公比が正か負かを考えよう.

数列 演習題の解答

1...B**	2...B***	3...B**
4...B**	5...B***	6...B***
7...B***	8...C***	9...B***B*B**
10...B***	11...B*B***	12...B***
13...B***	14...B***	15...B*
16...B***		

① S_{17} が最大である条件を a_n の符号の条件に言い換える. 公差 d は整数であることに注意.

解 $\{a_n\}$ は初項 50, 公差 d である. S_{17} が最大なので,
 $a_{17}=50+16d>0, a_{18}=50+17d<0$

$$\text{これを解いて, } -\frac{50}{16} < d < -\frac{50}{17}$$

d は整数なので, $d=-3$

$$\therefore a_n = 50 - 3(n-1) = -3n + 53$$

$$S_k = \frac{a_1 + a_k}{2} \cdot k = \frac{50 + (-3k + 53)}{2} \cdot k = \frac{103k - 3k^2}{2}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n S_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (103k - 3k^2)$$

$$= \frac{103}{2} \cdot \frac{1}{2} n(n+1) - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{1}{4} n(n+1) \{103 - (2n+1)\} = -\frac{1}{2} n(n+1)(n-51)$$

② 例題の前文のグラフを見ると, 等比数列の公比が正の場合は, 等差数列のグラフと等比数列のグラフは多くとも 2 点でしか交わらない. よって, 公比が正である場合はありえず, 公比は負である. 公比が負のとき, 3 項あるので少なくとも 1 つは負の項がある. $p < q$ なので, 小さい方の p は負である.

解 $p < q$ により, 等比数列の公比は 1 ではない.

初めに, 公比が負であることを背理法で示す.

4, p, q を並べ替えて得られる a, b, c がこの順に等比数列になるとする.

公比が 1 でない正の数とすると, a, b, c は同符号である. a, b, c のうちの 1 つは 4 であるから, これらは正である. $a < b < c$ か $a > b > c$ の順になるから, この順に等差数列でもある. よって,

$$a+c=2b, ac=b^2$$

$$\therefore b = \frac{a+c}{2} \geq \sqrt{ac} = b$$

等号が成立しているので, $a=c$ であるが, 公比が 1 でないので矛盾.

よって, 公比は負であり, 3 項あるので, 少なくとも 1 つの項は負である. $p < q$ より, p は負である.

次の 3 通りの場合が考えられる.

$$(ア) \quad p < 0 < q < 4$$

$$(イ) \quad p < 0 < 4 < q$$

$$(ウ) \quad p < q < 0 < 4$$

(ア) のとき, 等比数列 (正, 負, 正) の中央の項は p であり,

$$p+4=2q, p^2=4q \quad \therefore p^2=2(p+4)$$

$$\therefore p^2-2p-8=0 \quad \therefore (p-4)(p+2)=0$$

$$p < 0 \text{ より, } p=-2, q=1$$

(イ) のとき, 等比数列 (正, 負, 正) の中央の項は p であり,

$$p+q=2 \cdot 4, p^2=4q \quad \therefore p^2=4(8-p)$$

$$\therefore p^2+4p-32=0 \quad \therefore (p+8)(p-4)=0$$

$$p < 0 \text{ より, } p=-8, q=16$$

(ウ) のとき, 等比数列 (負, 正, 負) の中央の項は 4 であり,

$$p+4=2q, 4^2=pq \quad \therefore 16=(2q-4)q$$

$$\therefore q^2-2q-8=0 \quad \therefore (q+2)(q-4)=0$$

$$q < 0 \text{ より, } q=-2, p=-8$$

よって,

$$(p, q) = (-2, 1), (-8, 16), (-8, -2)$$

※注 上の解答では, 公比が負であることに着目して場合分けを減らした. これに気づかないときは,

$$(エ) \quad 4 < p < q$$

$$(オ) \quad 0 < p < 4 < q$$

$$(カ) \quad 0 < p < q < 4$$

の 3 つの場合をさらに調べればよい. (等比数列の条件から, $p \neq 0, q \neq 0$ である.)

③ U を求めるには, $U-rU$ を考える. 一般に,

$W = \sum_{k=1}^n \{(k \text{ の多項式}) \times r^k\}$ の形の和は, $W-rW$ を考えることで求められる. $r \neq 1$ より場合分け不要.

$$\text{解} \quad S = \sum_{k=1}^n r^{k-1} = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

T と rT の差を考えて,

$$T = 1 + 2r + 3r^2 + \cdots + nr^{n-1}$$

$$\begin{aligned} -) \quad rT &= r + 2r^2 + \cdots + (n-1)r^{n-1} + nr^n \\ (1-r)T &= 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} - nr^n \end{aligned}$$

ミニ講座・1 Σの変数の置き換え

Σ計算のときの変数について講義していきます。
総和の公式は、

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1), \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

とΣの中身の式が k を用いて書かれていることが多いでしょう。

$\sum_{k=1}^n k^2$ は、 k に1から n までを代入したものの和を取りなさい、という意味でした。 k に1から n までを代入したものを書き並べると、 $1^2, 2^2, \dots, n^2$ であり、

$\sum_{k=1}^n k^2$ の記号ではこれらの和を表していたわけです。

この場合、 k は代入するための文字ですから、他の文字でも構いません。例えば、公式は

$$\sum_{j=1}^n j = \frac{1}{2}n(n+1), \quad \sum_{l=1}^n l^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

と書くこともできます。いずれにしろ、右辺にはシグマを計算するときに変数として用いた文字は残っていませんね。

この認識の上で、次の問題を解いてみましょう。

問題1 $S = \sum_{k=1}^n k5^{k-1}$, $T = \sum_{k=1}^n k^25^{k-1}$ とおくとき、

$$\sum_{p=1}^n (p+1)^35^{p-1} - \sum_{q=1}^n q^35^{q-1} - \sum_{r=1}^n 5^{r-1}$$

を S , T を用いて表せ。 (東京工科大, 一部略)

与えられた式は、シグマの変数が p , q , r とバラバラです。Σの変数は何であってもよかったので、これを k にそろえましょう。

$$\begin{aligned} & \sum_{p=1}^n (p+1)^35^{p-1} - \sum_{q=1}^n q^35^{q-1} - \sum_{r=1}^n 5^{r-1} \\ &= \sum_{k=1}^n (k+1)^35^{k-1} - \sum_{k=1}^n k^35^{k-1} - \sum_{k=1}^n 5^{k-1} \dots\dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

ここでひと工夫してみましょう。Σ計算のときは、Σを分けて計算していくのが通常ですが、ここではΣをいったんまとめます。

$$\textcircled{1} = \sum_{k=1}^n \{(k+1)^35^{k-1} - k^35^{k-1} - 5^{k-1}\}$$

$$= \sum_{k=1}^n \{(k+1)^3 - k^3 - 1\}5^{k-1} = \sum_{k=1}^n (3k^2 + 3k)5^{k-1}$$

$$= 3 \sum_{k=1}^n k^25^{k-1} + 3 \sum_{k=1}^n k5^{k-1} = 3T + 3S$$

Σをひとつにまとめたところがうまかったですね。

$\sum_{k=1}^n (k+1)^35^{k-1}$ をそのまま計算しようとすると、

$\sum_{k=1}^n k^35^{k-1}$ が残り、 S と T だけでは書けなかったところ

です。文字を k に統一したことが功を奏した結果となりました。

上の問題は変数変換といっても、単なる文字の置き換えでした。次は、もう少し本格的な変数変換をしてみましょう。

問題2 $\sum_{k=2}^{10} (k-1)^2(2k-1)$ を計算せよ。

(p.11の別解の和)

k が2から始まっているところが口惜しいところです。
1から始まっていれば公式が使えるのに…。

Σ計算を具体的に書き下してみましょう。

$$\begin{aligned} & \sum_{k=2}^{10} (k-1)^2(2k-1) \\ &= 1^2 \cdot 3 + 2^2 \cdot 5 + 3^2 \cdot 7 + \dots + 9^2 \cdot 19 \dots\dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

こうしてみると2乗のところが1, 2, …, 9となっていますから、ここを変数とおくのが自然だと思われます。

$k-1=l$ とし、Σを書き直してみましょう。

$k=l+1$ ですから、Σの中身は l を用いて、

$(k-1)^2(2k-1) = (l+1-1)^2\{2(l+1)-1\} = l^2(2l+1)$ と表されます。これにつれて総和をとる範囲も変わってきます。

k が2~10のとき、 $l(=k-1)$ は1~9です。

よって、求める総和は、

$$\sum_{k=2}^{10} (k-1)^2(2k-1) = \sum_{l=1}^9 l^2(2l+1)$$

と l を用いて書き直すことができます。右辺を書き下すと②に等しくなることを、作業を通じて納得して欲しいと思います。以下答えは、

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^9 l^2(2l+1) = \sum_{l=1}^9 (2l^3 + l^2) \\ &= 2 \times \frac{1}{4} \cdot 9^2 \cdot 10^2 + \frac{1}{6} \cdot 9 \cdot 10 \cdot 19 = 4335 \end{aligned}$$

$(k-1)^2(2k-1)$ を展開した式よりも、 l で書いた式の方が項が少なく、この点でも得をしました。

変数の置き換えをしたら、あとは機械的にΣが書き直せるようになるとΣ計算も習熟していきます。

ミニ講座・2 ペル方程式

○16の例題では、

整数 a_n, b_n を $(3+2\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$
 $(n=1, 2, \dots)$ で定めると、 $(x, y) = (a_n, b_n)$ は
 $x^2 - 2y^2 = 1$ を満たす。

ということを示しました。

ここでは、この問題について少し掘り下げて考えてみます。なお、 $x^2 - 2y^2 = 1$ のような形の不定方程式はペル方程式と呼ばれています。

まず、 a_n と b_n を求めましょう。それには、例題の解答で作った漸化式

$$a_{n+1} = 3a_n + 4b_n, \quad b_{n+1} = 2a_n + 3b_n \quad \cdots \textcircled{1}$$

を解けばよいのですが、実はそんなことをしなくても一瞬で求めることができます。

$$a_n + b_n\sqrt{2} = (3+2\sqrt{2})^n \quad \cdots \textcircled{2}$$

の $\sqrt{2}$ を $-\sqrt{2}$ にかえた式

$$a_n - b_n\sqrt{2} = (3-2\sqrt{2})^n \quad \cdots \textcircled{3}$$

が成り立つので、[証明はあとで]

$$\frac{\textcircled{2}+\textcircled{3}}{2} \text{ より } a_n = \frac{1}{2} \{ (3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n \}$$

$$\frac{\textcircled{2}-\textcircled{3}}{2\sqrt{2}} \text{ より } b_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} \{ (3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n \}$$

です。入試では、「整数 a_n, b_n を②で定めるとき③が成り立つことを示せ」という問題が出ることがあります。感覚的には、上で述べたように「 $\sqrt{2}$ を $-\sqrt{2}$ にかえて」ですが、答えは（これではマズイので）帰納法による証明を書くのがよいでしょう。①を導いてから

$$a_k - b_k\sqrt{2} = (3-2\sqrt{2})^k \text{ を仮定し、①を用いて}$$

$$(3-2\sqrt{2})^{k+1} = (a_k - b_k\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})$$

$$= (3a_k + 4b_k) - (2a_k + 3b_k)\sqrt{2} = a_{k+1} - b_{k+1}\sqrt{2}$$

となります。

さて、②×③を計算してみると、

$$(a_n + b_n\sqrt{2})(a_n - b_n\sqrt{2}) = (3+2\sqrt{2})^n (3-2\sqrt{2})^n$$

$$\therefore a_n^2 - 2b_n^2 = \{ (3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2}) \}^n$$

$$\therefore a_n^2 - 2b_n^2 = 1 \quad n=1$$

となって、 $(x, y) = (a_n, b_n)$ が $x^2 - 2y^2 = 1$ を満たしていることが確かめられます。

最後に、 $x^2 - 2y^2 = 1$ の自然数解 x, y がここに出てきた $(x, y) = (a_n, b_n)$ に限られることを示してみましょう。

$(x, y) = (p, q)$ が $x^2 - 2y^2 = 1$ を満たす、すなわち $p^2 - 2q^2 = 1$ が成り立つとします。この (p, q) に対し、 (a_n, b_n) から (a_{n+1}, b_{n+1}) を作る操作と逆の操作を考え、整数 p', q' を

$$(p + q\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) = p' + q'\sqrt{2} \quad \cdots \cdots \star$$

で定めます。☆の各辺に $3+2\sqrt{2}$ をかけると

$$p + q\sqrt{2} = (p' + q'\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2}) \quad \cdots \cdots \star$$

となることから、「逆の操作」であることが理解できるでしょう。☆に戻って、左辺を計算すると

$$3p - 4q + (3q - 2p)\sqrt{2}$$

ですから、

$$p' = 3p - 4q, \quad q' = 3q - 2p$$

です。このとき、

$$\begin{aligned} (p')^2 - 2(q')^2 &= (3p - 4q)^2 - 2(3q - 2p)^2 \\ &= (9p^2 - 24pq + 16q^2) - 2(9q^2 - 12pq + 4p^2) \\ &= p^2 - 2q^2 = 1 \end{aligned}$$

となるので、 $(x, y) = (p', q')$ は $x^2 - 2y^2 = 1$ の解です。

さらに、 $p > 3, q > 2$ であれば

$$0 < p' = 3p - 4q < p \quad \cdots \textcircled{4}, \quad 0 < q' = 3q - 2p < q \quad \cdots \textcircled{5}$$

となります。これを示しましょう。

$p^2 - 2q^2 = 1$ の両辺を q^2 で割ると、

$$\frac{p^2}{q^2} - 2 = \frac{1}{q^2} \quad \therefore \left(\frac{p}{q} \right)^2 = 2 + \frac{1}{q^2}$$

$q > 2$ なので、

$$2 < \left(\frac{p}{q} \right)^2 < 2 + \frac{1}{4} \quad \therefore \frac{16}{9} < 2 < \left(\frac{p}{q} \right)^2 < \frac{9}{4}$$

従って、 $\frac{4}{3} < \frac{p}{q} < \frac{3}{2}$ すなわち

$$4q < 3p, \quad 2p < 3q \quad \cdots \cdots \textcircled{6}$$

です。これで④、⑤の左側 $0 < p', 0 < q'$ が示されました。

右側の不等式は、

$$3p - 4q < p \iff p < 2q, \quad 3q - 2p < q \iff q < p$$

なので、⑥より成り立ちます。

以上で、 $x^2 - 2y^2 = 1$ の自然数解 $(x, y) = (p, q)$ があると、 $p > 3, q > 2$ であれば、より小さい解

$$(x, y) = (p', q') = (3p - 4q, 3q - 2p)$$

が作れることがわかりました。これを繰り返す（つまりこの p', q' を改めて p, q とすると）、 p は減少する自然数の列ですから、必ず $0 < p \leq 3$ となります。

この範囲に $x^2 - 2y^2 = 1$ の解は $(x, y) = (3, 2)$ しかありませんから、★より、この不定方程式の解は

$$a_n, b_n \text{ を } a_n + b_n\sqrt{2} = (3+2\sqrt{2})^n \text{ を満たす整数}$$

$$\text{とすると、} (x, y) = (a_n, b_n)$$

に限られることが示されました。

あとがき

本書をはじめとする『1対1対応の演習』シリーズでは、スローガン風にいえば、

志望校へと続く

バイパスの整備された幹線道路を目指しました。この目標に対して一応の正解のようなものが出せたとは思っていますが、100点満点だと言いつける自信はありません。まだまだ改善の余地があるかもしれません。お気づきの点があれば、どしどしご質問・ご指摘をしてください。

本書の質問や「こんな別解を見つけたがどうだろう」というものがあれば、“東京出版・大学への数学・1対1係宛(住所は下記)”にお寄せください。

質問は原則として封書(宛名を書

いた、切手付の返信用封筒を同封のこと)を使用し、1通につき1件でお送りください(電話番号、学年を明記して、できたら在学(出身)校・志望校も書いてください)。

なお、ただ漠然と‘この解説が分かりません’という質問では適切な回答ができませんので、‘この部分が分かりません’とか‘私はこう考えたがこれでよいのか’というように具体的にポイントをしばって質問するようにしてください(以上の約束を守られないものにはお答えできないことがありますので注意してください)。

毎月の「大学への数学」や増刊号と同様に、読者のみなさんのご意見を反映させることによって、100点満点の内容になるよう充実させていきたいと思っています。

(坪田)

大学への数学

1対1対応の演習／数学B [三訂版]

令和5年3月29日 第1刷発行

編者 東京出版編集部

発行者 黒木憲太郎

発行所 株式会社 東京出版

〒150-0012 東京都渋谷区広尾 3-12-7

電話 03-3407-3387 振替 00160-7-5286

<https://www.tokyo-s.jp/>

製版所 日本フィニッシュ

印刷所 光陽メディア

製本所 技秀堂

©Tokyo shuppan 2023 Printed in Japan

ISBN978-4-88742-273-5 (定価はカバーに表示してあります)