はじめに

『1対1対応の演習』シリーズは，入試問題から基本的あるいは典型的だけど重要な意味を持っていて，得るところが大きいものを精選し，その問題を通して

入試の標準問題を確実に解ける力

をつけてもらおうというねらいで作った本です．

さらに，難関校レベルの問題を解く際の足固めをするのに最適な本になることを目指しました．

そして，入試の標準問題を確実に解ける力が，問題を精選してできるだけ少ない題数（本書で取り上げた例題は 83 題です）で身につくように心がけ，そのレベルまで，

効率よく到達してもらうこと

を目標に編集しました．

以上のように，受験を意識した本書ですが，教科書にしたがった構成ですし，解説においては，高2生でも理解できるよう，分かりやすさを心がけました．学校で一つの単元を学習した後でなら，その単元について，本書で無理なく入試のレベルを知ることができるでしょう．

なお，教科書レベルから入試の基本レベルの橋渡しになる本として『プレ1対1対応の演習』シリーズがあります．また，数ⅠＡⅡＢを一通り学習した大学受験生を対象に，入試の基礎を要点と演習で身につけるための本として「入試数学の基礎徹底」（月刊「大学への数学」の増刊号として発行）があります．

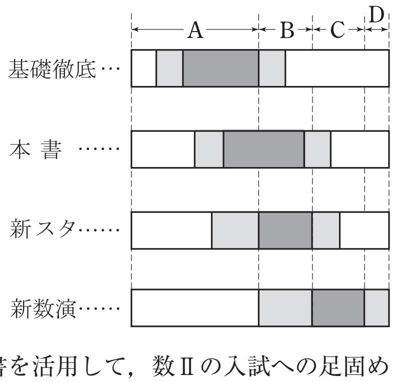
問題のレベルについて，もう少し具体的に述べましょう．入試問題を 10 段階に分け，易しい方を1として，

1～5 の問題……A（基本）
6～7 の問題……B（標準）
8～9 の問題……C（発展）
10 の問題………D（難問）

とランク分けします．この基準で本書と，本書の前後に位置する月刊「大学への数学」の増刊号

「入試数学の基礎徹底」（「基礎徹底」と略す）
「新数学スタンダード演習」（「新スタ」と略す）
「新数学演習」（「新数演」と略す）

のレベルを示すと，次のようになります．（濃い網目のレベルの問題を主に採用）



本書を活用して，数Ⅱの入試への足固めをしていってください．

皆さんの目標達成に本書がお役に立てれば幸いです．

本書の構成と利用法

坪田三千雄

本書のタイトルにある‘1対1対応’の意味から説明しましょう．

まず例題(四角で囲ってある問題)によって，例題のテーマにおいて必要になる知識や手法を確認してもらいます．その上で，例題と同じテーマで1対1に対応した演習題によって，その知識，手法を問題で適用できる程に身についたかどうかを確認しつつ，一歩一歩前進してもらおうということです．この例題と演習題，さらに各分野の要点の整理（4ページまたは2ページ）などについて，以下，もう少し詳しく説明します．

要点の整理：　その分野の問題を解くために必要な定義，用語，定理，必須事項などをコンパクトにまとめました．入試との小さくはないギャップを埋めるために，一部，教科書にない事柄についても述べていますが，ぜひとも覚えておきたい事柄のみに限定しました．

例題：　原則として，基本～標準の入試問題の中から

・これからも出題される典型問題
・一度は解いておきたい必須問題
・幅広い応用がきく汎用問題
・合否への影響が大きい決定問題

の83題を精選しました（出典のないものは新作問題，あるいは入試問題を大幅に改題した問題）．そして，どのようなテーマかがはっきり分かるように，一題ごとにタイトルをつけました（大きなタイトル／細かなタイトル の形式です）．なお，問題のテーマを明確にするため原題を変えたものがありますが，特に断っていない場合もあります．

解答の**前文**として，そのページのテーマに関する重要手法や解法などをコンパクトにまとめました．前文を読むことで，一題の例題を通して得られる理解が鮮明になります．入試直前期にこの部分を一通り読み直すと，よい復習になるでしょう．

解答は，試験場で適用できる，ごく自然なものを採用し，計算は一部の単純計算を除いては，ほとんど省略せずに目で追える程度に詳しくしました．また解答の右側には，傍注（⇦ではじまる説明）で，解答の補足や，使った定理・公式等の説明を行いました．どの部分についての説明かはっきりさせるため，原則として，解答の該当部分にアンダーライン（——）を引きました（容易に分かるような場合は省略しました）．

演習題：　例題と同じテーマの問題を選びました．例題よりは少し難し目ですが，例題の解答や解説，傍注等をじっくりと読みこなせば，解いていけるはずです．最初はうまくいかなくても，焦らずにじっくりと考えるようにしてください．また横の枠囲みをヒントにしてください．

そして，例題の解答や解説を頼りに解いた問題については，時間をおいて，今度は演習題だけを解いてみるようにすれば，一層確実な力がつくでしょう．

演習題の解答：　解答の最初に各問題のランクなどを表の形で明記しました（ランク分けについては前ページを見てください）．その表にはA*，B*○というように*や○マークもつけてあります．これは，解答を完成するまでの受験生にとっての“目標時間”であって，*は1つにつき10分，○は5分です．たとえばB*○の問題は，標準問題であって，15分以内で解答して欲しいという意味です．高2生にとってはやや厳しいでしょう．

ミニ講座：　例題の前文で詳しく書き切れなかった重要手法や，やや発展的な問題に対する解法などを1～2ページで解説したものです．

本書で使う記号など：　上記で，問題の難易や目標時間で使う記号の説明をしました．それ以外では，

⇨**注**は初心者のための，➡**注**はすべての人のための，➡**注**は意欲的な人のための注意事項です．また，

∴　ゆえに
∵　なぜならば

1対1対応の演習

数学Ⅱ 三訂版

目次

式と証明　坪田三千雄 …… 5
複素数と方程式　坪田三千雄 …… 33
指数・対数・三角関数　坪田三千雄 …… 51
座標　坪田三千雄 …… 77
微分法とその応用　石井　俊全 …… 111
積分法とその応用　飯島　康之 …… 133

ミニ講座
1　相加平均≧相乗平均 …… 31
2　なんにもならない不等式 …… 32
3　$(1+\sqrt{3}\,i)^n$ …… 50
4　正領域・負領域 …… 109
5　3次関数の性質 …… 130
6　多項式関数のグラフが接するとき …… 132
7　次数を決める …… 162
8　面積の公式 …… 163

式と証明
要点の整理

1. 二項定理

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

の展開公式の一般形が次の二項定理である．

1・1　二項定理

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}+{}_{\boldsymbol{n}}\mathbf{C}_{\mathbf{1}}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}\boldsymbol{b}+\cdots+{}_{\boldsymbol{n}}\mathbf{C}_{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}+\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}}$$

$$\left(=\sum_{k=0}^{n}{}_{n}\mathrm{C}_{k}a^{n-k}b^{k}\right)$$

⇨**注**　上式に $a=b=1$ を代入すると，次式を得る．

$${}_{n}\mathrm{C}_{0}+{}_{n}\mathrm{C}_{1}+{}_{n}\mathrm{C}_{2}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n-1}+{}_{n}\mathrm{C}_{n}=2^{n}$$

1・2　パスカルの三角形

二項定理により，

$(1+x)^n=1+{}_{n}\mathrm{C}_{1}x+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n-1}x^{n-1}+x^n$

となるが，その係数 ${}_{n}\mathrm{C}_{k}$ は，右図のように左右対称になっている（この図形をパスカルの三角形という）．

$$\begin{array}{ll}
n=1 & 1\quad 1\\
n=2 & 1\quad 2\quad 1\\
n=3 & 1\quad 3\quad 3\quad 1\\
n=4 & 1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1\\
n=5 & 1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1\\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

2. 多項式の除法

2・1　除法の一意性，商・余りの定義

多項式 $f(x)$，$g(x)$ が与えられたとき

$f(x)=g(x)Q(x)+R(x)$ ……………………Ⓐ

（$Q(x)$，$R(x)$ は多項式で，$R(x)$ は $g(x)$ よりも低次．なお，$g(x)$ は1次以上）

をみたす $Q(x)$，$R(x)$ がただ1組存在する．

この $Q(x)$，$R(x)$ をそれぞれ $f(x)$ を $g(x)$ で割ったときの**商**，**余り**（剰余）という．

なお，Ⓐを $f(x)\div\{kg(x)\}$ の形にすると，

$$f(x)=kg(x)\cdot\frac{Q(x)}{k}+R(x)$$

となるので，$f(x)$ を $kg(x)$ で割った商は，$f(x)$ を $g(x)$ で割った商の $\dfrac{1}{k}$ 倍だが，余りは同じである．

⇨**注**　「組立除法」については，☞p.36

2・2　剰余の定理・因数定理

$f(x)$ を1次式 $x-a$ で割った余りを R とおくと，

$f(x)=(x-a)Q(x)+R$

と表せる．上式から，$f(a)=R$ となるので，

［剰余の定理］

多項式 $\boldsymbol{f(x)}$ を $\boldsymbol{x-a}$ で割った余りは，$\boldsymbol{f(a)}$ である．

［因数定理］

$\boldsymbol{f(a)=0} \iff$ 多項式 $\boldsymbol{f(x)}$ は $\boldsymbol{x-a}$ を因数に持つ

2・3　$\boldsymbol{x+a}$ についての展開

例えば，

$$\begin{aligned}
x^3+x^2&=\{(x-1)+1\}^3+\{(x-1)+1\}^2\\
&=(x-1)^3+3(x-1)^2+3(x-1)+1\\
&\qquad+(x-1)^2+2(x-1)+1\\
&=(x-1)^3+4(x-1)^2+5(x-1)+2
\end{aligned}$$

というように変形することを，**$\boldsymbol{x-1}$ についての展開**という．このように展開すると，上の，x^3+x^2 を $(x-1)^2$ で割るとき，

商 $=(x-1)+4=x+3$，余り $=5(x-1)+2=5x-3$

などがすぐに分かる．

3. 分数式

$f(x)$，$g(x)$ が多項式で，$g(x)$ が1次以上のとき（定数でないとき），$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ の形の式を分数式という．

多項式と分数式を合わせて有理式という．

分数式の分子と分母を両者の共通因数で割ることを約分するという．

それ以上約分できない分数式を既約分数式という．

4. 恒等式

例えば，次の等式

$ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$ ………………①

が x にどのような値を代入しても成り立つとき，①を x についての恒等式という．①が x の恒等式になる条件は，

$a=a'$，$b=b'$，$c=c'$（係数比較）…………Ⓐ

であり，これはまた，

異なる3つの x の値に対して①が成り立つ …‥Ⓑ

ことと同値である（☞注）．

一般に，x の n 次式 $P(x)$，$Q(x)$ について，

$P(x)=Q(x)$ ……② が x の恒等式

となる条件は，次の$\boxed{1}$か$\boxed{2}$でとらえることができる．

$\boxed{1}$ ②の両辺で，同じ次数の項どうしの係数が一致

$\boxed{2}$ $n+1$ 個の異なる x の値に対して②が成立

➡注 Ⓑ $\Longrightarrow$ Ⓐは，背理法で示すことができる．もし $a\neq a'$ とすると，①は2次方程式の形であり，これを成り立たせる x の値は2つ以下しかないことになり矛盾する．よって $a=a'$ であり，次に $b\neq b'$ とすると同様に矛盾が導け，$b=b'$ となり，$c=c'$ となる．

5．式の値，等式・不等式の証明

5・1 等式の証明

P，Q を文字式として，等式 $P=Q$ を証明するときには，次の方法が基本的である．

（ i ） $P-Q=0$ を示す．

（ ii ） P を変形して Q に一致することを示す．

（iii） P と Q をそれぞれ変形して，同じ式を導く．

5・2 等式の条件式が与えられたとき

• 例えば，「$a+2b+3c=0$ ……① のとき，
$f(a,\ b,\ c)=a^3+8b^3+27c^3-18abc$ の値を求めよ」
というような問題では，①による $a=-2b-3c$ を用いて，求値式の $f(a,\ b,\ c)$ から a を消去して計算・整理するのが基本である（1文字消去の原則）．

• 条件式が $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ ……② の形（比例式）

の問題では，②の値$=k$ とおいて，$x=ak$，$y=bk$，$z=ck$ とし，これらを求値式や証明すべき式に代入して x，y，z を消去し，k の式にする．

5・3 対称性を生かす

5・2で書いたように，等式の条件式は1文字消去をして使うのが原則である．しかし，条件式や求値式，証明すべき式が対称式（☞本シリーズ「数Ⅰ」p.15）のように，含まれる文字に関して対称的な形をしているときは，式の対称性を崩さずに扱えれば計算量が少なくて済むのでそれに越したことはない．

5・4 不等式 $A>B$ の証明法

（ i ） $A-B>0$ を示す．

（ ii ） （下の5・5などの）有名不等式に帰着させる．

（iii） $A>C$ かつ $C>B$ をみたす C を見つける．

（iv） （$A-B$ の最小値）>0 を示す．

（ v ） $A\geqq 0$，$B\geqq 0$ のときには，$A>B$ を示すかわりに $A^2>B^2$ を示してもよい．

（vi） $A\leqq B$ を仮定して矛盾を導く（背理法）．

5・5 相加平均・相乗平均の関係

$$\boldsymbol{a>0,\ b>0}\ \text{のとき，}\ \boldsymbol{\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}}$$

（等号成立は，$a=b$ のとき）

➡注 一般に，a_1～a_n が正の数のとき，

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

（等号成立は，$a_1=a_2=\cdots=a_n$ のとき）

［証明については，☞p.31］

5・6 コーシー・シュワルツの不等式

$$\boldsymbol{(a^2+b^2)(p^2+q^2)\geqq(ap+bq)^2}$$

（等号成立は，$a:b=p:q$ のとき）

$$\boldsymbol{(a^2+b^2+c^2)(p^2+q^2+r^2)\geqq(ap+bq+cr)^2}$$

（等号成立は，$a:b:c=p:q:r$ のとき）

などをコーシー・シュワルツの不等式という．

➡注 任意の $2n$ 個の実数 a_1，a_2，…，a_n，x_1，x_2，…x_n について，次の不等式（コーシー・シュワルツの不等式）が成り立つ．

$$(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2)(x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2)$$
$$\geqq(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)^2$$

［証明については，p.23の前文と同様にしてできる］

5・7 絶対値記号と三角不等式

実数 x，y の絶対値について，次の事実が成り立つ．

（ i ） $|x|=x \iff x\geqq 0$

$|x|>x \iff x<0$

（ ii ） $|x|^2=x^2$

（iii） $|xy|=|x||y|$

（iv） $|x+y|=|x|+|y|$

$\iff$ x，y が0も含めて同符号．

（ v ） $|x+y|<|x|+|y| \iff x$，y が異符号．

x，y について $xy\geqq 0$ か $xy<0$ が成り立つので，

（vi） つねに $|x+y|\leqq|x|+|y|$

（等号成立は，x，y が0も含めて同符号のとき）

とくに(vi)には三角不等式という名前がついている．

1 二項定理／係数を求める

（ア）$(2x+y)^8$ の展開式における x^2y^6 の係数と，xy^7 の係数を求めよ．（大阪経大／推薦）

（イ）$(a+b+c)^{10}$ の展開式における $a^3b^3c^4$ の係数は $\boxed{（1）}$ であり，$(x^3-x^2+1)^{10}$ の展開式における x^{15} の係数は $\boxed{（2）}$ である．（福岡大）

展開 $(a+b)^3$ の展開では，右図のように，各（　）から a か b を選んで掛け合わせる．例えば，3 個の（　）の 1 つから a を，残り 2 つから b を選ぶと ab^2 が得られ，その選び方は ${}_3\mathrm{C}_1$ 通りあるので，ab^2 の係数は ${}_3\mathrm{C}_1$ となる．同様に考えて，

$(a+b)(a+b)(a+b)$

$$(a+b)^n=a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_ka^{n-k}b^k+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}ab^{n-1}+b^n$$

となる．これを二項定理という．

三項の場合 $(a+b)^n$ でなく，$(a+b+c)^n$ になっても，各（　）から，a か b か c を選んで掛け合わせるという考え方が応用できる．なお，$\{(a+b)+c\}^n$ や $\{a+(b+c)\}^n$ と見て二項定理に結びつけることもできるが，最初に述べた方法のほうがよいだろう．

解 答

（ア）二項定理により，$(2x+y)^8=\{(2x)+y\}^8$ の x^2y^6 の項と xy^7 の項は，それぞれ ${}_8\mathrm{C}_2(2x)^2y^6$ と ${}_8\mathrm{C}_1(2x)y^7$ である．したがって，

x^2y^6 の係数は，${}_8\mathrm{C}_2\cdot 2^2=28\cdot 4=\mathbf{112}$

xy^7 の係数は，${}_8\mathrm{C}_1\cdot 2=8\cdot 2=\mathbf{16}$

（イ）（1）$(a+b+c)^{10}=\underbrace{(a+b+c)(a+b+c)\cdots\cdots(a+b+c)}_{10\text{ 個の（　）}}$ ……………①

を展開する．10 個の（　）のうち，3 個から a を，残り 7 個の（　）のうち 3 個から b を選び，さらに残った 4 個の（　）からは c を選ぶと $a^3b^3c^4$ が得られる．その選び方は，${}_{10}\mathrm{C}_3\times{}_7\mathrm{C}_3=120\times 35=4200$

よって，$a^3b^3c^4$ の係数は **4200** ……………②

⇦（1）の別解：
$(a+b+c)^{10}$ の $a^3b^3c^4$ の項は，$\{a+(b+c)\}^{10}$ を二項展開した
${}_{10}\mathrm{C}_3a^3(b+c)^7$
の項から出てくる．
$(b+c)^7$ の b^3c^4 の係数は ${}_7\mathrm{C}_3$ であるから，$a^3b^3c^4$ の係数は
${}_{10}\mathrm{C}_3\cdot{}_7\mathrm{C}_3=4200$

（2）$a=x^3$，$b=-x^2$，$c=1$ とおく．$(a+b+c)^{10}=(x^3-x^2+1)^{10}$ の展開で，x^{15} の項は，次の 1°～3° によって得られる．

1°　$a^5b^0c^5(=x^{15})$　　2°　$a^3b^3c^4(=-x^{15})$　　3°　$a^1b^6c^3(=x^{15})$

⇦ $a(=x^3)$ の個数で場合分け．x^{15} になるには，
$b(=-x^2)$，$c(=1)$
に注意すると，a は奇数でなければならない．

①の展開において，

1° の係数は，（1）と同様に考えて，${}_{10}\mathrm{C}_5\times{}_5\mathrm{C}_0=252$

2° の係数は，②により，4200

3° の係数は，（1）と同様に考えて，${}_{10}\mathrm{C}_1\times{}_9\mathrm{C}_6={}_{10}\mathrm{C}_1\times{}_9\mathrm{C}_3=10\cdot 84=840$

したがって，x^{15} の係数は，$252-4200+840=\mathbf{-3108}$

1 演習題（解答は p.24）

（ア）$\left(2x+\dfrac{1}{x^2}\right)^6$ の展開式における定数項を求めよ．（東京経済大）

（イ）$(x-5y+8z)^5$ を展開したときの x^3yz の係数を求めよ．（広島修道大）

（ウ）$(1+x+x^2)^{10}$ の x^{16} の係数を求めよ．（上智大・理工）

（エ）$\left(x-\dfrac{2}{x}+2\right)^9$ を展開したとき，全ての係数の総和を求めよ．（中部大／一部省略）

（エ）
$(1+x)^n$
$={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n$
から
${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n$
を求めるのと同様．

2 多項式の割り算／割り算の実行

a は実数とする．x に関する整式 $x^5+2x^4+ax^3+3x^2+3x+2$ を整式 x^3+x^2+x+1 で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $R(x)$ とする．$R(x)$ の x の1次の項の係数が1のとき，a の値を定め，さらに $Q(x)$ と $R(x)$ を求めよ．　　（京都大・文系）

実際に割り算することが基本　多項式の割り算についての問題を解く際に最も基本的な解法は，実際に割ってみるということである．割られる式と割る式とが具体的に与えられていて，かつ，割られる式の次数がそれほど高くない場合には，巧妙な解法を見つけようとしてあれこれ悩むよりも，さっさと割り算を実行してしまうほうが，実戦的といえる．

割り算の実行は，係数だけを書いて計算する　例えば，x の多項式 $a^2x^3+a^2x^2+ax^3+1$……① を x^2+x+2 で割る場合を考えよう．x 以外の文字は数として扱うので，次数が同じ項でまとめると，①は $(a^2+a)x^3+a^2x^2+1$ となる．割り算をするときに x^3 の係数 $\boxed{a^2+a}$ が一度に消えるようにかたまりで扱う．また，抜けている次数の項に注意する．①では1次の項が抜けているが，これは x の係数が0ということである．左下のように行うよりも，右下のように係数だけを書いて計算する方が省エネである．

$$
\begin{array}{r|l}
 & (a^2+a)x \quad -a \\ \hline
x^2+x+2 & (a^2+a)x^3 + a^2x^2 \qquad\qquad\qquad +1 \\
 & (a^2+a)x^3+(a^2+a)x^2+2(a^2+a)x \\ \hline
 & \qquad -ax^2 \quad -2(a^2+a)x \quad +1 \\
 & \qquad -ax^2 \qquad\quad -ax \quad -2a \\ \hline
 & \qquad\qquad -(2a^2+a)x+2a+1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|cccc}
 & (a^2+a) & -a & & \\ \hline
1\ 1\ 2 & a^2+a & a^2 & 0 & 1 \\
 & a^2+a & a^2+a & 2(a^2+a) & \\ \hline
 & & -a & -2(a^2+a) & 1 \\
 & & -a & -a & -2a \\ \hline
 & & & -2a^2-a & 2a+1
\end{array}
$$

解 答

実際に係数を書いて割り算を実行すると，次のようになる．

$$
\begin{array}{r|cccccc}
 & 1 & 1 & a-2 & & & \\ \hline
1\ 1\ 1\ 1 & 1 & 2 & a & 3 & 3 & 2 \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\ \hline
 & & 1 & a-1 & 2 & 3 & \\
 & & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ \hline
 & & & a-2 & 1 & 2 & 2 \\
 & & & a-2 & a-2 & a-2 & a-2 \\ \hline
 & & & & 3-a & 4-a & 4-a
\end{array}
$$

⇦係数が混ざらないように.（あらかじめ係数の間隔を広めに書いておく.）

したがって，

$$R(x)=(3-a)x^2+(4-a)x+4-a$$

$R(x)$ の x の1次の項の係数が1であるから，$a=3$．したがって，

$$\boldsymbol{Q(x)=x^2+x+1,\ R(x)=x+1}$$

2 演習題（解答は p.24）

a，b を実数とする．整式 $f(x)$ と整式 $g(x)$ をそれぞれ $f(x)=x^4+ax^2-2x+3$，$g(x)=x^2+x+b$ と定める．$f(x)$ が $g(x)$ で割り切れるような実数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ．　　（琉球大・国際，教，農）

例題と同時に，実際に割り算を実行する．

式と証明
演習題の解答

1…A○A*B**B*	**2**…A*	**3**…A*B*
4…B*○B*○	**5**…B*○	**6**…B*B***
7…A*B*○	**8**…A○A*	**9**…B**○
10…B**	**11**…A*	**12**…B**
13…B**	**14**…A**B*○	**15**…B*B***
16…B**B*		

1　(ウ)　例題(イ)(２)と同様に，まず x^2，x，1 を何個掛ければ x^{16} の項になるかを考える．(ア)も同様．
(エ)　例えば，x^2+2x+3 の係数の総和は $x=1$ を代入したもの．本問も同様に処理できる．

解　(ア)　$\left(2x+\dfrac{1}{x^2}\right)^6=\underbrace{\left(2x+\dfrac{1}{x^2}\right)\cdots\cdots\left(2x+\dfrac{1}{x^2}\right)}_{6\text{個の}(\quad)}$

を展開する．6 個の(　)のうち k 個から $2x$ を，残り $6-k$ 個の(　)からは $\dfrac{1}{x^2}$ を選ぶと

$$(2x)^k\left(\frac{1}{x^2}\right)^{6-k}=2^kx^{3k-12}\ \cdots\cdots\cdots\cdots①$$

が得られ，その選び方は，${}_6C_k$ 通り ……②　である．

①が定数となるのは，$3k-12=0$ により $k=4$ のときである．よって，求める定数項は，①，②により

$$2^4\cdot{}_6C_4=2^4\cdot{}_6C_2=16\cdot15=\mathbf{240}$$

(イ)　$(x-5y+8z)^5=\underbrace{(x-5y+8z)\cdots\cdots(x-5y+8z)}_{5\text{個の}(\quad)}$

を展開する．5 個の(　)のうち，1 個から $-5y$ を，残り 4 個の(　)のうち 1 個から $8z$ を選び，さらに残った 3 個の(　)からは x を選ぶと，$x^3(-5y)(8z)=-40x^3yz$ が得られる．

その選び方は，${}_5C_1\times{}_4C_1=20$

よって，求める係数は，$-40\times20=\mathbf{-800}$

(ウ)　$(1+x+x^2)^{10}=\underbrace{(1+x+x^2)\cdots\cdots\cdots(1+x+x^2)}_{10\text{個の}(\quad)}$

を展開する．この展開で x^{16} の項は，次の 1°～3° によって得られる．

1°　$(x^2)^8\cdot x^0\cdot1^2$　　2°　$(x^2)^7\cdot x^2\cdot1^1$　　3°　$(x^2)^6\cdot x^4\cdot1^0$

1°　10 個の(　)のうち，8 個から x^2 を，残り 2 個の(　)からは 1 を選ぶときで，その選び方は，

$${}_{10}C_8={}_{10}C_2=45$$

2°　10 個の(　)のうち，1 個から 1 を，残り 9 個の(　)のうち 2 個から x を選び，さらに残った 7 個の(　)から x^2 を選ぶときで，その選び方は

$${}_{10}C_1\times{}_9C_2=10\cdot36=360$$

3°　10 個の(　)のうち，4 個から x を，残り 6 個の(　)からは x^2 を選ぶときで，その選び方は

$${}_{10}C_4=210$$

したがって，x^{16} の係数は，

$$45+360+210=\mathbf{615}$$

(エ)　与式を展開して，

$$\left(x-\frac{2}{x}+2\right)^9=x^9+\cdots\cdots-\frac{2^9}{x^9}\ \cdots\cdots\cdots\cdots②$$

全ての係数の総和は，②の右辺で $x=1$ を代入したものであるから，その値は，左辺に $x=1$ を代入した値に等しく，

$$(1-2+2)^9=\mathbf{1}$$

2　実際に割って，余りが 0 となる条件を考えればよい．

解　x^4+ax^2-2x+3 を x^2+x+b で割ると，

$$\begin{array}{r|ccccc}
 & 1 & -1 & a-b+1 & & \\ \hline
1\ \ 1\ \ b & 1 & 0 & a & -2 & 3 \\
 & 1 & 1 & b & & \\ \hline
 & & -1 & a-b & -2 & \\
 & & -1 & -1 & -b & \\ \hline
 & & & a-b+1 & b-2 & 3 \\
 & & & a-b+1 & a-b+1 & b(a-b+1) \\ \hline
 & & & & 2b-a-3 & 3-b(a-b+1)
\end{array}$$

となるから，余りは，

$$(2b-a-3)x+3-b(a-b+1)$$

これが 0 のとき，

$$2b-a-3=0\ \cdots\cdots①,\ 3-b(a-b+1)=0\ \cdots\cdots②$$

①により，$a=2b-3$ ……①′ であり，②に代入して，

$$3-b(b-2)=0\qquad\therefore\ b^2-2b-3=0$$

$$\therefore\ (b+1)(b-3)=0\qquad\therefore\ b=-1,\ 3$$

これと①′から，

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=(\mathbf{-5},\ \mathbf{-1}),\ (\mathbf{3},\ \mathbf{3})$$

3　(イ)　x^3+1 で割ったときの商を設定して，余りの条件を立式する．x^3+1 は $x+1$，x^2-x+1 で割り切れることに着目する．

解　(ア)　商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とおくと，

$$x^n=(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b$$

ミニ講座・1
相加平均≧相乗平均

一般に，正の数について，「相加平均≧相乗平均」が成り立ちます．教科書に公式として載っているのは，2 数の場合で，

$a>0,\ b>0$ のとき，$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ ……………………①

（等号は $a=b$ のとき成り立つ）

です．3 数の場合は，

$a \sim c$ が正の数のとき，$\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$ …………②

（等号は $a=b=c$ のとき成り立つ）

であり，n 数の場合は，

$a_1 \sim a_n$ が正の数のとき，

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \quad \cdots\cdots③$$

（等号は $a_1=a_2=\cdots=a_n$ のときに成り立つ）

となります．

ここでは，これらの不等式の証明を考えてみましょう．

①は，(左辺)−(右辺)≧0 を示せばよく，

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqq 0$$

②もこの方針で示すことができます．3 乗根を回避するため，$\sqrt[3]{a}=A$，$\sqrt[3]{b}=B$，$\sqrt[3]{c}=C$ とおくと，②は

$$\frac{A^3+B^3+C^3}{3} \geqq ABC$$

となります．したがって，

$$A^3+B^3+C^3-3ABC \geqq 0 \quad \cdots\cdots④$$

を示せばよいです．ここで，

$$\begin{aligned}
&A^3+B^3+C^3-3ABC \\
&=(A+B+C)(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA) \\
&=(A+B+C) \\
&\qquad \times \frac{1}{2}\{(A-B)^2+(B-C)^2+(C-A)^2\} \\
&\geqq 0
\end{aligned}$$

ですから，④が成り立ちます．

等号は，$A=B$ かつ $B=C$ かつ $C=A$

のとき，つまり $A=B=C$ のときに成り立ちます．

このように，3 数の場合はやや難しいですが，4 数の場合は①からすぐ示せます．

①により，○，□を正の数とするとき，

$$\frac{○+□}{2} \geqq \sqrt{○\times□}, \quad ○+□ \geqq 2\sqrt{○\times□}$$

が成り立つので，$a \sim d$ が正の数のとき，

$$\begin{aligned}
\frac{a+b+c+d}{4} &\geqq \frac{2\sqrt{ab}+2\sqrt{cd}}{4}=\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \\
&\geqq \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}}=\sqrt[4]{abcd} \quad \cdots\cdots☆
\end{aligned}$$

（等号は，$a=b$ かつ $c=d$ かつ $\sqrt{ab}=\sqrt{cd}$，つまり $a=b=c=d$ のとき成り立つ）

が導かれます．

この 4 数の場合を使って 3 数の場合を導く手品のような(？)方法があるのです！

$d=\dfrac{a+b+c}{3}$（a，b，c の相加平均）

として，☆に代入すればうまくいくのです．

このとき，$a+b+c=3d$ ですから，

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqq \sqrt[4]{abcd}$$

は，$\dfrac{3d+d}{4} \geqq \sqrt[4]{abcd}$ 　　$\therefore\ d \geqq \sqrt[4]{abcd}$

$\therefore\ d^4 \geqq abcd$ 　　$\therefore\ d^3 \geqq abc$

$\therefore\ d \geqq \sqrt[3]{abc}$

$\therefore\ \dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$

この方法をまねることで，③が証明できます．

☆は 4 数の場合ですが，この個数を 2 倍にした 8 個の場合は，☆と①を使って証明できます．

同様にして，

$n=16,\ 32,\ 64,\ \cdots,\ 2^k,\ \cdots\cdots$

の場合を示すことができます（厳密には数学的帰納法によります）．

次に，一般に $n=N$ の場合が示されているとき，

$$a_N=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{N-1}}{N-1}$$

とおくと，$n=N-1$ の場合が示せます．例えば $n=13$ のときを示すには，まず $n=16$ のときを示して，

$n=16$ ⇨ $n=15$ ⇨ $n=14$ ⇨ $n=13$

と示されるわけです．

ミニ講座・2
なんにもならない不等式

相加・相乗平均は，最大・最小を求めるときも有効ですが，正しく理解していない人による安易な誤用が後を絶ちません．例えば，次のような誤答例 1，2 が昔から有名です．

> **例題**　x，y，z が正の数で，$x+y+z=1$ のとき，
> $\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}+\dfrac{9}{z}$ の最小値を求めよ．

［誤答例 1］　相加・相乗平均の関係より，

$$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z} \geqq 3\sqrt[3]{\frac{36}{xyz}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots Ⓐ$$

等号は，$\dfrac{1}{x}=\dfrac{4}{y}=\dfrac{9}{z} \iff x:y:z=1:4:9$

のとき成立する．よって，$x+y+z=1$ とから，

$x=\dfrac{1}{14}$，$y=\dfrac{4}{14}$，$z=\dfrac{9}{14}$ のとき与式は最小となり，

最小値は，$14+14+14=42$（？）

［誤答例 2］　$x>0$，$y>0$，$z>0$ であるから，

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z} \geqq 3\sqrt[3]{\frac{36}{xyz}} \\ &\text{かつ，}\quad x+y+z \geqq 3\sqrt[3]{xyz} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots Ⓑ$$

この 2 つの不等式を辺々かけて，$x+y+z=1$ とから，

$$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z} \geqq 9\sqrt[3]{36} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots Ⓒ$$

よって，求める最小値は，$9\sqrt[3]{36}$（？）

――なお，正解は次のようです．

解　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}+\dfrac{9}{z}=(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}+\dfrac{9}{z}\right)$

$=1+4+9+\left(\dfrac{4x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)+\left(\dfrac{9y}{z}+\dfrac{4z}{y}\right)+\left(\dfrac{z}{x}+\dfrac{9x}{z}\right)$

$\geqq 14+2\sqrt{\dfrac{4x}{y}\cdot\dfrac{y}{x}}+2\sqrt{\dfrac{9y}{z}\cdot\dfrac{4z}{y}}+2\sqrt{\dfrac{z}{x}\cdot\dfrac{9x}{z}}$

$=14+2\sqrt{4}+2\sqrt{36}+2\sqrt{9}=36$

等号は，$\dfrac{4x}{y}=\dfrac{y}{x}$，$\dfrac{9y}{z}=\dfrac{4z}{y}$，$\dfrac{z}{x}=\dfrac{9x}{z}$，すなわち

$x:y:z=1:2:3$ のとき成立する．よって，

$x+y+z=1$ とから，$x=\dfrac{1}{6}$，$y=\dfrac{1}{3}$，$z=\dfrac{1}{2}$ のとき等号が成立し，このとき与式は**最小値 36** をとる．

まず［誤答例 2］についていうと，この誤答のマズイところは，Ⓒで等号が成立する x，y，z が存在しないところにあります．等号成立のためには，Ⓑの 2 つの不等式で等号が同時に成立しなければなりませんが，それには

$x:y:z=1:4:9$　かつ　$x=y=z$

でなければなりません．しかし，これは不可能です．

つまり，不等式Ⓒは不等式としては間違いではないけれども，肝腎の「等号成立」が不可能なので，与式の最小値を求めるのには何の役にも立たないのです（なお，$9\sqrt[3]{36}$ は，正しい最小値 36 よりも小さい）．

次に［誤答例 1］の式Ⓐを見て下さい．この式は，

Ⓐの左辺はⒶの右辺より小さくない　…………Ⅰ

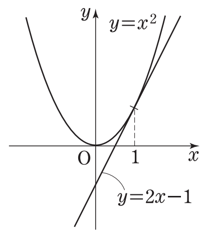
という意味の式で，この意味において正しい．また，

とくに，$x:y:z=1:4:9$ のとき

Ⓐの左辺と右辺とはその値が等しい　…………Ⅱ

ということも，それだけの意味においては，正しい．

［誤答例 1］の悪いところは，以上ⅠⅡという式Ⓐのもつ意味をありのままに眺めずに，勝手に拡大解釈して，「Ⓐの等号が成立するときに，Ⓐの左辺は最小になる」と，根拠なく決めつけているところです．



それはちょうど，

「実数 x について，つねに，

$x^2 \geqq 2x-1$　………Ⓓ

が成り立ち，等号成立は

$x=1$ のとき」

という事実から，

「実数 x について，x^2 が最小になるのは $x=1$ のときで，最小値は，$1^2=1$」と主張するようなもので，全くでたらめです．ⒶやⒹのように，右辺に変数が残っている式からは最小値は出ません．

［誤答例 2］の式Ⓒは，「与式の最小値$\geqq 9\sqrt[3]{36}$」ということを示す点では少しは意味内容がありますが，Ⓐの方はこの際，全くなんの役にも立たない不等式です．

有名不等式を利用して最小値が求まるのは，

（ⅰ）$f(x) \geqq m$（m は定数）

（ⅱ）$f(x)=m$ となる x が存在する

がともに成り立つようなときです．例えば，相加・相乗平均の関係を用いて，

「$x>0$ のとき，$x+\dfrac{1}{x} \geqq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}=2$．等号は

$x=1$ のときに成り立つから，―― の最小値は 2．」

と求めるのは正しい．上記（ⅰ）（ⅱ）の 2 つが同時に成立して，はじめて最小値が求まるのです．

あとがき

本書をはじめとする『1対1対応の演習』シリーズでは，スローガン風にいえば，

志望校へと続く

バイパスの整備された幹線道路

を目指しました．この目標に対して一応の正解のようなものが出せたとは思っていますが，100点満点だと言い切る自信はありません．まだまだ改善の余地があるかもしれません．お気づきの点があれば，どしどしご質問・ご指摘をしてください．

本書の質問や「こんな別解を見つけたがどうだろう」というものがあれば，“東京出版・大学への数学・1対1係宛（住所は下記）”にお寄せください．

質問は原則として封書（宛名を書いた，切手付の返信用封筒を同封のこと）を使用し，**1通につき1件**でお送りください（電話番号，学年を明記して，できたら在学（出身）校・志望校も書いてください）．

なお，ただ漠然と‘この解説が分かりません’という質問では適切な回答ができませんので，‘この部分が分かりません’とか‘私はこう考えたがこれでよいのか’というように具体的にポイントをしぼって質問するようにしてください（以上の約束を守られないものにはお答えできないことがありますので注意してください）．

毎月の「大学への数学」や増刊号と同様に，読者のみなさんのご意見を反映させることによって，100点満点の内容になるよう充実させていきたいと思っています．

（坪田）

大学への数学
1対1対応の演習／数学II［三訂版］
令和5年3月29日　第1刷発行

編　者　東京出版編集部
発行者　黒木憲太郎
発行所　株式会社　東京出版
〒150-0012　東京都渋谷区広尾 3-12-7
電話 03-3407-3387　振替 00160-7-5286
https://www.tokyo-s.jp/

製版所　日本フィニッシュ
印刷所　光陽メディア
製本所　技秀堂

ISBN978-4-88742-272-8 （定価はカバーに表示してあります）