はじめに

『1対1対応の演習』シリーズは，

　入試の標準問題を確実に解ける力

をつけてもらおうというねらいで作った本ですが，教科書とのギャップが少なからずあります．そこで，

　教科書レベルから入試の基本レベル
　の橋渡しになる本

として『$\boxed{\text{プレ}}$1対1対応の演習』シリーズを作りました．

『$\boxed{\text{プレ}}$1対1対応の演習』シリーズは，教科書の章末問題レベルを確実に解けるようになり，さらに入試の基本レベルへとステップアップしてもらおうというねらいで作った本です．

問題は，その分野を一通り理解するのに必要な是非とも解いておきたいものに絞り，できるかぎりコンパクトにまとめました．

第1部と第2部の2部構成で，第2部では入試の基本問題を扱いました．

原則として第1部において，教科書に載っている項目は一通り扱う方針で編集しました．扱っている問題は，教科書の章末問題に載っているような問題が中心です．そのような問題に対する詳しい解答を付けただけではありません．問題をどう解いていくか，そのアプローチの仕方にスポットを当てました．また，教科書をもっていることを前提として解説しています．定理をどう活用して問題を解いていくか，ということに主眼をおいているので，定理の証明は原則として載せていません．また，定義や用語の説明などは各分野について「公式など」でコンパクトに扱いましたが，公式の証明など省略したものもあるので，各自必要に応じて教科書を見てください．

本シリーズを終えた後は，『1対1対応の演習』シリーズに進むことで，無理なく入試のレベルを知ることができるでしょう．

本書を活用して実力アップに役立てて頂ければ幸いです．

本書の構成と利用法

坪田三千雄

本書のタイトルにある‘$\boxed{\text{プレ}}$1対1対応’の‘1対1対応’の意味から説明しましょう．

まず例題（四角で囲ってある問題）によって，例題のテーマにおいて必要になる知識や手法を確認してもらいます．その上で，例題と同じテーマで1対1に対応した演習題によって，その知識，手法を問題で適用できる程に身についたかどうかを確認しつつ，一歩一歩前進してもらおうということです．

本書は，第1部と第2部の2部構成になっています．

第1部：　各分野について，コンパクトに公式などをまとめたページを用意しました．次に，各分野を一通り理解する上で，まず当たっておきたい問題を精選しました．扱う問題のレベルは，教科書の本文中にあるような例題から章末問題レベル程度です．なお，分野によってはそもそも扱っているテーマが難しめのものがあり（教科書の内容がやや高度ということ），第1部としては難しめの問題が入っている場合もあります．私大，2次試験で頻出のテーマに関するものは，第2部に回したテーマもあります．

第2部：　第1部を踏まえて，主に入試の基本レベルの問題を選びました．是非とも当たっておきたい問題によって，入試の基本レベルまでステップアップすることを目標としましょう．

次に例題と演習題などについて説明しましょう．

入試問題を採用したときは大学名を明記しました．問題によっては空欄の形などを変えていますが，とくに断っていない場合もあります．

例題：　レベルについては上で述べました．第1部は70題，第2部は29題です．

どのようなテーマかがはっきり分かるように，一題ごとにタイトルをつけました（大きなタイトル／細かなタイトル の形式です）．

解答の**前文**として，そのページのテーマに関する重要手法や解法などをまとめました．前文を読むことで，一題の例題を通して得られる理解が鮮明になります．この前文が充実していることが本書の特長といえるでしょう．

解答は，一部の単純計算を除いてほとんど省略せずに，目で追える程度に詳しくしました．また解答の右側には，傍注（⇦ではじまる説明）で，解答の補足や，使った定理・公式等の説明を行いました．

演習題：　例題と同じテーマの問題を選びました．例題の数値を変えただけのような問題が中心です．例題の解答や解説を真似ればたいてい解いていけるはずです．やや難しめの問題については，横にヒントを書きました．

また，目標時間を明示しましたが，ややきつめの設定になっています．この時間内に解ければ，例題の手法がよく頭に入って理解していると考えてよいでしょう．

演習題の解答：　第1部では分野ごとにまとめてあります．例題と同様に，詳しい解答を付けました．

本書で使う記号など：

⇨**注**はすべての人のための，➡**注**は意欲的な人のための注意事項です．

▨は関連する事項の補足説明などです．

また，

∴　ゆえに

∵　なぜならば

プレ1対1対応の演習

数学Ⅱ 改訂版

目　次

解答・解説：飯島康之、石井俊全、坪田三千雄

式と証明
公式など

【多項式の展開・因数分解の公式】

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

【二項定理】

（1） パスカルの三角形

$(a+b)^n$ の展開式の各項（a^n, $a^{n-1}b$, $\cdots$, b^n）の係数を，$n=1$, 2, $\cdots$ として上の行から並べると，右のようになる．

$n=1$	1 1
$n=2$	1 2 1
$n=3$	1 3 3 1
$n=4$	1 4 6 4 1
$n=5$	1 5 10 10 5 1
	……………………

次の性質がある．

- 左右対称で，両端は1
- 両端以外は，左上と右上の数の和に等しい

（2） 二項定理

$$\boldsymbol{(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots}$$
$$\boldsymbol{+{}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nb^n}$$

▨ パスカルの三角形の性質を二項係数 ${}_n\mathrm{C}_r$ で表すと

- ${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$,
  ${}_n\mathrm{C}_0=1$, ${}_n\mathrm{C}_n=1$
- ${}_n\mathrm{C}_r={}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_r$

${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$ ${}_{n-1}\mathrm{C}_r$

${}_n\mathrm{C}_r$

【多項式の割り算】

A, B を x の多項式とし，$B\neq0$ とするとき，

$A=BQ+R$,　R は0か，B より次数の低い多項式

を満たす多項式 Q と R がただ1通りに定まる．

Q を A を B で割ったときの**商**，R を**余り**という．

$R=0$ のとき，A は B で割り切れるという．このとき，B は A の因数であるという．

【分数式】

A を多項式，B を1次以上の多項式とするとき，$\dfrac{A}{B}$ の形で表される式を分数式という．

多項式と分数式を合わせて有理式という．

分数式の分子と分母を両者の共通因数で割ることを約分するという．

それ以上約分できない分数式を既約分数式という．

【恒等式】

例えば，次の等式

$$ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c' \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

が x にどのような値を代入しても成り立つとき，①を x についての恒等式という．①が x の恒等式になる条件は，

$a=a'$, $b=b'$, $c=c'$

である．

一般に，x の多項式 P, Q について，

$P=Q$ が x についての恒等式

となる条件は，

P, Q の同じ次数の項の係数が一致する

（このとき，P と Q の次数は等しい）

である．

係数比較でなく，数値を代入することで恒等式をとらえることもできる．

一般に，x の n 次以下の多項式 P, Q について，等式 $P=Q$ が $n+1$ 個の異なる x の値に対して成り立つとき，$P=Q$ は x についての恒等式であることが知られている．

【等式の証明】

等式 $A=B$ を証明するとき，次のいずれかの変形を行うことが多い．

- A, B の一方を変形して，他方を導く．
- A, B をそれぞれ変形して，同じ式 C を導く．
- $A-B=0$ であることを示す．

▨ **等式の条件式の扱い方**

例えば，$a+b+c=0$ という条件式があれば，$c=-(a+b)$ というように，1つの文字を消去するのが原則である．

▨ **比例式**

比 $a:b$ $(b \neq 0)$ について，$\dfrac{a}{b}$ を比の値という．

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のように，比の値が等しいことを示す式を比例式という．

$a:b:c$ を a，b，c の連比という．

$x:y:z=a:b:c$ $(abc \neq 0)$ のとき，

$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ ……②　が成り立つ．

②の条件が与えられているときは，この値を k とおいて，

$$x=ak,\ y=bk,\ z=ck$$

と表されることを使うのが定石である．

【不等式の証明】

不等式 $A>B$ を証明するとき，

$$A-B>0$$

を示すことを目標にすることが多い．文字を一方に集めて，因数分解や平方完成などの変形をする．

平方完成したときは，

『実数 a について，$a^2 \geqq 0$（等号は $a=0$ のときのみ）

実数 a，b について，$a^2+b^2 \geqq 0$

（等号は $a=b=0$ のときのみ）』

を使うことが多い．

また，$A \geqq 0$，$B \geqq 0$ のときは，

$$A>B \iff A^2>B^2$$

であるから，$A>B$ を示すのに，

$$A^2>B^2,\ \text{つまり}\ A^2-B^2>0$$

を示してもよい．

▨ **相加平均と相乗平均の不等式**

実数 a，b について，$\dfrac{a+b}{2}$ を a と b の相加平均，

$a>0$，$b>0$ のとき，$\sqrt{ab}$ を a と b の相乗平均という．

$\boldsymbol{a>0}$，$\boldsymbol{b>0}$ **のとき，** $\boldsymbol{\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}}$

（等号は $a=b$ のときのみ）

が成り立つ．

▨ **絶対値と不等式**

絶対値を含む不等式の証明では，実数 a，b について

$$|a|^2=a^2,\ |a| \geqq 0,\ |a| \geqq a,\ |a| \geqq -a$$

$$|ab|=|a||b|$$

$$b \neq 0\ \text{のとき，}\ \left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$$

を使うことが多い．

●組立除法

$x-\alpha$ の形の1次式で割るときには以下の方法を使うと簡単である．

例えば $2x^3-7x+1$ を $x+2$ で割る場合には，右のように，

$-2$①	$2$②	$0$③	$-7$④	$1$⑤
	↓	$-4$⑦	$8$⑨	-2⑪
	$2$⑥	$-4$⑧	1⑩	-1⑫

①のところに α にあたる -2 を書く

②〜⑤に $2x^3-7x+1$ の係数を順に書く

（抜けているところは0を書き忘れないように）

⑥に②の2をそのまま書く

⑦に①×⑥を書き，⑧に③＋⑦を書く

⑨に①×⑧を書き，⑩に④＋⑨を書く

⑪に①×⑩を書き，⑫に⑤＋⑪を書く

という手順で計算でき，⑥，⑧，⑩が商 $2x^2-4x+1$ を，⑫が余り -1 を表す．

この方法を「組立除法」という．

⇨注　$x-\alpha$ で割るとき，①に書くのは $-\alpha$ ではなくて $\boldsymbol{+\alpha}$ であり，また⑧には③－⑦ではなく③＋⑦を書くことに注意．

◆ 1　3 次式の展開・因数分解

（ア）　$(2x+y)^3$ を展開せよ．

（イ）　$(x-4)(x^2+4x+16)$ を展開せよ．

（ウ）　x^6+1 を因数分解せよ．　［2 次式と 4 次式の積にせよ］

（エ）　x^6-2x^3+1 を因数分解せよ．　［係数は有理数の範囲とする］

3 乗の展開公式　$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

（ア）は上段の公式にあてはめよう（a⇨$2x$，b⇨y）．

3 乗の和・差の因数分解　$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

（イ）は，普通に展開した式を書いてもよいが，上の第 2 式の右辺で $a=x$，$b=4$ としたものであることがわかると答えはすぐに出る．（ウ）は，$(x^2)^3+1^3$，（エ）は $(x^3-1)^2$ である．

解 答

（ア）　$(2x+y)^3=(2x)^3+3(2x)^2y+3(2x)y^2+y^3$

$=\boldsymbol{8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3}$

（イ）　$(x-4)(x^2+4x+16)=(x-4)(x^2+4x+4^2)$

$=x^3-4^3=\boldsymbol{x^3-64}$

（ウ）　$x^6+1=(x^2)^3+1^3=\boldsymbol{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}$　⇦x^2 をかたまりとみる

（エ）　$x^6-2x^3+1=(x^3)^2-2x^3+1$　⇦x^3 をかたまりとみる

$=(x^3-1)^2=\{(x-1)(x^2+x+1)\}^2$

$=\boldsymbol{(x-1)^2(x^2+x+1)^2}$

1 演習題 （解答は p.15）

（ア）　$(3x-y)^3$ を展開せよ．

（イ）　$(x-1)(x+1)(x^4+x^2+1)$ を展開せよ．

（ウ）　$16x^3-54y^3$ を因数分解せよ．

（エ）　$A=(2x+3y)^3$，$B=(x+ay)^3$ とする．ただし，a は定数とする．

（１）　A の xy^2 の係数と B の x^2y の係数が一致するとき，a の値を求めよ．

（２）　A を展開したときの係数の和と B を展開したときの係数の和が等しいとき，a の値を求めよ．

（オ）　$x+\dfrac{1}{x}=3$ のとき，$x^2+\dfrac{1}{x^2}=$ $\boxed{（1）}$，$x^6+\dfrac{1}{x^6}=$ $\boxed{（2）}$ である．

（カ）（１）　$(a+b)^3-(a-b)^3$ を因数分解せよ．　［係数は有理数の範囲とする］

（２）　$(x+y+z)^3-(x-y-z)^3$ を因数分解せよ．［係数は有理数の範囲とする］

ア～ウ　3 分

エ～カ　12 分

式と証明
演習題の解答

1 (イ) まず前2つを整理.
(ウ) 2でくくる.
(エ) 展開した式を書けば解けるが，(2)は少しうまい手がある.
(オ) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2$，$\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^3$ を計算してみる.
(カ) (1) 先に展開する.
(2) (1)と比べよう．(1)の a を x，b を $y+z$ にした式である.

解 (ア) $(3x-y)^3$

$=(3x)^3-3(3x)^2y+3(3x)y^2-y^3$

$=\mathbf{27x^3-27x^2y+9xy^2-y^3}$

(イ) $(x-1)(x+1)(x^4+x^2+1)$

$=(x^2-1)\{(x^2)^2+x^2+1\}$

$=(x^2)^3-1^3=\mathbf{x^6-1}$

(ウ) $16x^3-54y^3=2(8x^3-27y^3)$

$=2\{(2x)^3-(3y)^3\}$

$=2(2x-3y)\{(2x)^2+(2x)(3y)+(3y)^2\}$

$=\mathbf{2(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)}$

(エ) $A=(2x+3y)^3$

$=(2x)^3+3(2x)^2(3y)+3(2x)(3y)^2+(3y)^3$

$=8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$

$B=(x+ay)^3$

$=x^3+3x^2(ay)+3x(ay)^2+(ay)^3$

$=x^3+3ax^2y+3a^2xy^2+a^3y^3$

(1) $54=3a$ より $\mathbf{a=18}$

(2) A の係数の和は $8+36+54+27=125=5^3$，
B の係数の和は $1+3a+3a^2+a^3=(1+a)^3$ であるから，これらが等しいとき，

$$5^3=(1+a)^3 \qquad \therefore\ 5=1+a$$

よって，$\mathbf{a=4}$

▨ 展開したときの係数の和は，$x=1$，$y=1$ を代入したときの値，つまり，A は $(2+3)^3$，B は $(1+a)^3$ となる．これに気づけば，A，B を展開してすべての項を書く必要はない.

(オ) (1) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2$ より，

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=\mathbf{7}$$

(2) $\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^3$

$=(x^2)^3+3(x^2)^2\left(\dfrac{1}{x^2}\right)+3x^2\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^3$

$=x^6+3x^2+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^6}$

より

$$x^6+\frac{1}{x^6}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^3-3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$$

$=7^3-3\cdot7=343-21=\mathbf{322}$

▨ 一般に，$X^3+Y^3=(X+Y)^3-3XY(X+Y)$ となる．本問は $X=x^2$，$Y=\dfrac{1}{x^2}$ で $XY=1$ の場合.

(カ) (1) $(a+b)^3-(a-b)^3$

$=(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)$
$\qquad -(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)$

$=6a^2b+2b^3$

$=\mathbf{2b(3a^2+b^2)}$

(2) $x=a$，$y+z=b$ とおくと，

$(x+y+z)^3-(x-y-z)^3$

$=(a+b)^3-(a-b)^3$

$=2b(3a^2+b^2)$

$=2(y+z)\{3x^2+(y+z)^2\}$

$=\mathbf{2(y+z)(3x^2+y^2+z^2+2yz)}$

2 (イ) $(2x^2)^p\left(\dfrac{1}{x}\right)^q$ $(p+q=7)$ が x^2 の項になる p，q を求める.
(エ) $x^2\cdot x\cdot1\cdot1$ と $x\cdot x\cdot x\cdot1$ の項が x^3 の項になるが，これくらいのスケールであれば展開して次数の低い項の係数を求めることもできる.
(オ) (3)は，$(x+1)^6(1+x)^6=(x+1)^{12}$ の x^6 の係数に着目する.

解 (ア) $(2x+5y)^5$ を展開したときの x^2y^3 の項は ${}_5\mathrm{C}_2(2x)^2(5y)^3$ だから，求める係数は

$$\frac{5\cdot4}{2}\times2^2\times5^3=10\cdot4\cdot125=\mathbf{5000}$$

(イ) $\left(2x^2+\dfrac{1}{x}\right)^7$ を展開すると $(2x^2)^p\left(\dfrac{1}{x}\right)^q$，$p+q=7$ を満たす次数の項があらわれる．x^2 の項になる p，q は

$2p-q=2$，$p+q=7$ より $p=3$，$q=4$

であるから，x^2 の項は ${}_7\mathrm{C}_3(2x^2)^3\left(\dfrac{1}{x}\right)^4$ であり，その係数は

◐ 1 複素数の計算

（ア） $(4x-y)+(2x+3)i=5+7i$ を満たす実数 x，y を求めよ．
（イ） 次の式を計算をして $a+bi$ の形で答えよ．
（１） $(-3+2i)-(5-4i)$　　（２） $(-3+2i)(5-4i)$
（３） $\sqrt{-2}\times\sqrt{-6}$　　（４） $\dfrac{3+i}{1-2i}$

複素数の相等　２乗して -1 になる数 i を虚数単位という（$i^2=-1$）．実数 a，b に対し，$a+bi$ で表される数を複素数といい，a を実部，b を虚部という．２つの複素数の実部・虚部がそれぞれ等しいとき，２つの複素数は等しいという．

a，b，c，d が実数のとき，$a+bi=c+di \iff a=c,\ b=d$

負の数の平方根　$a>0$ のとき，$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$ である．式に $\sqrt{-3}$ がある場合，直ちにこれを用い $\sqrt{-3}=\sqrt{3}\,i$ としてから計算する．$\sqrt{-3}\sqrt{-2}=\sqrt{3}\,i\sqrt{2}\,i=\sqrt{6}\,i^2=-\sqrt{6}$ となる．

誤）　$\sqrt{-3}\sqrt{-2}=\sqrt{(-3)(-2)}=\sqrt{6}$

複素数の計算　複素数の和・差は，実部どうし・虚部どうしの和・差をとる．複素数の積は，i の多項式のように計算して i^2 がでてきたところで，-1 におきかえる．複素数の分数は無理数の分母を有理化するときのような計算手法を用いるとよい．a，b，c，d，k を実数として，

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i,\ (a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$

$$k(a+bi)=ka+kbi$$

$$(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

$$\frac{c+di}{a+bi}=\frac{(c+di)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{(ac+bd)+(ad-bc)i}{a^2-(bi)^2}=\frac{ac+bd}{a^2+b^2}+\frac{ad-bc}{a^2+b^2}i$$

となる．この計算結果は丸暗記するようなものではなく，このような手順で計算できればよい．

解 答

（ア） 実部どうし，虚部どうしが等しいので，

$4x-y=5$，$2x+3=7$

これより，$\boldsymbol{x=2}$，$\boldsymbol{y=3}$

⇦上式の後者からまず x が求まる．$y=4x-5=4\cdot2-5=3$

（イ）（１） $(-3+2i)-(5-4i)=(-3-5)+(2+4)i=\boldsymbol{-8+6i}$

（２） $(-3+2i)(5-4i)=(-3)5+(-3)(-4i)+(2i)5+2i(-4i)$

$=-15+12i+10i-8i^2=\boldsymbol{-7+22i}$

⇦慣れてくれば $-3\cdot5+2\cdot4+(3\cdot4+2\cdot5)i$ とできるだろう．

（３） $\sqrt{-2}\times\sqrt{-6}=\sqrt{2}\,i\times\sqrt{6}\,i=\sqrt{2}\sqrt{6}\,i^2=2\sqrt{3}\,i^2=\boldsymbol{-2\sqrt{3}}$

（４） $\dfrac{3+i}{1-2i}=\dfrac{(3+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\dfrac{3+6i+i+2i^2}{1^2-(2i)^2}$

$=\dfrac{1+7i}{5}=\boldsymbol{\dfrac{1}{5}+\dfrac{7}{5}i}$

⇦$1^2-(2i)^2=1-4i^2=1+4=5$

▶◀ 1 演習題（解答は p.30）

（ア） $(2+3i)x+(1-i)y=7+8i$ を満たす実数 x，y を求めよ．
（イ） 次の式を計算をして $a+bi$ の形で答えよ．
（１） $\sqrt{3}\,i+1-(2+3i)$　　（２） $(\sqrt{2}+\sqrt{5}\,i)(\sqrt{6}-\sqrt{15}\,i)$
（３） $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-12}}$　　（４） $\dfrac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i}$

5分

複素数と方程式
演習題の解答

1 (ア) 左辺を実部と虚部に整理.

(イ)(3) 分母の $\sqrt{\ }$ の中の負の数をすぐに計算する.

解 (ア) $(2+3i)x+(1-i)y=7+8i$

$\therefore\ 2x+y+(3x-y)i=7+8i$

実部どうし，虚部どうしが等しく，

$$2x+y=7 \cdots\cdots ①,\ 3x-y=8 \cdots\cdots ②$$

①+②より，$5x=15 \quad \therefore\ \boldsymbol{x=3}$

①より，$\boldsymbol{y}=7-2x=7-6=\boldsymbol{1}$

(イ) (1) $\sqrt{3}i+1-(2+3i)=\boldsymbol{-1+(\sqrt{3}-3)i}$

(2) $(\sqrt{2}+\sqrt{5}i)(\sqrt{6}-\sqrt{15}i)$

$=\sqrt{2}\sqrt{6}-\sqrt{2}\sqrt{15}i+(\sqrt{5}i)\sqrt{6}-(\sqrt{5}i)(\sqrt{15}i)$

$=2\sqrt{3}-\sqrt{30}i+\sqrt{30}i-5\sqrt{3}i^2$

$=2\sqrt{3}+5\sqrt{3}=\boldsymbol{7\sqrt{3}}$

(3) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-12}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}i}=\dfrac{3}{2i}=\dfrac{3i}{2i^2}=\boldsymbol{-\dfrac{3}{2}i}$

(4) $\dfrac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i}=\dfrac{(\sqrt{2}+i)^2}{(\sqrt{2}-i)(\sqrt{2}+i)}=\dfrac{2+2\sqrt{2}i+i^2}{(\sqrt{2})^2-i^2}$

$=\dfrac{1+2\sqrt{2}i}{3}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}i}$

2 (ア) 解の公式を使う.

(イ) 判別式の符号を調べる.

解 (ア) (1) $x=\dfrac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot5}}{2}=\boldsymbol{\dfrac{3\pm\sqrt{11}i}{2}}$

(2) $x=\dfrac{2\pm\sqrt{(-2)^2-3\cdot5}}{3}=\boldsymbol{\dfrac{2\pm\sqrt{11}i}{3}}$

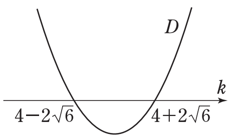
(イ) $2x^2+kx+k+1=0$ の判別式 D は，

$$D=k^2-4\cdot2(k+1)=k^2-8k-8$$

$k^2-8k-8=0$ の解は，解の公式より，

$k=4\pm\sqrt{(-4)^2+8}$

$=4\pm2\sqrt{6}$



であり，$D=k^2-8k-8$ のグラフは右のようになることに注意すると，

$D>0$ すなわち，$\boldsymbol{k<4-2\sqrt{6}}$ または $\boldsymbol{4+2\sqrt{6}<k}$ のとき，異なる2つの実数解を持つ.

$D=0$ すなわち $\boldsymbol{k=4\pm2\sqrt{6}}$ のとき，重解を持つ.

$D<0$ すなわち，$\boldsymbol{4-2\sqrt{6}<k<4+2\sqrt{6}}$ のとき，異なる2つの虚数解を持つ.

▨ $k^2-8k-8=0$ の解が $k=4\pm2\sqrt{6}$ であることから，

$$D=\{k-(4-2\sqrt{6})\}\{k-(4+2\sqrt{6})\}$$

と因数分解できる. この式を使って，例題の解答のような答案を作ってもよい.

3 (ア)(2) $(\alpha^2+\beta^2)^2$ に着目.

(イ) 解を α，α^2 とおき，解と係数の関係を用いる. そこから k を消去すると α の3次方程式が得られる. ここからは◇7（☞p.28）のようにして解く.

解 (ア) 解と係数の関係より，

$$\alpha+\beta=-\frac{(-2)}{3}=\frac{2}{3},\ \alpha\beta=\frac{4}{3}$$

(1) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

$=(\alpha+\beta)\{(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta\}$

$=\dfrac{2}{3}\left\{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2-3\cdot\dfrac{4}{3}\right\}=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{4}{9}-4\right)$

$=\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{32}{9}\right)=\boldsymbol{-\dfrac{64}{27}}$

(2) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2-2\cdot\dfrac{4}{3}=\dfrac{4}{9}-\dfrac{8}{3}=-\dfrac{20}{9}$

$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2(\alpha\beta)^2$

$=\left(-\dfrac{20}{9}\right)^2-2\left(\dfrac{4}{3}\right)^2=\dfrac{400}{81}-\dfrac{32}{9}=\boldsymbol{\dfrac{112}{81}}$

⇨**注** $\alpha^4+\beta^4=(\alpha^3+\beta^3)(\alpha+\beta)-\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)$ に着目してもよい.

(3) $\dfrac{\beta}{\alpha+1}+\dfrac{\alpha}{\beta+1}=\dfrac{\beta(\beta+1)+\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+1)(\beta+1)}$

$=\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\alpha+\beta}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1} \cdots\cdots\cdots\cdots ①$

ここで，

$(\text{分子})=\alpha^2+\beta^2+\alpha+\beta=-\dfrac{20}{9}+\dfrac{2}{3}=-\dfrac{14}{9}$

$(\text{分母})=\alpha\beta+\alpha+\beta+1=\dfrac{4}{3}+\dfrac{2}{3}+1=3$

よって，①$=-\dfrac{14}{9}\div3=\boldsymbol{-\dfrac{14}{27}}$

(イ) 2解を α，α^2 とおくと，解と係数の関係より，

$$\alpha+\alpha^2=2k \cdots\cdots\cdots ①,\ \alpha\cdot\alpha^2=k+5 \cdots\cdots\cdots ②$$

②より，$k=\alpha^3-5 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$

①に代入して，$\alpha+\alpha^2=2(\alpha^3-5)$

$\therefore\ 2\alpha^3-\alpha^2-\alpha-10=0 \cdots\cdots\cdots\cdots ④$

あとがき

「大学への数学」の本は，ほとんどが受験生対象の本で，高校１年生が使うには，かなりキツイ本ばかりでした．

そこで，教科書と併用して自習できるような本を作ろうということで本書が出来上がりました．自習するには，分量が多いとやる気が起こらない人が少なくないので（筆者もそうです），分厚くならないようにしました．

解答・解説は分かり易いことを心がけましたが，100 点満点だと言い切る自信はありません．まだまだ改善の余地があるかもしれません．お気づきの点があれば，どしどしご質問・ご指摘をしてください．

本書の質問があれば，「東京出版・大数Ｑ係」宛（住所は下記）にお寄せください．

原則として封書（宛名を書いた，切手付の返信用封筒を同封のこと）を使用し，**１通につき１件**でお送りください（電話番号，学年を明記して，できたら在学（出身）校・志望校も書いてください）．

なお，ただ漠然と‘この解説が分かりません’という質問では適切な回答ができませんので，‘この部分が分かりません’とか‘私はこう考えたがこれでよいのか’というように具体的にポイントをしぼって質問するようにしてください（以上の約束が守られないものにはお答えできないことがありますので注意してください）．

毎月の「大学への数学」や増刊号と同様に，読者のみなさんのご意見を反映させることによって，100 点満点の内容になるよう充実させていきたいと思っています．

（坪田）

大学への数学
プレ １対１対応の演習／数学Ⅱ［改訂版］

令和 5 年 3 月 1 日　第１刷発行

編　者　東京出版編集部
発行者　黒木憲太郎
発行所　株式会社　東京出版
〒150-0012　東京都渋谷区広尾 3-12-7
電話 03-3407-3387　振替 00160-7-5286
https://www.tokyo-s.jp/

製版所　日本フィニッシュ
印刷所　光陽メディア
製本所　技秀堂

ISBN978-4-88742-270-4（定価はカバーに表示してあります）