まえがき

これからの数学で重要になるキーワードは？

「活用」である．

数学が，定量的なものから定性的なものに変わる，とも言えるかも知れない．厳密な論証による正しい数学が不要になるわけではないが，実用面では正確な数値は必要なく近似で十分事足りることが多い．円周率を“およそ3”とするのは極端であるが，「評価」という感覚は必要になろう．

また，一般的な解法のみに頼るのではなく，個別の問題に対して最適な解法を選択することも必要になる．問題の個性を感じ取り，必要な情報のみを抽出するのである．

一方で，数学概念の深い理解も求められる．数学を表現するのには「数式」「日本語」「図」という３つの形態がある．それらを自由に行き来しながら概念を正確にイメージでき，言語化できることが必要になる．

問題と解答を１対１対応させるような「知識・技能」重視の数学教育は終わりを迎える．また，数学的厳密性を重視し過ぎて生徒を置き去りにすることも許されない．生きていくための「思考力・判断力・表現力」の育成を意識しなければならない．

本書は，「解法を定着させる」というこれまでの数学参考書・問題集とはまったく違う思想に基づいている．「活用」をキーワードに，「難しくはないが答えにくい問題」を取り上げている．表面的な問題ではなく，数学を深く理解し，正しくイメージできていないと考えられない問題ばかりである．

「思考力・判断力・表現力」を発揮するための流れは

【題意を明確化，論点を抽出】

↓

【議論に必要な情報収集】

↓

【正しい推論，論証】

である．「基本解法の中から使えるものを探す」というこれまでの数学とは頭の使い方が違う．道具頼りのこれまでの数学ではなく，工夫することが必要になるような数学である．ずる賢さも求められる．問題を型にはめるのではなく，問題に合う型を自ら作り出す．

新しい時代に向けて，そんな問題集を作りたい．

それが本シリーズに込めた思いである．

既存問題集にあるような問題は掲載していない．教科書の知識で思考できる範囲で問題を作っており，単元の融合問題も含まれることを注意しておく．

各章は，基本概念の列挙，問題，解答解説からなる．問題は 1 人で考えても良いし，仲間と一緒に考えても良い．解答解説を見る前に，あぁだこぉだと考えてもらいたい．解答解説に先立って問題を考えるためのヒントを挙げているものもあるので，そちらも参照しながら考えてもらいたい．そうして確認のために解答解説を読んでもらいたい．

「答えを見て丸暗記」という使い方はしないでもらいたい.「どうしてこんな風に考えるのか？」「自分はどうやったらこう考えられるか？」と自問自答してもらいたい．そのヒントとなるように，解説は思考部分を重視している．

数学を道具として，また現象として，正しくイメージできるようになってもらいたい．身に付けてもらいたいイメージについてもできるだけ詳しく解説する．特に数学Ⅲは理論が難しかったり，計算手法が複雑だったりで，知識・技能の習得で苦労するかも知れない．極限・微分・積分は大学数学（解析学）に直結する部分で，高校数学で厳密には扱い切れない部分が多いため，独特な理論体系になっていることは否定できない．だからこそ，確固としたイメージを掴み，正しいかどうかを自分で「判断」できるようになってもらいたい．

高校生にとって新しい数学は，定期テストでさえ暗記で乗り切れないから，既存の感覚では苦しいものになるかも知れない．しかし，自分で考える自由度が増し，楽しさを感じることができるものになる．

勉強はつらい反復だけではなく，問題を自分で解決する楽しいものである．本書を通じてそれを感じてくれる人がいたら，この上ない喜びである．

数学を通じて「思考力・判断力・表現力」を磨いていこう！

吉田　信夫

目　次

1 数学Ⅲ－①: 関数

数学Ⅲ－①:「関数」で扱う概念は

□分数関数

□無理関数

□逆関数と合成関数

である.

2つの変数 x, y があって, x の値を定めるとそれに対応して y の値がただ1つ定まるとき, y は x の関数であるという.「ただ1つ」が重要である. x のとる値の範囲を定義域といい, y がとる値の範囲を値域という. 定義域を変えると, 違う関数になる.

関数 $y=f(x)$ が与えられたとき, 点集合

$$\{(X,\ Y)\,|\,Y=f(X)\}$$

が関数 $y=f(x)$ のグラフである. グラフが定義されるのは関数に対してであるから, 例えば, 円 $x^2+y^2=1$ は関数のグラフではない (実際, $x=0$ に対して $y=1$, -1 と2つの y の値が対応する).

こういった細かい定義の部分を大事にしながら, グラフを使って解く方法と, 計算で厳密に解き切る方法の両方を本章では取り上げていきたい. 計算ベースにすることは本書のポリシーとは食い違うが, 思考･判断･表現力を高める上で必要な要素としてやっていきたい.

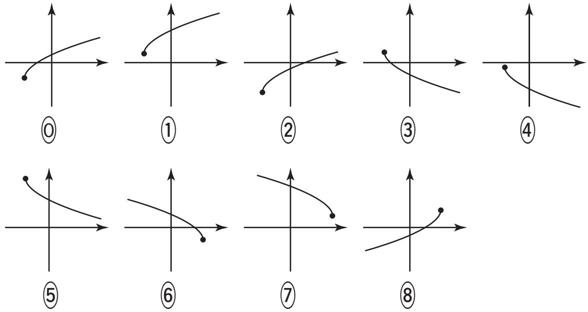
問題

問題 1-1

次の各関数のグラフを表すものとして最も適するものを，下の ⓪ ～ ⑧ からそれぞれ選べ．適するものがない場合は，「無し」と答えよ．

(1) $y=\sqrt{x+2}-2$　　(2) $y=\sqrt{3-x}-1$

(3) $y=-\sqrt{x-3}+2$　　(4) $y=-\sqrt{x+2}+1$



問題 1-2

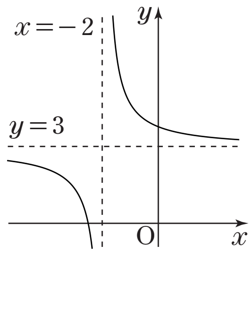
グラフが右の図のようになる分数関数として適するものを次の ⓪ ～ ⑦ から選べ．

⓪ $y=\dfrac{3x-7}{x-2}$　　① $y=\dfrac{x+3}{x-2}$

② $y=\dfrac{3x+7}{x-2}$　　③ $y=\dfrac{x-3}{x-2}$

④ $y=\dfrac{3x-7}{x+2}$　　⑤ $y=\dfrac{x+3}{x+2}$

⑥ $y=\dfrac{3x+7}{x+2}$　　⑦ $y=\dfrac{x-3}{x+2}$



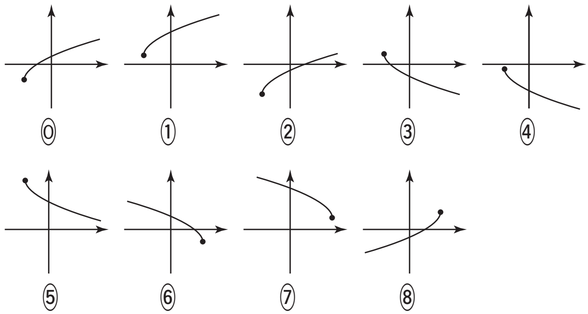
解答・解説

問題 1-1

次の各関数のグラフを表すものとして最も適するものを，下の ⓪ ～ ⑧ からそれぞれ選べ．適するものがない場合は，「無し」と答えよ．

(1)　$y=\sqrt{x+2}-2$　　(2)　$y=\sqrt{3-x}-1$

(3)　$y=-\sqrt{x-3}+2$　　(4)　$y=-\sqrt{x+2}+1$



【ヒント】

どのグラフも横向き放物線の上下どちらか半分になる．

平方根の中は 0 以上のすべての値をとることから，定義域が分かる．平方根の値は 0 以上のすべての値をとることから，値域が分かる．この 2 つを合わせて，放物線の頂点の位置が分かる．

さらに，y 軸との交点による区別も必要になりそうである．

この観点がなかった人は，改めて考えてみよう！

【解答・解説】

(1)　$x \geqq -2$，$y \geqq -2$ で，頂点は $(-2,\ -2)$，$x=0$ で $y<0$．② が適する．

(2)　$x \leqq 3$，$y \geqq -1$ で，頂点は $(3,\ -1)$，$x=0$ で $y>0$．⑥ が適する．

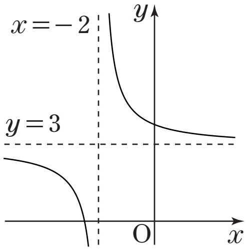
(3)　$x \geqq 3$，$y \leqq 2$ で，適するのは「無し」．

(4)　$x \geqq -2$，$y \leqq 1$ で，頂点は $(-2,\ 1)$，$x=0$ で $y<0$．③ が適する．

■

問題 1-2

グラフが右の図のようになる分数関数として適するものを次の ⓪ ～ ⑦ から選べ.



⓪ $y=\dfrac{3x-7}{x-2}$　① $y=\dfrac{x+3}{x-2}$

② $y=\dfrac{3x+7}{x-2}$　③ $y=\dfrac{x-3}{x-2}$

④ $y=\dfrac{3x-7}{x+2}$　⑤ $y=\dfrac{x+3}{x+2}$

⑥ $y=\dfrac{3x+7}{x+2}$　⑦ $y=\dfrac{x-3}{x+2}$

【ヒント】

(分母) $=0$ となる x は定義域に入らない. 漸近線として現れる. また, グラフ上の点で y 座標が極限値 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y$ と等しくなる点は存在しない. これも漸近線として現れる.

この観点がなかった人は, 改めて考えてみよう！

【解答・解説】

$x=-2$ が漸近線となるのは ④ ～ ⑦ である. このうち, $y=3$ が漸近線となるのは, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=3$ となる ④, ⑥ である. $x=0$ で $y>3$ となる方が適する. それは ⑥ である.

■

※　④ $y=3+\dfrac{-13}{x+2}$　⑥ $y=3+\dfrac{1}{x+2}$

である. それぞれ, 比例定数が -13, 1 の反比例を表すグラフを, x 軸方向に -2, y 軸方向に 3 だけ平行移動して得られるグラフである.

⑥ は $(x+2)(y-3)=1$ と見ることもでき, 2 次曲線である.

あとがき

いま，数学は大きく変わっている．

数学が苦手な人にとって，基本知識の定着，繰り返し学習と，苦行でしかなかった数学の勉強．正しいイメージ付けを重視し，現象として定性的に数学を捉えられることが，これからの数学学習で重視されなければならない．これが数学嫌いを減らすチャンスになるかも知れない．

本書は，そのことを伝える問題集として作成した．

頭を使わないと答えられないよう，引っかけ問題を作ったり，嫌がらせの要素もふんだんに盛り込んだ．また，数学概念のイメージを身をもって実感してもらうような問題も入れた．

何度も繰り返し解いて定着させるような問題集ではないが，嫌がらせ対応モードで数学に接する機会は少ないので，忘れたころに解き直してもらえるのは良いことだ．その際も，できるだけ記憶を頼りにせず，よく問題を読んで，慎重に判断し，正しく推論してもらいたい．

本書が新時代の高校数学の 1 つの基準となれば，筆者として嬉しく思う．

本書の作成にあたり，東京出版の飯島康之さん，坪田三千雄さんには企画から内容の吟味までお世話になりました．また，多くの問題は尊敬すべき数学仲間のみなさんのアイデアを元に作成させてもらいました．

これまで関わったすべての方々に感謝申し上げ，本書を捧げます．ありがとうございました．

著者紹介：

吉田　信夫（よしだ・のぶお）

1977 年　広島で生まれる
1999 年　大阪大学理学部数学科卒業
2001 年　大阪大学大学院理学研究科数学専攻修士課程修了

2001 年より研伸館にて，2022 年からはお茶の水ゼミナール (お茶ゼミ√ +) にて，主に東大・京大・医学部などを志望する中高生への大学受験数学を担当する．研伸館では，灘校の生徒を多数指導してきた.
そのかたわら,「大学への数学」などの雑誌での執筆活動も精力的に行う.
著書『複素解析の神秘性』(現代数学社 2011),『ユークリッド原論を読み解く』(技術評論社 2014),『超有名進学校生の数学的発想力』(技術評論社 2018) など多数.

東京出版から刊行のこのシリーズは
ほぼ計算不要の　思考力・判断力・表現力トレーニング　数学 IA
ちょっと計算も必要な　思考力・判断力・表現力トレーニング　数学 II
に続く 3 作目.

できるだけ計算しない

思考力・判断力・表現力トレーニング 理系微積分

令和５年２月14日　第１刷発行

著　者　吉田　信夫
発行者　黒木憲太郎
発行所　株式会社 東京出版
〒150-0012 東京都渋谷区広尾3-12-7
電話：03-3407-3387　振替：00160-7-5286
https://www.tokyo-s.jp/

印刷所　株式会社 光陽メディア
製本所　株式会社 技秀堂
落丁・乱丁本がございましたら，送料弊社負担にてお取り替えいたします．

（定価はカバーに表示してあります）
ISBN978-4-88742-269-8