



## はじめに

本書は、共通テストの空欄補充問題について、解答時間を短縮し得点をアップすることにつなげようという主旨の本です。

共通テストは、センター試験と同様に、きちっと数学の勉強をしている人が時間をかけて慎重に解いていくなれば、正解に達するようなものばかりです。入試の基本～標準レベルの問題で構成されています。しかし、数学に相当な自信がある人でも、満足するような点はとりにくいでしょう。その大きな理由は、問題文が長く、試験時間のわりに、処理しなければならない問題が多すぎることです。

時間短縮のためには、形式を逆手にとるしかないでしょう。数学の問題というものは、もともと穴埋め形式でなくても解けるように作られているのが普通です。ところが、穴埋め形式だと、答えが整数か否かわかってしまうなど、本来問題が解けるのに必要な条件よりも過剰なヒントが与えられていることが多いのです。正統的な数学の問題から見れば、こういった穴埋め形式の問題は欠陥問題といってもよいでしょう。この“穴”を逆手にとって、穴に隠された有益な情報などを活用しようということです。

たとえば、整数解を求めるとき空欄に1桁の整数が入ることが前提なら、いざとなったら、10通りのしらみつぶしで答えが分かります。また、答えの空欄が1つだけなら答えは1つだけが前提と考えてよいので、答えを「見つける」だけでよく、それ以外の解がないことを証明する必要はありません。

また、記述式なら「整式を求めよ」となる設問でも、穴埋め式なら、例えば「 $\square x + \square$ 」とするしかなく、1次式ということも分かっていることになるのです。

本書では、各分野で穴埋め形式の問題でよく出題されるテーマを中心に、まず身につけたい方法を解説したうえで、時間短縮に有効な手法や公式などを紹介していくことにします。

# 本書の構成

## ① タクティクス編 (Tactics (方策) を練れ)

問題の解法がすぐに思い浮かばなかったり、計算が大変そうだったりする場合にはどうするのか、飛ばして他の問題に行くのか、それとも粘ってみるのか。

時間がなくて当てずっぽうでマークしなければならないとき、どうマークすれば当たる確率が高くなるのか。

試験場でこれらについて迷っている暇はない。

この編を読んで、このような実際に試験場で直面するであろう選択肢に迷わないように、確固たる方針をもって試験に臨もう。

## ② 実践ツール編 (Tool (道具) を持つ)

問題を解くのに必要な基本事項、特別な公式や穴埋めの設問だから生かされる裏ワザ的な解法を、単元別にまとめてある。この編はくり返し読んでほしい。各ポイントにチェック欄  を設けたので、もう読まなくていいところ、あとでもう一度読んだ方がよいところ、直前にもう一度読んだ方がよいところなどを、自分なりの記号で区別をしておくとう率がよいだろう。数学は暗記科目じゃないと思っている人も、知っているで解く時間が短縮できるなど思った公式は、覚えてしまおう。共通テストのときだけ覚えておいて、終わったら忘れてしまえばよいのだ。

また、各単元の最後には「実践演習」と称し、本書の Tool を最大限に適用した解答例を示した。自分の本番でもこういうふうには満点が取れるんだと、成功を信じて何回も読むことで、ツキを呼び込もう。イメージトレーニングとして使うとよい。

なお、とりあげた問題は、主にセンター試験で出されたものである。

### ▶注意：

数ⅡBでは、③(確率分布と統計的な推測)、④(数列)、⑤(ベクトル) から2問を選択する。本書では、多くの大学が2次試験で数学Bの出題範囲を「数列」「ベクトル」としているのを考慮し、「確率分布と統計的な推測」を実践ツール編では省略した。

# 共通テスト 必勝マニュアル

数学ⅡB [2023年受験用]

## 目次

はじめに	1
本書の構成	2
<b>Tactics 編</b>	
問題文のどこを読むか	5
穴埋め形式の積極的活用	5
穴埋めのルール	7
マークの記入の仕方	8
<b>実践 Tool 編</b>	
§ 1 式の計算と方程式など	10
§ 2 指数・対数関数	28
§ 3 三角関数	44
§ 4 微分と積分	58
§ 5 ベクトル	84
§ 6 数列	102
§ 7 座標	124
<b>共通テスト／問題、解説と解答</b>	
2022年 本試験	145
2021年 第1日程	179
2021年 第2日程	205

# Tactics編

## 問題文のどこを読むか

センター試験から共通テストになり、問題文が格段に長くなった。しかも、すべてが解答に必要な情報とは限らない。冒頭から不要な会話が延々と続き、空欄の直前の1~2行に条件が書かれている、なんてこともある。空欄を埋めるのがミッションなのだから、要らないところは飛ばし、時間を節約しよう。具体的には

- まず空欄の近くを読み、何が問題になっているかを把握する
- それに必要な条件をさかのぼって探す

とよいだろう。会話は進行役程度、と考えて基本スルーでいい。重要な条件が書かれていたことはない。ちなみに、会話を含め、ヒントや考え方が書かれていることもあるが、思考のじゃまにしかならないことも少なくない。この程度の問題ではヒントなど必要ない、と思えるくらいに勉強しておこう。

## 穴埋め形式の積極的活用

数学の問題というのは、穴埋め形式でなくても解けるように作られているのが普通である。ところが、共通テストの数学では、解答方式が空欄補充になっているので、答えのおおまかな形が与えられてしまったり、答えが整数か否かがわかってしまったりと、本来問題が解けるのに必要な条件よりも過剰なヒントが与えられている場合が多い。まともな数学の問題から見れば、こういった穴埋め形式の問題は欠陥問題といってもよいだろう。この“穴”を逆手にとり、穴に隠された有益な情報を積極的に読み込んでいくことで、速く、正確に、解答に辿り着こうというのが、この本の基本ポリシーのひとつである。

では、穴のどこに着目するか。

### ① 穴の周りにヒントがある

記述式なら「整式を求めよ。」となる設問でも、穴埋め式だと、例えば「 $\square x + \square$ 」とするしかない。答えが半分与えられているのだ。答えがこの形であることを前提に、本来の解答の筋道を逆に辿ることもできる。例えば、三角関数の  $\square 4'$  などを見よ。

### ② 穴には整数が入る

共通テストの1セットは、いわば巨大な整数問題であるといってもよい。穴に入るのは、ヒトけたの数なのか、2けたの数なのか、穴に入る数字の個数にも気を配りたい。ヒトけたであれば入る数は高々10個。シラミツブシも可能である。

また、2つ以上マークする場合は一番左に-が入ることがあることに留意しておこう。

### ③ 論証はいらない

記述式の設問で、「求めよ。」という場合には、解がそれだけしかないことまで示さなければならないが、穴埋め式では、穴の個数しか解がないことを前提としてよい。そのことを証明する必要がないばかりでなく、逆にヒントとして使ってしまうてもよい。

### ④ 答えが決まることを利用せよ

「 $0 < x < 2$  のとき  $\square$  が成り立つ」(選択肢から選ぶ)というようなときは、 $x=1$  のときに成り立つ選択肢が1つしかなければそれが答えになる。選択肢が排反(どれか1つだけが成り立つ)になっているときは、具体例を考えてみるのは有力である。

# § 1 式の計算と方程式など

□1 整式の筆算は、 $x$ を書かないで済ましてしまおう。

例えば、 $x^2-2x+4$ を $x+3$ で割る筆算は、左下のようにすると習ったはずだ。しかし、どこに $x$ の何乗の項の係数が書いてあるかという“位取り”さえ気を付ければ、係数だけを見て計算を済ますことができる。 $x$ を書いているだけ時間の無駄である。注意しなければならないのは、 $x^3-2x+4$ などといった、次数順に見て途中の項が抜けている例である。係数を取り出すときに、1, 0, 2, 4というように、 $x^2$ の係数0を補う必要がある。また、逆に係数1, 0, 2, 4から多項式を作り直すときも、注意しよう。

$$\begin{array}{r}
 x-5 \\
 x+3 \overline{) x^2-2x+4} \\
 \underline{x^2+3x} \\
 -5x+4 \\
 \underline{-5x-15} \\
 19
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 1 \quad -5 \\
 1 \quad 3 \overline{) 1 \quad -2 \quad 4} \\
 \underline{1 \quad 3} \\
 -5 \quad 4 \\
 \underline{-5 \quad -15} \\
 19
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{l}
 \text{商 } x-5 \\
 \text{余り } 19
 \end{array}$$

□2 文字係数の整式どうしのかけ算、割り算ができるようになれ。

文字式の扱いに慣れていない人にとって、この注意は不用かも知れない。ただ、実際には $x$ 以外の文字が入ると、整式の割り算ができなくなったり、間違ってしまったりする人が続出するのだ。

$x$ 以外の文字は、具体的な数と思う

ことを徹底して、整式の割り算を遂行して欲しい。

$x^3+(a+2)x^2-4x-4a+8$ を $x^2+bx-a^2$ で割ったときの商と余りを求めよ。

例によって $x$ を省略した筆算をすると、

$$\begin{array}{r}
 1 \quad b \quad -a^2 \overline{) \quad 1 \quad a+2 \quad -4 \quad -4a+8} \\
 \underline{1 \quad b \quad -a^2} \phantom{+8} \\
 \phantom{1} \quad a-b+2 \quad a^2-4 \quad -4a+8 \\
 \underline{\phantom{1} \quad a-b+2 \quad b(a-b+2) \quad -a^2(a-b+2)} \\
 \phantom{1} \phantom{a-b+2} \quad a^2-ab+b^2-2b-4 \quad a^3-a^2b+2a^2-4a+8
 \end{array}$$

商は  $x+a-b+2$ ，余りは  $(a^2-ab+b^2-2b-4)x+a^3-a^2b+2a^2-4a+8$  となる．特に1段目の商で  $a-b+2$  が立つところをまごつかないように，4段目から，1,  $b$ ,  $-a^2$  を何倍かしたものを5段目に書いて引くのだが，このとき，2次の項の  $a-b+2$  がいっぺんに消えるように，商（1段目の数）を選ばなくてはいけないのだ． $a$  や  $-b$  だと，6段目で2次の係数が0にはならず，残ってしまう． $x$  以外の文字は格が一緒で，どちらが偉いということもない． $a$  だけが消えたり， $b$  だけが消えたりするのではいけない． $a$  も  $b$  も一緒に消えなければいけない．商の中に， $a-b+2$  というような， $a$  と  $b$  の入り交じった式が入ってきても，一向に構わない．これはカタマリで1つの数だと思えばよいのである．整式の割り算では，常に最高次（4段目と5段目の計算では2次）の係数が消えるように，商の係数を決めていかなければいけない．

この計算は，できるまで練習しよう．

$A$  を  $B$  で割った商と余りを求めよ．

$$(1) \quad A=5x^3+2ax^2+abx+b-1, \quad B=x+3$$

$$(2) \quad A=2x^3+(a+2)x^2+(3a+2)x+a+\frac{1}{a}$$

$$B=x^2+x+b$$

$$(3) \quad A=x^3+2ax^2+3bx+5c, \quad B=x^2+x+1$$

$$(4) \quad A=x^4-(c-2)x^3-(3c-1)x^2+(2c^2+5c+8)x+c^2+2c+2$$

$$B=x^2-cx+1$$

$$(5) \quad A=x^4-(a+8)x^2-2ax+4a+1, \quad B=x^2-2x-a$$

$$(6) \quad A=x^3+4ax^2+(4-b)x+c, \quad B=x^2+2ax+2a$$

$$(1) \quad \text{商 } 5x^2+(2a-15)x+(ab-6a+45) \quad \text{余り } -3ab+18a+b-136$$

$$(2) \quad \text{商 } 2x+a \quad \text{余り } (2a-2b+2)x-ab+a+\frac{1}{a}$$

$$(3) \quad \text{商 } x+2a-1 \quad \text{余り } (-2a+3b)x-2a+5c+1$$

$$(4) \quad \text{商 } x^2+2x-c \quad \text{余り } (c^2+5c+6)x+c^2+3c+2$$

$$(5) \quad \text{商 } x^2+2x-4 \quad \text{余り } -8x+1$$

**実践演習** (目標時間 15分)

係数が実数の4次方程式  $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  ……………①

が  $1 + \sqrt{3}i$  を解にもつとする。

(1)  $(1 + \sqrt{3}i)^2 = \boxed{\text{アイ}} + \boxed{\text{ウ}} \sqrt{\boxed{\text{エ}}} i$

$(1 - \sqrt{3}i)^2 = \boxed{\text{アイ}} - \boxed{\text{ウ}} \sqrt{\boxed{\text{エ}}} i$

$(1 \pm \sqrt{3}i)^3 = \boxed{\text{オカ}}$

$(1 + \sqrt{3}i)^4 = \boxed{\text{キク}} - \boxed{\text{ケ}} \sqrt{\boxed{\text{コ}}} i$

$(1 - \sqrt{3}i)^4 = \boxed{\text{キク}} + \boxed{\text{ケ}} \sqrt{\boxed{\text{コ}}} i$

である。

(2) (1)の計算から、 $1 - \sqrt{3}i$  も①の解であることが分かる。

$$\{x - (1 + \sqrt{3}i)\} \{x - (1 - \sqrt{3}i)\} = x^2 - \boxed{\text{サ}}x + \boxed{\text{シ}}$$

であるから、 $c, d$  は  $a, b$  を用いて

$$c = \boxed{\text{ス}} - \boxed{\text{セ}}b, \quad d = \boxed{\text{ソ}}a + \boxed{\text{タ}}b$$

と表され、①の左辺は

$$(x^2 - \boxed{\text{サ}}x + \boxed{\text{シ}}) \{x^2 + (a + \boxed{\text{チ}})x + (\boxed{\text{ツ}}a + b)\}$$

と因数分解される。

(3) さらに方程式①が異なる四つの解をもち、その四解の和と積がそれぞれ1, 16となるとき、

$$a = \boxed{\text{テト}}, \quad b = \boxed{\text{ナ}}, \quad c = \boxed{\text{ニヌ}}, \quad d = \boxed{\text{ネノ}}$$

である。

**【解答の実況中継】**

(1) 最初は複素数の計算だな。地道に計算するしかない。

$$(1 + \sqrt{3}i)^2 = 1 - 3 + 2\sqrt{3}i = -2 + 2\sqrt{3}i$$

$$(1 + \sqrt{3}i)^3 = (1 + \sqrt{3}i)^2(1 + \sqrt{3}i) = (-2 + 2\sqrt{3}i)(1 + \sqrt{3}i) = -8$$

$$(1 + \sqrt{3}i)^4 = (1 + \sqrt{3}i)^3(1 + \sqrt{3}i) = -8(1 + \sqrt{3}i) = -8 - 8\sqrt{3}i$$

$(1 - \sqrt{3}i)^2, (1 - \sqrt{3}i)^3, (1 - \sqrt{3}i)^4$ の方は計算する必要なし。こういうところでムダな時間を食ってはいけない。

(2) 「(1)の計算から  $1 - \sqrt{3}i$  も①の解であることが分かる」ってあるけど、マニュアル□7を知っているこっちとしては、何を今さらである。

第1問 (必答問題) (配点 30)

〔1〕 座標平面上に点A(-8, 0)をとる。また、不等式

$$x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 \leq 0$$

の表す領域をDとする。

(1) 領域Dは、中心が点(  ,  ), 半径が  の円の  である。

の解答群

- |          |          |      |
|----------|----------|------|
| ① 周      | ② 内部     | ③ 外部 |
| ④ 周および内部 | ⑤ 周および外部 |      |

以下、点(  ,  )をQとし、方程式

$$x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$$

の表す図形をCとする。

(数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。)

# 解説と解答

平均点 43.06

① [1] 座標と三角関数の融合問題です。  $k_0$  は花子さんの方法で求めるのがよいでしょう。

[2] 対数不等式の問題です。問題文に③の範囲を求めたとあるので、その結論をさがしましょう。太郎さんの考察を読む必要はなくなります。他の問題も含めて、太郎さんよりも花子さんが出来る設定になっています。

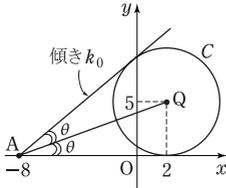
解 [1] (1)

$$D: (x-2)^2 + (y-5)^2 \leq 5^2$$

であるから、 $D$  は、中心が  $(2, 5)$

[1点]、半径が  $5$  [1点] の円の周および内部 (エ = ③) である。 [2点]

(2) (i) 下図から、 $y=0$  [2点] は点  $A$  を通る  $C$  の接線の一つである。



(ii) 重解をもつときである (カ = ①)。 [2点]

(iii)  $\tan \theta$  は  $AQ$  の傾きに等しいから、 $\tan \theta = \frac{5}{2+8} = \frac{1}{2}$  [1点]

直線  $y=0$  と異なる接線の傾きは上図から  $\tan 2\theta$  (ケ = ①) である。 [2点]

$$\begin{aligned} \text{(iv)} \quad k_0 &= \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \quad [2点] \end{aligned}$$

直線  $l$  と領域  $D$  が共有点をもつような  $k$  の値の範囲は  $0 \leq k \leq k_0$  (シ = ⑤) である。 [2点]

$$[2] \quad (1) \quad \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2 \quad [2点]$$

$$\begin{aligned} \text{セ} &= \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} = 4^{\frac{3}{2}} = (2^2)^{\frac{3}{2}} = 2^3 = 8 \\ & \quad [3点] \end{aligned}$$

(2)  $\log_a b = t$  のとき、 $b = a^t$  つまり  $a^t = b$  (ソ = ①) [2点]

$$\text{よって } a = b^{\frac{1}{t}} \quad (\タ = ①) \quad [1点]$$

(3)  $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$  のとき、 $t = \log_a b \neq 0$  であるから、

$$\log_a b > \log_b a \iff t > \frac{1}{t}$$

$$\iff -1 < t < 0, 1 < t$$

$$\iff -1 < \log_a b < 0, 1 < \log_a b$$

$a$  の値を一つ定めたとき、これを満たす  $b$  の範囲は、

$$\bullet a > 1 \text{ のときは, } a^{-1} < b < a^0, a^1 < b$$

$$\therefore \frac{1}{a} < b < 1, a < b \quad (\チ = ③) \quad [2点]$$

$$\bullet 0 < a < 1 \text{ のときは, } a^{-1} > b > a^0, a^1 > b$$

$$b > 0 \text{ とから, } 0 < b < a, 1 < b < \frac{1}{a}$$

(ツ = ①) [2点]

$$(4) \quad p = \frac{12}{13}, q = \frac{12}{11}, r = \frac{14}{13}.$$

$$\frac{12}{11} > \frac{13}{12} > \frac{14}{13} \text{ に注意すると, } 0 < p < 1,$$

$$\frac{1}{p} < q, 1 < r < \frac{1}{p} \text{ である. よって, (3)}$$

の結果を使うと (コ注),

$$\log_p q < \log_q p \text{ かつ } \log_p r > \log_r p$$

(テ = ②) [3点]

⇒注  $0 < a < 1$  のとき、 $\log_a b < \log_b a$  を満たす  $b$  の範囲は、(3)の結果の補集合を考えることにより、

# マニュアルで解いてみよう

2022年 本試験 数ⅡB・実況中継

選択問題は、よくあるように数列とベクトルを取ることにして、順番通りに解き、会話文は設問に関係なければ適当に読み飛ばす予定。

① 誘導に乗ることができたし、[2]の③の不等式の答えが書いてあることに気づいて順調に解けた。

② [1] (1)は問題なし。

$$(2) r = \sqrt{2} a \frac{1}{2}$$

が求まれば、中心の  $x$  座標が 0 なので、

□10 3次関数の概

形から、 $q = -2\sqrt{2} a \frac{1}{2}$

(3)は落ち着いて解けば解ける。

[2] 又までは順調に解いた。

$S-T$  の式のカッコの中が、 $2t^3 - 9bt^2 + 12b^2t - 5b^3$ 。どの項も3次、 $=0$ としたときの解の候補は、

$$\pm \frac{(5 \text{ の約数})}{(2 \text{ の約数})} b$$

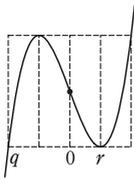
$\frac{ネ}{ノ} b$  は穴の形から、 $\frac{1}{2} b$  か  $\frac{5}{2} b$  のはずだ。

$t > \beta = 2b$  なので、 $t = \frac{5}{2} b$  に決まる。

④ クまではふつうに解こう。  $a_n, b_n$  は選択肢から選ぶので、なんとかショートカットしたいなあ。

$b_{n+1} = 3b_n + 1$  のとき、□14(ア)から、

$b_n = A \cdot 3^{n-1} + B$  の形で、 $b_1 = 2, b_2 = 7$  から、 $A + B = 2, 3A + B = 7$  より、



$$A = \frac{5}{2}, B = -\frac{1}{2}$$

$$\text{よって、} b_n = \frac{5}{2} \cdot 3^{n-1} - \frac{1}{2}$$

次に、 $a_{n+1} = a_n + 2b_n + 2 \dots\dots\dots$ ①

から  $a_n$  を解くところだ。①は階差型だから、

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2b_k + 2)$$

ここで、 $2b_k + 2 = 5 \cdot 3^{k-1} + 1$

等比数列の和の公式から、項数  $n-1$

に注意し、 $3^{n-1}$  の係数は  $\frac{5}{3-1} = \frac{5}{2}$ 、

定数を足しあげているので、その結果は  $n$  の1次式。あてはまるのは⑩しかない。

⑤ (1)  $\vec{OA}, \vec{OB}$  が単位ベクトルだから、 $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$  がそのまま求める  $\cos$  で、 $\cos \angle AOB = -\frac{2}{3}$  で、キまで問題なし。

こんな図を描いておくと、

$OP \perp OA$  となるのは、 $BH \parallel PO$  から、

$BP : PA = HO : OA = 2 : 3$  のときで、

$$t = \frac{3}{3+2} = \frac{3}{5}$$

(2)は図で処理した。

(3)  $t = \frac{1}{2}$  のとき、

$OP$  は  $AB$  に垂直で、 $\angle AOB$  の二等分線でもある。

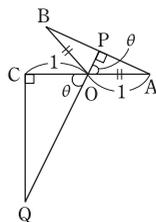
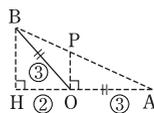
$\angle AOP = \theta$  と置けば、 $\cos 2\theta = -2/3$

半角の公式で、

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{6}}, OP = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$OQ \cos \theta = 1 \text{ より } OQ = \sqrt{6}$$



## あとがき

共通テストは、問題設定のための文章や誘導のための文章などが長いでしょうから、そこから必要な情報を取り出す時間がかかり、試験時間が厳しいと考えられます。問題の主旨が分かったら、素早く答えを埋めたい、あるいは、共通テストレベルを効率よく身につけたい、そんな要求にこたえようというのが本書です。

共通テストレベルを押さえるのに、教科書から始めるのは効率が悪いでしょう。どこが重要で、どんなタイプの問題を押さえて行けばよいのかが書かれていないからです。そこで本書では各単元で押さえておきたいポイント（ツール）を、印象深く、要領よくまとめました。それが、枠で囲った網掛けの部分です。各単元を初めから読んでみて、もしも分からないところが出てきたら教科書などにあたりましょう。最初に教科書に取り組むのではなく、本書から取り組む方が効率的なはずですよ。

また、共通テストでは、各問の最後の設問は、難易度が高い割に配点がさほど高くないものが出される可能性が高いです。そんな設問では、解答がすぐに思い浮かばない場合や、時間がかかりそうだなと思った場合には、とりあえず飛ばしてあとに回した方がよいでしょう。あまり意気込むと、プレーキが利かなくなるものです。柔軟な姿勢で臨みましょう。

本書が皆さんのお役に立つことを願ってやみません。

---

共通テスト必勝マニュアル

数学ⅡB [2023年受験用]

---

令和4年8月22日 第1刷発行

---

定 価 本体1,300円＋税

---

編 者 東京出版編集部

発行人 黒木憲太郎

---

印刷所 光陽メディア

---

発行所 東京出版

〒150-0012 東京都渋谷区広尾3-12-7

---

電 話 (03) 3407-3387

振 替 00160-7-5286

<https://www.tokyo-s.jp/>

---

©Tokyo Shuppan 2022 Printed in Japan

ISBN978-4-88742-268-1