はじめに

本書は，共通テストの空欄補充問題について，解答時間を短縮し得点をアップすることにつなげようという主旨の本です．

共通テストは，センター試験と同様に，きちっと数学の勉強をしている人が時間をかけて慎重に解いていくならば，正解に達するようなものばかりです．入試の基本〜標準レベルの問題で構成されています．しかし，数学に相当な自信がある人でも，満足するような点はとりにくいでしょう．その大きな理由は，問題文が長く，試験時間のわりに，処理しなければならない問題が多すぎることです．

時間短縮のためには，形式を逆手にとるしかないでしょう．数学の問題というものは，もともと穴埋め形式でなくても解けるように作られているのが普通です．ところが，穴埋め形式だと，答えが整数か否かわかってしまうなど，本来問題が解けるのに必要な条件よりも過剰なヒントが与えられていることが多いのです．正統的な数学の問題から見れば，こういった穴埋め形式の問題は欠陥問題といってもよいでしょう．この“穴”を逆手にとって，穴に隠された有益な情報などを活用しようということです．

たとえば，整数解を求めるとき空欄に 1 桁の整数が入ることが前提なら，いざとなったら，10 通りのしらみつぶしで答えが分かります．また，答えの空欄が 1 つだけなら答えは 1 つだけが前提と考えてよいので，答えを「見つける」だけでよく，それ以外の解がないことを証明する必要はありません．

また，記述式なら「整式を求めよ」となる設問でも，穴埋め式なら，例えば「$\boxed{}\,x+\boxed{}$」とするしかなく，1 次式ということも分かっていることになるのです．

本書では，各分野で穴埋め形式の問題でよく出題されるテーマを中心に，まず身につけたい方法を解説したうえで，時間短縮に有効な手法や公式などを紹介していくことにします．

本書の構成

① **タクティクス編**（Tactics（方策）を練れ）

問題の解法がすぐに思い浮かばなかったり，計算が大変そうだったりする場合にはどうするのか．飛ばして他の問題に行くのか．それとも粘ってみるのか．

時間がなくて当てずっぽうでマークしなければならないとき，どうマークすれば当たる確率が高くなるのか．

試験場でこれらについて迷っている暇はない．

この編を読んで，このような実際に試験場で直面するであろう選択肢に迷わないように，確固たる方針をもって試験に臨もう．

② **実践ツール編**（Tool（道具）を持て）

問題を解くのに必要な基本事項，特別な公式や穴埋めの設問だから生かされる裏ワザ的な解法を，単元別にまとめてある．この編はくり返し読んでほしい．各ポイントにチェック欄 □ を設けたので，もう読まなくていいところ，あとでもう一度読んだ方がよいところ，直前にもう一度読んだ方がよいところなどを，自分なりの記号で区別をしておくと効率がよいだろう．数学は暗記科目じゃないと思っている人も，知っていると解く時間が短縮できるなと思った公式は，覚えてしまおう．共通テストのときだけ覚えておいて，終わったら忘れてしまえばよいのだ．

また，各単元の最後には「実践演習」と称し，本書の Tool を最大限に適用した解答例を示した．自分の本番でもこういうふうに満点が取れるんだと，成功を信じて何回も読むことで，ツキを呼び込もう．イメージトレーニングとして使うとよい．

なお，とりあげた問題は，主にセンター試験で出されたものである．

共通テスト必勝マニュアル
数学ⅠA [2023年受験用]

目　次

Tactics編

問題文のどこを読むか

センター試験から共通テストになり，問題文が格段に長くなった．しかも，すべてが解答に必要な情報とは限らない．冒頭から不要な会話が延々と続き，空欄の直前の 1〜2 行に条件が書かれている，なんてこともある．空欄を埋めるのがミッションなのだから，要らないところは飛ばし，時間を節約しよう．具体的には

・まず空欄の近くを読み，何が問題になっているかを把握する

・それに必要な条件をさかのぼって探す

とよいだろう．会話は進行役程度，と考えて基本スルーでいい．重要な条件が書かれていたことはない．ちなみに，会話を含め，ヒントや考え方が書かれていることもあるが，思考のじゃまにしかならないことも少なくない．この程度の問題ではヒントなど必要ない，と思えるくらいに勉強しておこう．

問題の選択と解答順

選択は，場合の数・確率，整数，図形の性質の 3 題から 2 題である．場合の数・確率と整数は 2 次試験では主力分野であることから，この 2 題を選択するのが戦略としては適当だろう．図形の性質は，誘導に乗りにくい問題がときどきある．

成績上位層が解答順を考えないといけないようでは試験の趣旨に反するとも言えそうだが，現実には策が必要である．多くの受験生にとって，配点の割に時間がかかる分野はデータの分析だろう．これを後回しにしておく方が失点を減らせる可能性が高い．

穴埋め形式の積極的活用

数学の問題というのは，穴埋め形式でなくても解けるように作られているのが普通である．ところが，共通テストの数学では，解答方式が空欄補充に

なっているので，答えのおおまかな形が与えられてしまったり，答えが整数か否かがわかってしまったりと，本来問題が解けるのに必要な条件よりも過剰なヒントが与えられている場合が多い．まともな数学の問題から見れば，こういった穴埋形式の問題は欠陥問題といってもよいだろう．この“穴”を逆手にとり，穴に隠された有益な情報を積極的に読み込んでいくことで，速く，正確に，解答に辿り着こうというのが，この本の基本ポリシーのひとつである．

では，穴のどこに着目するか．

① 穴の周りにヒントがある

記述式なら「整式を求めよ．」となる設問でも，穴埋め式だと，例えば「$\boxed{}x+\boxed{}$」とするしかない．答えが半分与えられているのだ．答えがこの形であることを前提に，本来の解答の筋道を逆に辿ることもできる．例えば，2 次関数の □4，図形と計量の □1，□2，図形の性質の □1 などを見よ．

② 穴には整数が入る

共通テストの 1 セットは，いわば巨大な整数問題であるといってもよい．穴に入るのは，ヒトけたの数なのか，2 けたの数なのか，穴に入る数字の個数にも気を配りたい．ヒトけたであれば入る数は高々10 個．シラミツブシも可能である．また，2 つ以上マークする場合は一番左に－，±が入ることがあることに留意しておこう．

③ 論証はいらない

記述式の設問で，「求めよ．」という場合には，解がそれだけしかないことまで示さなければならないが，穴埋め式では，穴の個数しか解がないことを前提としてよい．そのことを証明する必要がないばかりでなく，逆にヒントとして使ってしまってもよい．例えば，p.131 の問題を見よ．

④ 答えが決まることを利用せよ

「$0<x<2$ のとき $\boxed{}$ が成り立つ」（選択肢から選ぶ）というようなときは，$x=1$ のときに成り立つ選択肢が 1 つしかなければそれが答えになる．選択肢が排反（どれか 1 つだけが成り立つ）になっているときは，具体例を考えてみるのは有力である．

ただし，確率の問題に関してはこのスジの積極的利用は望めない．計算間違いのチェックに使えるくらいである．確率だけは記述式と同じと覚悟を決めて取り掛かるしかない．

§1 方程式と不等式，集合と命題

□1　x，y の対称式は，$x+y$，xy を主役に計算せよ．

2 文字 x，y に関する整式 P で x と y を入れ替えたとき，項を並べ替えれば全体として元の式 P と同じになるものを，x，y の対称式という．

x，y の対称式は，必ず $x+y$ と xy で表すことができる．対称式の値を求める際は，$x+y$ と xy を主役に計算すると楽になることが多い．

（1）　$x=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，$y=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ であるとき，

$3x^2-5xy+3y^2=\boxed{\text{アイウ}}$ である．

（2）　$x=\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{8}}$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{8}}$ のとき，

$x^3-y^3=\boxed{\text{エオカ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$ である．

（1）　$x+y=\dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\dfrac{2(3+2)}{3-2}=10$，$xy=1$ により，

$3x^2-5xy+3y^2=3(x+y)^2-11xy=3\times10^2-11=\mathbf{289}$

（2）　$X=-x$，$Y=y$ とおくと，X，Y の対称式に直せる．

$$X+Y=\frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{6}}=\frac{(\sqrt{8}+\sqrt{6})+(\sqrt{8}-\sqrt{6})}{(\sqrt{8}-\sqrt{6})(\sqrt{8}+\sqrt{6})}=\frac{2\sqrt{8}}{2}=2\sqrt{2},$$

$$XY=\frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{6}}=\frac{1}{8-6}=\frac{1}{2}$$ であるから，

$$\begin{aligned}x^3-y^3&=-(X^3+Y^3)=-\{(X+Y)^3-3XY(X+Y)\}\\&=-\left\{(2\sqrt{2})^3-3\cdot\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\right\}=\mathbf{-13\sqrt{2}}\end{aligned}$$

□2　$\sqrt{5}$ の小数部分は $\sqrt{5}-2$

例えば，「$\sqrt{3}$ の小数部分の 2 乗を求めよ」という際に，$\sqrt{3}$ の小数部分を 0.732… とすると行き詰まってしまう．

$A(>0)$ の小数部分は，$A-$（A の整数部分）

とするのがポイントである．$\sqrt{3}$ の小数部分は，$\sqrt{3}\fallingdotseq 1.732$ であるから，$\sqrt{3}-1$ である．したがって，$\sqrt{3}$ の小数部分の 2 乗は，$(\sqrt{3}-1)^2=4-2\sqrt{3}$ である．

● $\sqrt{}$ の近似値

$\sqrt{2}\fallingdotseq 1.41421356$（一夜一夜に人見頃）

$\sqrt{3}\fallingdotseq 1.7320508$（人並みにおごれや）

$\sqrt{5}\fallingdotseq 2.2360679$（富士山麓オウム鳴く）

$\sqrt{6}\fallingdotseq 2.44949$（似よ，よくよく）

$\sqrt{7}\fallingdotseq 2.64575$（［菜］に虫いない）

$\sqrt{8}=2\sqrt{2}\fallingdotseq 2.82843$（ニヤニヤ読み）

$\sqrt{10}\fallingdotseq 3.1622$（［トリコロールは］三色(みいろ)に並ぶ）

● 分母の有理化

$$\frac{1}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}=\frac{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}{a-b}$$ （複号同順）

> $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，
>
> $a^2-4ab-b^2=\boxed{\text{ア}}-\boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$ である．

まずは分母を有理化して，$\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\sqrt{3}+1$

よって，$a=2$，$b=(\sqrt{3}+1)-a=\sqrt{3}-1$ であるから，

$$a^2-4ab-b^2=2^2-4\times2\times(\sqrt{3}-1)-(\sqrt{3}-1)^2=\mathbf{8-6\sqrt{3}}$$

実践演習（目標：20 分で 6 問以上）

次の文中の $\boxed{\qquad}$ にあてはまるものを，下の①～④のうちから選べ.

（1） 整数 n について，n^2 が 12 の倍数であることは，n が 12 の倍数であるための $\boxed{\text{ア}}$.

（2） 自然数 m，n について，m と n がともに 5 の倍数であることは，$m+n$ と mn がともに 5 の倍数であるための $\boxed{\text{イ}}$.

（3） 集合 A，B について，A∪B＝A は A∩B＝B であるための $\boxed{\text{ウ}}$.

（4） 実数 x，y について，$x^2=y^2$ であることは，$x^3=y^3$ であるための $\boxed{\text{エ}}$.

（5） 実数 a，b，c について，$|a+b+c|=|a|+|b|+|c|$ は $ab+bc+ca \geqq 0$ であるための $\boxed{\text{オ}}$.

（6） 3 辺の長さが 2，3，x の三角形が存在することは，$|x-3| \leqq 2$ であるための $\boxed{\text{カ}}$.

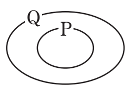
（7） △ABC において，$\cos A \cos B \cos C>0$ であることは，△ABC が鋭角三角形であるための $\boxed{\text{キ}}$.

（8） 三角形 T の内接円の中心と外接円の中心が一致することは，T が正三角形であるための $\boxed{\text{ク}}$.

① 必要十分条件である
② 必要条件であるが，十分条件ではない
③ 十分条件であるが，必要条件ではない
④ 必要条件でも十分条件でもない

【解答の実況中継】

必要十分の問題か．$p \Longrightarrow q$ が真のとき，右図のようになって，p が十分条件，q は必要条件だったな.



（**1**） とりあえず条件を言い換えていこう．整数の基本に素因数分解することがあったな．p : n^2 が $12=2^2\times 3$ の倍数か．このとき n は素因数 2 と 3 をもつな．n が 2×3 の倍数なら，n^2 は $2^2\times 3^2$ の倍数だ.

ということは，n^2 が $12=2^2\times 3$ の倍数 $\Longleftrightarrow$ n が $2\times 3=6$ の倍数で，P : 6 の倍数，Q : 12 の倍数．P⊃Q だから，答えは②だ.

（**2**） p : m，n がともに 5 の倍数，q : $m+n$，mn がともに 5 の倍数を考えるのか．$p \Longrightarrow q$ は明らかに成り立つから，$q \Longrightarrow p$ が成り立つかどうかが問題だ．q が成り立つとき，mn は 5 の倍数で，5 は素数だから m，n の少なくとも一方は 5 の倍数だ．m が 5 の倍数としよう.

第１問 （必答問題）（配点　30）

〔1〕 実数 a，b，c が

$$a + b + c = 1 \quad \cdots\cdots ①$$

および

$$a^2 + b^2 + c^2 = 13 \quad \cdots\cdots ②$$

を満たしているとする。

(1) $(a + b + c)^2$ を展開した式において，① と ② を用いると

$$ab + bc + ca = \boxed{アイ}$$

であることがわかる。よって

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = \boxed{ウエ}$$

である。

（数学Ⅰ・数学A第１問は次ページに続く。）

解説と解答

平均点 37.96

❶［1］ 対称式の計算で易しめです．
［2］ まず，設問の近所の2ページ目から見ましょう．解答に必要な情報は，あとは三角比の表だけです．太郎さんと花子さんの会話は読まなくても解けます．

解 ［**1**］ $a+b+c=1$ ……………①

$a^2+b^2+c^2=13$ ………②

（**1**） $(a+b+c)^2$

$=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

に①，②を代入すると，

$1=13+2(ab+bc+ca)$

∴ $ab+bc+ca=\mathbf{-6}$ ［2点］

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

$=2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)$

$=2\times13-2\times(-6)=\mathbf{38}$ ［2点］

（**2**） $a-b=2\sqrt{5}$ であるから，

$x+y=(b-c)+(c-a)$

$=b-a=\mathbf{-2\sqrt{5}}$ ［2点］

（1）の後半の設問により，

$(2\sqrt{5})^2+x^2+y^2=38$

∴ $x^2+y^2=\mathbf{18}$ ［2点］

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$ により，

$(-2\sqrt{5})^2=18+2xy$

∴ $xy=1$

$(a-b)(b-c)(c-a)$

$=2\sqrt{5}\,xy=\mathbf{2\sqrt{5}}$ ［2点］

［**2**］ 実際の∠BACを α とおく．図1で水平方向と鉛直方向を同じ縮尺にするには，鉛直方向を $\dfrac{1}{4}$ にすればよい．

$$\tan\alpha=\frac{1}{4}\tan\theta=\frac{1}{4}\tan16^\circ\fallingdotseq\frac{0.2867}{4}$$

$$\fallingdotseq\mathbf{0.072}\ ［3点］$$

三角比の表から，

$4^\circ<\alpha<5^\circ$ （**セ**＝②）［3点］

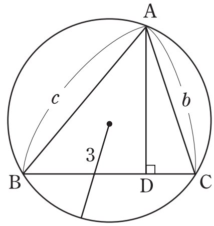
［**3**］（**1**） 正弦定理により，

$$\frac{\mathrm{AC}}{\sin\angle\mathrm{ABC}}=\frac{4}{\sin\angle\mathrm{ABC}}=2\cdot3$$

∴ $\sin\angle\mathrm{ABC}=\mathbf{\dfrac{2}{3}}$ ［3点］

$\mathrm{AD}=\mathrm{AB}\sin\angle\mathrm{ABC}$

$=5\cdot\dfrac{2}{3}=\mathbf{\dfrac{10}{3}}$ ［2点］



（1）では AB＝5
AC＝4

（**2**） $\mathrm{AB}=c>0$，$\mathrm{AC}=b>0$ とおく．AB，AC は外接円の直径以下であるから，

$0<c\leqq6$，$0<b\leqq6$

$2c+b=14$ のとき，$b=14-2c$

∴ $0<c\leqq6$，$0<14-2c\leqq6$

∴ $\mathbf{4\leqq c\leqq6}$ ［3点］ ………①

（1）と同様にして，

$$\sin\angle\mathrm{ABC}=\frac{\mathrm{AC}}{2\cdot3}=\frac{b}{6}=\frac{7-c}{3}$$

$\mathrm{AD}=\mathrm{AB}\sin\angle\mathrm{ABC}$

$=c\cdot\dfrac{7-c}{3}=\mathbf{\dfrac{-1}{3}}c^2+\mathbf{\dfrac{7}{3}}c$ ［3点］

$=-\dfrac{1}{3}\left(c-\dfrac{7}{2}\right)^2+$定数

①のとき，AD は $c=4$ で最大値 **4** をとる．［3点］

⇨注 c が①の範囲をすべて取り得ることは議論してませんが，上の考察程度で穴は埋まります．

①の全体を取り得ることは，例えば次のようにして分かります．A，B を①を満たすように固定したとき，

マニュアルで解いてみよう
2022 年 本試験 数ⅠA・実況中継

選択問題は確率と整数を取ることにしよう．データの分析は，マニュアルにあるように最後に取り組む予定．

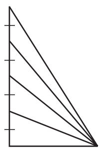
❶ ［1］ これは簡単な式の計算問題．難なくクリア．

［2］ マニュアルにあるように会話は読み飛ばす．鉛直方向が 4 倍になっているということだよね．コ.サシスは，$\tan 16^\circ$ を表で探して 4 で割ればいいね．

セは，高さを 4 等分したら，下の方が角度が大きいから，

$$16 \div 4 = 4^\circ$$

より大きいよね．



［3］(1) 正弦定理で即答

(2) AB の範囲？ $2\mathrm{AB}+\mathrm{AC}=14$ から，$\mathrm{AB} \leqq 7$？ いやいや円の直径は超えないだろう．$\mathrm{AB} \leqq 6$．下の方も $\mathrm{AC}=6$ のときを考えて，$4 \leqq \mathrm{AB}$．

AD を AB で表す式？ (1)と同じようにして AB と AC で AD を表した後，$2\mathrm{AB}+\mathrm{AC}=14$ を使って AC を消去したんだな．この手順で解いて AD の式を求め，平方完成で最大値を求める．無事にこなせた．

❷ ［1］(1) イ $x=1$ は共通解．引っかかってはいけない．

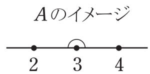
(2) ウ，エ 一方は 2 つの方程式が共通解を持つ場合，もう一方は片方の方程式が重解を持つ場合で答えを埋めた（本当は，重解をもつとき，共通解でないことを考えないとダメだったけど，答えは合っていた）．

(3) オ ③のグラフであれば，q が増えれば y 軸方向に平行移動で答えは⑥．

カ 頂点の x 座標が $-\dfrac{q}{2}$ なので，q が 1 から増えれば頂点は x 軸の負の方向に移動．点線グラフと実線のグラフの交点が $(0,\ -6)$ で，点線グラフの頂点も実線グラフの頂点もこれの左側になければいけない．これらを満たすのは①しかない．

(4) $5<q<9$ を満たすすべての q に関して，キ，クのような結論が出るの？ 作る方は大変かもしれないけど，解く方は q の決め打ちで解きゃあいいんだよ．

しかも，q が 9 よりちょっと小さいときを考えれば，A は 3 の近くしかないからね．



B の方は，$x^2+9x-6<0$ を解くまでもない．$x=3$ のとき上式の左辺は 30 で，$x=3$ の近くは上式を満たさないので，A と B には共通部分がない．つまり，必要条件でも十分条件でもない．

$\overline{A}$ は $x=3$ のちょっと周りを除いたものなので，$B \subset \overline{A}$．十分条件であるが必要条件ではない．

［2］のデータの分析は後回し．

❸ この問題は類題を解いたことがあったぞ．一息つくことができたなあ．

❹ (3)の中ほどの 3 行がよくわからないけれど，(2)から 5^8 を 2^5 で割った余りが 1 と分かるので，$x=5^3$ でいいんだよね．(4)も(3)までの流れで解いたぞ．

❷ ［2］ データの分析．これは粛々と解くしかないのだが，それにしてもキツい．相関係数の計算はやればできるはずなのだが……．散布図を選んだあと計算した．時間ギリギリでセーフ．

あとがき

共通テストは，問題設定のための文章や誘導のための文章などが長いでしょうから，そこから必要な情報を取り出す時間がかかり，試験時間が厳しいと考えられます．問題の主旨が分かったら，素早く答えを埋めたい，あるいは，共通テストレベルを効率よく身につけたい，そんな要求にこたえようというのが本書です．

共通テストレベルを押さえるのに，教科書から始めるのは効率が悪いでしょう．どこが重要で，どんなタイプの問題を押さえて行けばよいのかが書かれていないからです．そこで本書では各単元で押さえておきたいポイント（ツール）を，印象深く，要領よくまとめました．それが，枠で囲った網掛けの部分です．各単元を初めから読んでみて，もしも分からないところが出てきたら教科書などにあたりましょう．最初に教科書に取り組むのではなく，本書から取り組む方が効率的なはずです．

また，共通テストでは，各問の最後の設問は，難易度が高い割に配点がさほど高くないものが出される可能性が高いです．そんな設問では，解答がすぐに思い浮かばない場合や，時間がかかりそうだなっと思った場合には，とりあえず飛ばしてあとに回した方がよいでしょう．あまり意気込むと，ブレーキが利かなくなるものです．柔軟な姿勢で臨みましょう．

本書が皆さんのお役に立つことを願ってやみません．

共通テスト必勝マニュアル
数学ⅠA［2023年受験用］

令和4年 8 月 22 日 第1刷発行

定　価　本体 1,300 円＋税

編　者　東京出版編集部
発行人　黒木憲太郎

印刷所　光陽メディア

発行所　**東京出版**
〒 150-0012　東京都渋谷区広尾 3-12-7

電　話　(03) 3407-3387
振　替　00160-7-5286
https：//www.tokyo-s.jp/

ISBN978-4-88742-267-4