

はじめに

月刊「大学への数学」の増刊号として、2002年から『合否を分けたこの1題』を刊行して来ました。

その増刊号の特徴は、

- ・大学（学部）ごとに、その年の「合否を分けたこの1題」を厳選
- ・入試突破に必要なレベルが分かり、今後の勉強の指針となる
- ・問題ごとに、それを解くのに必要な手法や定理などを詳しく説明。問題によってはその背景や周辺の話題、類題も解説

です。

その過去3年分の増刊号で取り上げた問題をまとめて書籍にしたものが本書「この問題が合否を決める！2019～2021年入試」です。過去3年分について同じようなテーマの重複をなくし、73題を精選しました。

本書の特徴は、

- ・最近の入試傾向に沿った“重要問題”に一通りあたることができる
- ・どの問題からも始められる
- ・1題1題詳しい解説がしてある

とまとめることができるでしょう。

（なお、原則として、本書の解説は、増刊号をそのまま転載しています。「なぜこの1題か」も出題当時に書かれたものです。出題年度を表示するなどはしていません。）

本書で取り上げる問題は、やや程度の高い、入試の典型問題、融合問題、総合問題です。

この本では、次のような使い方を想定しています。

入試の標準問題にほぼ一通りあたった人、

たとえば、

「1対1対応の演習」シリーズや、

「新数学スタンダード演習」

「数学Ⅲスタンダード演習」

をほぼ終えた人が、

さらなるレベルアップを図る

あるいは

総仕上げのために用いる

などです。

また、本書の問題編は、原則として

見た目の分野で分類

（複数の分野にまたがるときは主要な1つ）

したので、分類のタイトルがヒントになることはなく、実戦的な演習をするのに最適です。

見た目だけで分類したので、たとえば「座標」の問題を解くにも、場合によっては、数Ⅲの知識が必要になることもあります。数Ⅲが必要でない問題を解きたいという場合もあるでしょうから、p.4にどれが文系範囲（数ⅠAⅡB）の問題か分かるようにしました。

いろいろな使い方に配慮した本書で、より実戦力をつけていって下さい。また、今年の増刊号『合否を分けたこの1題』（7月末日発売予定）とは問題が重複していない（入試年度が違う）ので、併せて活用すると、より効果的でしょう。

本書の構成と利用法

本書の対象者などは、前ページで述べました。次に、本書の構成などを説明しましょう。本書は大きく問題編（p.5～30）と解説編（p.31～247）に分かれています。

○問題編

見た目の分野で分類しました。その分類のタイトルが解く上でのヒントとなることはほとんどありませんので、実戦的な演習をするのに最適です。p.4 にどれが文系範囲の問題か分かるようにしてあります。

○解説編

問題文の右上に、その年のセットがどのようなものであったか分かるように、各問の難易、目標時間、分野をまとめたものを掲載しました。また、取り上げた問題の番号を③、それ以外を①のように表しました。

*

*

「なぜこの1題か」：その問題が合否を分けた1題となっている理由を書いています。入試傾向の分析などについての情報を盛り込んでいる場合もあります。最後に、その問題について、何分くらいで解いたらよいのかなどの「目標」をコメントしています。

「解答」：実際の答案ではこの程度で十分と思われる詳しさで書いていますが、その行間等を補うために解答の右側に傍注として、なぜそのような解法をとったのか、あるいは使った定理、公式などの補足、また、どんな計算や工夫をしているのか、などの説明を加えました。

「解説」：その問題を解くのに必要な手法や定理をここで詳しく説明しました。また、問題によってはその背景や周辺の話、類題にも踏み込みました。

「受験報告」：これは、実際に入試を受けてこられた「大学への数学」の読者のみなさんから届いた手紙などからこの1題として取り上げた問題を中心に紹介したものです。試験においてどう解いたのか、またどのくらいの時間がかかったのか、出来具合はどのようであったのかなどが書かれています。大半が試験当日、あるいは翌日に書かれた生々しいものであり、非常に参考になることが多いはずですが、

○本書で学習するにあたって

普段の学習での問題演習においては、その分野の理解

が目標であるので、解答にかかった時間をあまり気にすることはありません。しかし、本書で、合否を分けたかどうかをテーマにして学習する場合は、実際の試験を想定して、とりあえず30分でできるだけ多く得点できるような解き方をして下さい。さらに、完答するのにどれだけかかったかをメモしておきましょう。なお、「なぜこの1題か」の「目標」のところに時間についてコメントのある場合もあります。時間を意識して演習することで、より志望大学のレベルが分かり、今後の勉強の指針となるでしょう。

*

*

以上の方法を入試直前期に行えば、かなり実戦的で、効果的な演習となることでしょう。

◇解説編の記号について

・問題文の右上で使っている記号（C** など）
問題の難易は、入試問題を10段階に分けたとして、

A(基本)…5以下、B(標準)…6, 7,
C(発展)…8, 9, D(難問)…10

目標時間は*1つにつき10分、○は5分である。
平均的な難関校志望者が入試直前期において、自分の力を出しきれた場合を基準にしている。

分野は、出題時点のもので、I…数I、II…数II、III…数III、A…数A、B…数Bである。

例えば、「① B** B/ベクトル」とあれば、標準問題で目標時間は20分、数学Bのベクトルの問題であることを意味する。

・解答・解説で現れる記号

解答の③解などにつけた☆、★について、

☆ 巧妙であるが、ぜひ身につけて欲しい解法
★ 相当に巧妙で、思いつかなくても心配のいらない解法

次に、主に解答の最後にある注意事項について、

⇒注 すべての人のためのもの

➡注 意欲的な人のためのもの

また、■はコメントを意味するマークで、

■ すべての人のためのもの

■ 意欲的な人のためのもの

◇受験報告の出来具合について

○……完答（のつもり）

△……半答（のつもり）

×……誤答・手つかず・ほぼダメ

大学への数学

この問題が 合否を決める!

2019~2021年入試

CONTENTS

はじめに

坪田三千雄

1

本書の構成と利用法

坪田三千雄

2

問題編

5

解説編

31

掲載校一覧(解説編)

北大・理系 19年…… 32	21年…… 90	金沢大・理系19年……144	阪府大・工 21年……200
20年…… 35	防衛医大 19年…… 94	21年……147	19年……204
東北大・理系19年…… 38	21年…… 97	20年……150	近畿大・医 20年……208
21年…… 42	早大・理工系21年……100	名大・理系 21年……154	19年……210
千葉大・理系19年…… 45	20年……102	20年……157	大阪医薬大 21年……212
21年…… 48	19年……104	京大・文系 19年……160	大阪医大 20年……214
筑波大・医系19年…… 52	慶大・薬 20年……106	京大・理系 19年……162	神戸大・理系21年……216
21年…… 54	19年……110	京都府立医大19年……164	19年……220
東大・文系 20年…… 56	慶大・医 20年……114	21年……167	岡山大・理系21年……223
21年…… 58	慶大・理工 21年……118	20年……170	広島大・理系20年……226
東大・理系 19年…… 62	上智大・理工20年……121	同志社大・理系20年……174	徳島大・医歯薬21年……229
一橋大 21年…… 64	21年……124	19年……176	19年……232
20年…… 66	日本医大 20年……128	京都薬大 20年……180	九大・理系 21年……234
東工大 20年…… 68	19年……130	阪大・文系 20年……184	20年……238
東京農工大 21年…… 72	慈恵医大 20年……132	21年……186	熊本大・医 20年……242
医科歯科大 21年…… 74	山梨大・医 19年……135	阪大・理系 20年……188	産業医大 19年……244
19年…… 78	20年……138	19年……190	
20年…… 82	21年……140	阪市大・理系20年……193	
横浜市大・医 20年…… 86	新潟大・理系19年……142	21年……196	

問題編の説明

◇問題の右側の枠囲みについて

一番上に、解説編の頁(太字が解答の頁)を、その下に小社の刊行物に掲載されている類題・参考問題を紹介した(2022年に発売されている本の頁を紹介)。

なお、書名は以下のように略称した。

「入試数学の基礎徹底」……………基礎徹
「数学Ⅲの入試基礎／講義と演習」……………Ⅲ基礎
「新数学スタンダード演習」……………新スタ
「数学Ⅲスタンダード演習」……………Ⅲスタ
「新数学演習」……………新数演
「入試の軌跡」シリーズ……………軌跡
「解法の探求・微積分」……………解探微積
「解法の探求・確率」……………解探確率
「共通テスト必勝マニュアル数学ⅠA」…必マニⅠ
「共通テスト必勝マニュアル数学ⅡB」…必マニⅡ
「1対1対応の演習(新訂版)」シリーズ…1対1
「プレ1対1対応の演習」シリーズ…プレ1対1
「教科書Nextベクトルの集中講義」…ベクトル
「教科書Next数列の集中講義」……………数列
「教科書Next図形と方程式の集中講義」……………図形と方程式
「教科書Next三角比と図形の集中講義」……………三角比
「マスター・オブ・整数」……………整数
「マスター・オブ・場合の数」……………場合の数
「微積分／基礎の極意」……………極意
「数学を決める論証力」……………論証力
「ハッとめざめる確率」……………ハッ確
「解法の突破口[第3版]」……………突破
「数学ショートプログラム」……………ショート
「入試のツボを押さえる重点学習—数学ⅠAⅡB」……………入試のツボ
「難関大入試数学・解決へのアプローチ」……………アプローチ
「難関大入試数学・方針をどう立てるか」…方針
「難関大入試数学・発展していく三角関数」……………三角関数
「難関大入試数学・数列の難問とその周辺」……………数列難問
「思考力を鍛える不等式」……………不等式
「ちょっと差がつくうまい解法」……………うまい

「思考力・判断力・表現力トレーニング」

シリーズ ……トレ

「東大数学で1点でも多く取る方法

理系編」… 東大理系

「東大数学で1点でも多く取る方法

文系編」… 東大文系

「考え抜く数学～学コンに挑戦～」……………学コン

「考え抜く数学理系編～学コンに挑戦～」

……………学コン理系編

「もっと考え抜く数学～学コンの発展問題に挑戦～」

……………もっと学コン

「難関大学受験対策

真・解法への道! 数学ⅠAⅡB」

……………解法への道

文系範囲(数ⅠAⅡB)の問題

p.6～p.18とp.30の合計43題。

ただし、p.6の京都府立医大は(3)まで、p.14の上智大は(2)だけ、p.16の医科歯科大は(2)まで、p.30の産業医大は(1)(2)(4)(6)。

問題編

場合の数・確率	6
整数・数列	9
データの分析	11
関数，複素数，多項式，方程式	12
対数関数・三角関数	13
集合と命題	14
平面図形，座標	15
ベクトル，空間座標，立体図形	16
数Ⅱの微分・積分	18
数Ⅲ（極限）	19
数Ⅲ（微分）	21
数Ⅲ（数式の積分）	22
数Ⅲ（面積，体積，弧長）	24
2次曲線	27
複素数平面	28
小問セット（数Ⅰ～Ⅲ）	30

場合の数・確率

○ 21 防衛医科大学校

A, B, C, D の 4 人で、すべて種類の異なる果物 k 個を分ける。ただし、果物をもらえない者が現れる分け方についても、果物を 4 人で分けたと考える。このとき、以下の間に答えよ。

- (1) $k=5$ のとき、果物の分け方は何通りあるか。
- (2) $k=9$ のとき、A, B, C, D の 4 人のうち、1 人が 0 個、残りの 3 人は少なくとも 2 個以上もらえる果物の分け方は何通りあるか。
- (3) $k=6$ のとき、A, B, C, D の 4 人のうち、1 人が 0 個、残りの 3 人は少なくとも 1 個以上もらえる果物の分け方は何通りあるか。
- (4) A, B, C, D, E の 5 人で、すべて種類の異なる果物 k_0 個を分けるとする ($k_0 > 4$)。このとき、5 人のうち、1 人が 0 個、残りの 4 人は少なくとも 1 個以上もらえる果物の分け方の総数を $\sum_{i=1}^4 a_i i^{k_0}$ と表すとする。ここで、 a_i ($i=1, 2, 3, 4$) は k_0 に無関係な値で、ただ 1 通りに定まる。このとき、 a_3 の値はいくらか。

p.97

場合の数
p.98~99

○ 20 北海道大学

n を 2 以上の自然数とする。1 個のさいころを続けて n 回投げる試行を行い、出た目を順に $X_1, X_2, \dots, X_n$ とする。

- (1) $X_1, X_2, \dots, X_n$ の最大公約数が 3 となる確率を n の式で表せ。
- (2) $X_1, X_2, \dots, X_n$ の最大公約数が 1 となる確率を n の式で表せ。
- (3) $X_1, X_2, \dots, X_n$ の最小公倍数が 20 となる確率を n の式で表せ。

p.35

うまい p.80
2 番

○ 19 京都府立医科大学

n は 2 以上の整数とし、正 $2n$ 角形 K_n を考える。 K_n の $2n$ 個の頂点から異なる 3 個の頂点を選ばず、それらを頂点とする三角形 T をつくる。 T が直角三角形になる確率を p_n とし、 T が鋭角三角形になる確率を q_n とする。

- (1) p_3 と q_3 を求めよ。
- (2) p_n を n を用いて表せ。
- (3) q_n を n を用いて表せ。
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n$ を求めよ。

p.164

場合の数
p.102~103

解説編

右京一美（予備校講師） 小川 功（編集部外部スタッフ） 奥山智彦（塾講師）
高橋和正（編集部外部スタッフ） 中里仁謙（編集部外部スタッフ）
平島邦彦（塾講師） 古川昭夫（数理専門塾主宰） 箕輪浩嗣（予備校講師）
安田 亨（予備校講師） 米村明芳（予備校講師） 東京出版編集部

北海道大学・理系（前期）	32	金沢大学・理系（前期）	144
東北大学・理系（前期）	38	名古屋大学・理系	154
千葉大学・医、薬、理、工学部（前期）	45	京都大学・文系	160
筑波大学・医学群	52	京都大学・理系	162
東京大学・文系	56	京都府立医科大学	164
東京大学・理系	62	同志社大学・理系（全学部日程）	174
一橋大学（前期）	64	京都薬科大学	180
東京工業大学	68	大阪大学・文系	184
東京農工大学	72	大阪大学・理系	188
東京医科歯科大学・医学部（医）	74	大阪市立大学・理系（前期）	193
横浜市立大学・医学部	86	大阪府立大学・工学域（中期）	200
防衛医科大学校（医学科）	94	近畿大学・医学部	208
早稲田大学・理工系（基幹，創造，先進）	100	大阪医科薬科大学	212
慶應義塾大学・薬学部	106	神戸大学・理系（前期）	216
慶應義塾大学・医学部	114	岡山大学・理系	223
慶應義塾大学・理工学部	118	広島大学・理系（前期）	226
上智大学・理工学部（2月7日）	121	徳島大学・医、歯、薬学部	229
日本医科大学	128	九州大学・理系（前期）	234
東京慈恵会医科大学（医）	132	熊本大学・医学部（医）	242
山梨大学・医学部（後期）	135	産業医科大学	244
新潟大学・理系	142		

n を 2 以上の自然数とする. 1 個のさいころを続けて n 回投げる試行を行い, 出た目を順に $X_1, X_2, \dots, X_n$ とする.

- (1) $X_1, X_2, \dots, X_n$ の最大公約数が 3 となる確率を n の式で表せ.
(2) $X_1, X_2, \dots, X_n$ の最大公約数が 1 となる確率を n の式で表せ.
(3) $X_1, X_2, \dots, X_n$ の最小公倍数が 20 となる確率を n の式で表せ.

なぜこの 1 題か

I A II B の①～③にくらべ, 数Ⅲの④, ⑤は難し目である. 類題を経験しているであろう①, ②とその場での瞬発力で漏れ無く重複なく数えあげればよい③を手堅く得点し, 余力で④, ⑤に取りくむことになる.

①は三角形 ABC の外心を O とし, $\overrightarrow{AO}$ を $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ の 1 次結合で表す問題を解いたことがあれば方針が立つ. ただし三角形 OAB, OAC が二等辺三角形であることよりも, 直径に対する円周角が 90° を用いる方が本問ではスムーズ.

②は xy 平面上の直線 $16x+9y=1$ 上の格子点を求める. (2)は 2 辺が x 軸, y 軸に平行または垂直な直角三角形の周および内部の格子点の個数を求めるが, 斜辺が一致するように同じ三角形をもう一つ張りつけ長方形をつくり対称性を利用する.

③はさいころの n 個の目の最大公約数, 最小公倍数と確率との融合. (1)は 2007 年大阪大でも同じものが出題された. 計算量はそれほど多くないので, 条件を満たすさいころの目の出方がどうであればよいかを正しく理解するのが主眼となる. なお理系③の(3)を削除し, (1), (2)だけにしたものが文系③であった.

④は一般項を具体的に表せない数列の極限. 数列を

定める関数を調べるのに時間がかかり, 完答者は少ないと思われる.

⑤は積分で表わされた関数を決定する問題. 過去問を解いた経験が豊富なら $\frac{d}{dx} \int_0^x g(t)dt = g(x)$ を使いたくなるが, それだと後が続かない. 方針転換をして $\int_0^x \frac{f'(t)}{\{1-f(t)\}f(t)} dt = \int_0^x \left(\frac{f'(t)}{1-f(t)} + \frac{f'(t)}{f(t)} \right) dt$ とできれば $f(t)$ の具体的な形が分からなくても積分が実行できる. (2)は e がらみの極限.

$\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e$ などを使えるかが問われる.

北海道大学の WEB サイトに公表されている「採点講評」によれば, 各大問ごとの講評に続き「全般的な注意」として例えば「答案では受験生本人にしか理解できないような記述が多く見られた」とある. 制限時間と緊張感の中, 記述式答案を書き上げるのは大変な作業である. ここでは記述量の多い④, 正答率の低そうな⑤ではなく, 類題の経験やミスなどで差が付きやすい整数と確率の融合③を取り上げる.

【目標】 20 分前後で完答したい.

解 答

(1)(2) まず(1)で, さいころの目について最大公約数が 3 となる場合を考える. これはどの目も 3 か 6 の場合だが全部 6 のケースは不適. 次に最大公約数が 1 となる場合を考える. 今度は「2, 3 が 1 回以上出る」「4, 5 が 1 回以上出る」とかケースが多い. そこで余事象を考えよう. 最大公約数を k とおくと k がとりうるのは 1, 2, $\dots$, 6. $k=2, 3, \dots, 6$ の場合を求め, 全体の 6^n から引くことで $k=1$ の場合を求める.

(3) 最小公倍数が 20 なるのは, 4 と 5 の目が 1 回以上出て, 3 と 6 の目は出ないときである. 1, 2, 4, 5 の目が出るもとで, 少なくとも 1 回 4

が出る場合を A ，少なくとも 1 回 5 が出る場合を B とすると， $n(A \cap B)$ を求めればよい。「少なくとも……」とくれば余事象を使おう。

⇨ $n(X)$ は集合 X の要素の個数を表す。

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, n(\overline{A \cap B}) = n(\overline{A} \cup \overline{B}) = n(\overline{A}) + n(\overline{B}) - n(\overline{A} \cap \overline{B})$$

⇨ 解説

の出番。

*

*

1 個のさいころを n 回投げたときの目の出方は 6^n 通りでこれらは同様に確からしい。 $X_1, X_2, \dots, X_n$ の最大公約数が k ($k=1, 2, \dots, 6$) となる目の出方を $a(k)$ 通りとし， $a(6), a(5), \dots, a(1)$ を求める。

$k=6, 5, 4$ のとき

$k=6$ となる目の出方は「 n 回とも 6 の目が出るとき」で， $a(6)=1$

$k=5, 4$ のときは上の行の 6 をそれぞれ 5, 4 に換え，同様にして

$$a(5)=a(4)=1$$

$k=3$ のとき

目の出方は「 n 回とも 3 または 6 の目が出て（これは 2^n 通り），その中から n 回とも 6 の目が出る（これは 1 通り）場合を除いたもの」

$$\text{で } a(3)=2^n-1$$

⇨ 3 の目が 1 回以上出なければ $k=6$ になってしまう。

$k=2$ のとき

目の出方は「 n 回とも 2 または 4 または 6 の目が出て（これは 3^n 通り），その中から n 回とも 4 が出る（これは 1 通り），および n 回とも 6 が出る（これも 1 通り）場合を除いたもの」で $a(2)=3^n-2$

⇨ 2 が出ない場合を除くわけではない。
4 と 6 の最大公約数は 2 である。なお次のように求めることもできる。

$k=1$ のとき

$$a(1)+a(2)+\dots+a(6)=6^n \text{ より,}$$

$$a(1)=6^n-\{a(2)+a(3)+\dots+a(6)\}=6^n-(3^n-2+2^n-1+1+1+1) \\ =6^n-3^n-2^n$$

k が偶数となるのは「 n 回とも偶数の目が出るとき」で，これは 3^n 通りより， $a(2)+a(4)+a(6)=3^n$
∴ $a(2)=3^n-a(4)-a(6)=3^n-2$

$$(1) \text{ 求める確率は } \frac{a(3)}{6^n} = \frac{2^n-1}{6^n}$$

$$(2) \text{ 求める確率は } \frac{a(1)}{6^n} = \frac{6^n-3^n-2^n}{6^n}$$

(3) $X_1, X_2, \dots, X_n$ の最小公倍数が 20 となる目の出方は「 n 回とも 1 または 2 または 4 または 5 が出て，4, 5 はそれぞれ少なくとも 1 回ずつ出る」とき。

⇨ 4 と 5 は 1 回以上出て 3 と 6 が出ない場合。

1, 2, 4, 5 のいずれかの目が n 回出るのは 4^n 通り。このうち

4 の目が出ないのは 3^n 通り

5 の目が出ないのは 3^n 通り

4 の目，5 の目が両方とも出ないのは 2^n 通り

⇨ 4 の目が出ないのは， n 回とも 1, 2, 5 のどれかが出るとき。

$$\text{以上より求める確率は } \frac{4^n-(3^n+3^n-2^n)}{6^n} = \frac{4^n-2 \cdot 3^n+2^n}{6^n}$$

解説

(受験報告は p.61)

【和集合 $A \cup B$ の要素の個数 $n(A \cup B)$ 】

全体集合 U の部分集合 A と補集合 $\overline{A}$ について，次が成り立つ。

$$(i) \quad n(A)=n(U)-n(\overline{A})$$

$$(ii) \quad n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$$

A の確率を $P(A)$ で表わすと，(ii) を $n(U)$ で割り

$$(iii) \quad P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$$

も成立する。(3)の解答では「少なくとも 1 回」に着目し，この余事象の方が求め易いことを見こしている（事象を「出ない」方に設定している。つまり「 $A: 4$ の目が出ない」，「 $B: 5$ の目が出ない」として(ii)を使って $n(A \cup B)$ を求め，本来求めたい $n(\overline{A \cup B})$ を(i)つま

り $n(\overline{A \cup B}) = n(U) - n(A \cup B)$ として求めた) が、事象を逆に、つまり「少なくとも1回出る」方に設定して次のように機械的に解くこともできる。

(3) 全事象 U と事象 A, B を次のようにおく。

U : n 回とも 1, 2, 4, 5 のどれかの目が出る

A : n 回のうち 4 の目が 1 回以上出る

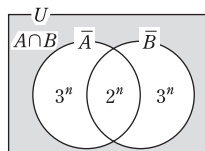
B : n 回のうち 5 の目が 1 回以上出る

[必要なのは $A \cap B$ であるが、 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{A} \cap \bar{B}$ の方が求めやすいので]

$$\begin{aligned} n(A \cap B) &= n(U) - n(\overline{A \cap B}) \quad (\because (i)) \\ &= n(U) - n(\overline{A \cup B}) \\ &= n(U) - \{n(\bar{A}) + n(\bar{B}) - n(\bar{A} \cap \bar{B})\} \\ &\quad (\because (ii)) \\ &= 4^n - (3^n + 3^n - 2^n) \end{aligned}$$

よって求める確率は

$$\begin{aligned} \frac{n(A \cap B)}{6^n} \\ &= \frac{4^n - 2 \cdot 3^n + 2^n}{6^n} \end{aligned}$$



(i)~(iii) および $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ を利用する「~の目が少なくとも~回出る」の類題を紹介しよう。

1 個のサイコロを n 回投げる。

(1) $n \geq 2$ のとき、1 の目が少なくとも 1 回出て、かつ 2 の目も少なくとも 1 回出る確率を求めよ。

(2) $n \geq 3$ のとき、1 の目が少なくとも 2 回出て、かつ 2 の目が少なくとも 1 回出る確率を求めよ。

(00 一橋大)

(1) は北大に類似している。(2) は、まずは機械的に解いてみる。別解として(1)を活用する方法を紹介する。

解 (1) 1 個のサイコロを n 回投げたときの目の出方は 6^n 通りでこれらは同様に確からしい。事象 A, B を

A : n 回のうち 1 の目が 1 回以上出る

B : n 回のうち 2 の目が 1 回以上出る

と置く。 $A \cap B$ の確率 $P(A \cap B)$ は

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= 1 - P(\overline{A \cap B}) \\ &= 1 - P(\overline{A \cup B}) \\ &= 1 - \{P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A} \cap \bar{B})\} \\ &= 1 - \left\{ \left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{4}{6}\right)^n \right\} \\ &= 1 - 2\left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{aligned}$$

(2) 事象 C を

C : n 回のうち 1 の目がちょうど 1 回出る

と置く。

1 の目が少なくとも 2 回

出るとは $A \cap \bar{C}$ であるか

ら求めるのは $(A \cap \bar{C}) \cap B$

となる確率である。なお

$A \supset C$ であり $\bar{A} \cap C = \emptyset$ に注意する。

$$P((A \cap \bar{C}) \cap B) = 1 - P(\overline{(A \cap \bar{C}) \cap B}) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

ここで

$$\begin{aligned} &P(\overline{(A \cap \bar{C}) \cap B}) \\ &= P(\overline{(A \cap \bar{C})} \cup \bar{B}) \\ &= P((\bar{A} \cup C) \cup \bar{B}) \\ &= P(\bar{A} \cup C) + P(\bar{B}) - P((\bar{A} \cup C) \cap \bar{B}) \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

②を順に求める。「 $\bar{A}$: 1 の目が出ない」, 「 C : 1 の目が 1 回出て、残りは毎回 2~6 の目」なので

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cup C) &= P(\bar{A}) + P(C) - P(\bar{A} \cap C) \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^n + {}_n C_1 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - 0 \\ &= \left(1 + \frac{n}{5}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^n \quad \cdots \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

$$P(\bar{B}) = \left(\frac{5}{6}\right)^n \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$P((\bar{A} \cup C) \cap \bar{B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) + P(C \cap \bar{B})$$

($C \cap \bar{B}$ は、1 の目が 1 回だけ、残りは毎回 3~6 の目より)

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{4}{6}\right)^n + {}_n C_1 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{4}{6}\right)^{n-1} \\ &= \left(1 + \frac{n}{4}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \cdots \cdots \textcircled{5} \end{aligned}$$

③, ④, ⑤を②に代入し

$$P(\overline{(A \cap \bar{C}) \cap B}) = \frac{n+5}{5} \left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{5}{6}\right)^n - \frac{n+4}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

これを①に代入し求める確率は

$$P((A \cap \bar{C}) \cap B) = 1 - \frac{n+10}{5} \left(\frac{5}{6}\right)^n + \frac{n+4}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

なお(2)は、(1)から「1 の目がちょうど 1 回出る」つまり $B \cap C$ の確率を引いたもの、を利用すると次の通り。

(2) 求める確率は $P(A \cap B) - P(B \cap C) \quad \cdots \cdots \textcircled{6}$

ここで $P(B \cap C) = P(C) - P(C \cap \bar{B})$

$$= {}_n C_1 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - {}_n C_1 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{4}{6}\right)^{n-1}$$

より、求める確率⑥は(1)の結果も用いて、

$$\begin{aligned} &1 - 2\left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left\{ \frac{n}{5} \left(\frac{5}{6}\right)^n - \frac{n}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^n \right\} \\ &= 1 - \frac{n+10}{5} \left(\frac{5}{6}\right)^n + \frac{n+4}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{aligned}$$

(奥山)

n は 2 以上の整数とし, 正 $2n$ 角形 K_n を考える. K_n の $2n$ 個の頂点から異なる 3 個の頂点を無作為に選び, それらを頂点とする三角形 T をつくる. T が直角三角形になる確率を p_n とし, T が鋭角三角形になる確率を q_n とする.

- (1) p_3 と q_3 を求めよ.
- (2) p_n を n を用いて表せ.
- (3) q_n を n を用いて表せ.
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n$ を求めよ.

なぜこの 1 題か

① カテナリーを題材にして, 面積や弧長を計算する数Ⅲの微積分の問題. (4)では面積と長さの比を求める. 受験生のレベルを考えると落とすことができない.
② 接弦定理, 内接円などを題材に取った平面図形の問題. 最初で, 図形的条件を数式に落とし込めれば,あとはゴリゴリ計算していくことで正解にたどり着ける. 計算間違いをしなければ, 最後まで行くだらう. 幾何の定理をうまく使えるかどうかを考えると, これが今年の最難問だろう.

③ 複素平面の問題. 単位円周上の複素数の扱いに慣れていれば, 誘導が丁寧なので完答できるであろう.
④ 正 $2n$ 角形の頂点から 3 個選んで作る三角形が, 直角三角形, 鋭角三角形になる場合を問う問題. 過去にも会津大で出題例があり (□「場合の数」p.103), 一度解いたことがある受験生に有利であった. 鋭角三角形を問う(3)からが分かれ道である.

【目標】 (1) 5 分 (2) 5 分 (3) 15 分 (4) 3 分位で完答.

解答

- (1) (2)へのウォーミングアップである. 正六角形を実際に描いて状況をとらえ数え上げる.
(2) 正 $2n$ 角形 K_n の $2n$ 個の頂点で外接する円を C とする. 直角三角形の直角の対辺は C の直径になる. 直径を選び, 次に頂点を選ぶ.
(3) 頂点の 1 つを固定して考えればよい. 1 点 P_0 を固定して, これを用いる鋭角三角形を数え上げることにする.
(4) (3)の式で極限を求めるだけ.

⇨ (1)の直角三角形を数えるとき, 直径に着目すればよいことに気づくと (2)につながる.

(1) 図 1

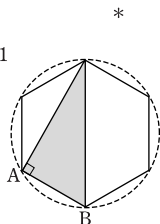
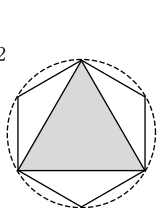


図 2



直角三角形は, 図 1 を回転して得られるものが 6 通り, それを裏返したものが 6 通り. 求める確率は, $p_3 = \frac{6+6}{6C_3} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

⇨ 辺 AB の選び方は 6 通りある.

鋭角三角形は図 2 のものと上下ひっくり返したもので 2 通り. 求める確率は,

$$q_3 = \frac{2}{6C_3} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

(2) 正 $2n$ 角形 K_n の $2n$ 個の頂点で外接する円を C とする. 直角三角形の直角の対辺は C の直径になる.

直径の選び方は n 通り, 直径が決まったときの頂点の選び方は $2n-2$ 通りなので, 直角三角形は $n(2n-2)$ 通り.

$$\text{求める確率は, } p_n = \frac{n(2n-2)}{{}_{2n}C_3} = \frac{n(2n-2) \cdot 3 \cdot 2}{2n(2n-1)(2n-2)} = \frac{3}{2n-1}$$

(3) K_n の頂点に反時計回りに $P_0, P_1, \dots, P_{2n-1}$ ($P_{2n}=P_0$) と名前を付ける.

P_0 を頂点に持つ三角形 $P_0P_iP_j$ のうち鋭角三角形の個数を数え上げる.

鋭角三角形の頂点を反時計回りに P_0, P_i, P_j とする.

2 点の番号の差が n のときその 2 点は直径の両端であることに注意すると, 鋭角三角形のとき, i, j は次を満たす.

$$1 \leq i \leq n-1$$

$$1 \leq j-i \leq n-1$$

$$1 \leq 2n-j \leq n-1$$

これより,

$$1 \leq i \leq n-1$$

$$n+1 \leq j \leq 2n-1$$

$$i+1 \leq j \leq i+n-1$$

これをグラフにまとめると, 図のようになる.

図より, i ($2 \leq i \leq n-1$) に対して, j は $n+1 \leq j \leq i+n-1$ の範囲で選ぶことができるので, 選び方は $i-1$ 通りある.

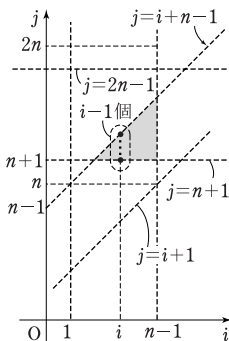
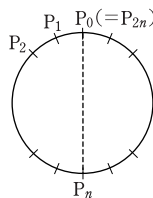
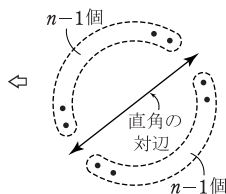
よって, P_0 を頂点に持つ鋭角三角形は,

$$\sum_{i=2}^{n-1} (i-1) = \frac{(n-2)(n-1)}{2} \text{ (通り)}$$

P_0 を頂点に持つ三角形の個数は, P_i, P_j の選び方を考えて ${}_{2n-1}C_2$ 通り

なので, 求める確率は, $q_n = \frac{(n-2)(n-1)}{2} \div {}_{2n-1}C_2 = \frac{n-2}{4n-2}$

(4) (3) により, $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \frac{1}{4}$



■ 鋭角三角形の個数 N を求めると——
 P_0 の選び方で $2n$ 通り, 1 つの鋭角三角形は各頂点ごと数えられ, 3 重に数えているので,

$$N = \frac{(n-2)(n-1)}{2} \times 2n \div 3$$

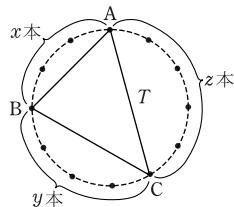
$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{3}$$

$$q_n = \frac{N}{{}_{2n}C_3} = \frac{n-2}{4n-2}$$

解説

【(3) 対応を使って鋭角三角形を数える】

K_n のうち 1 点 (A とする) に着目し, A を用いる T で鋭角三角形になるものを数える. T の頂点に, 反時計回りに A, B, C と名付ける.



図のように AB 間の K_n の辺の本数を x 本, BC 間の K_n の辺の本数を y 本, CA 間の K_n の辺の本数を z 本とする.

$$0 < \angle ACB = 2\pi \times \frac{x}{2n} \times \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2} \quad \therefore 0 < x < n$$

などを用いて, T が鋭角三角形のとき,

$$0 < x < n, 0 < y < n, 0 < z < n \quad \text{.....①}$$

$$x+y+z=2n \quad \text{.....②}$$

が成り立つ. A を用いる鋭角三角形を数え上げるには, これを満たす x, y, z の組を数え上げればよい.

$$a=n-x, b=n-y, c=n-z \text{ とおくと, ①は,}$$

$$0 < a < n, 0 < b < n, 0 < c < n \quad \text{.....③}$$

②は,

$$(n-a) + (n-b) + (n-c) = 2n$$

$$\therefore a+b+c=n \quad \text{.....④}$$

③, ④を満たす整数 a, b, c の組は, 一列に n 個の $\bigcirc$ を並べた列の $n-1$ 個の間に 2 個の区切り $|$ を入れる

と考えて, ${}_{n-1}C_2 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ 通り. 以下略

【(3) 鈍角三角形を数えて】

鈍角三角形を数え上げる.

鈍角三角形の最長辺に対して, 右図の K_n の辺の本数が i 本であるとする.

$i=n$ のとき最長辺は直径になるので, i 本は 2 本から $n-1$ 本の $n-2$ (通り).

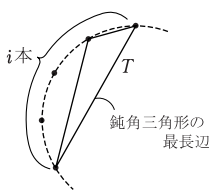
辺 i 本に対応する最長辺を選ぶと, 残る頂点の選び方は, $i-1$ (通り) である. 最長辺の位置は $2n$ 通りあるので, 鈍角三角形の個数は,

$$\sum_{i=2}^{n-1} (i-1) \times 2n = \frac{(n-2)(n-1)}{2} \times 2n = n(n-1)(n-2)$$

[前頁の傍注で述べた鋭角三角形の個数 N の 3 倍になったが, これについては次の「極限の解釈」]

T が鋭角三角形であることは, T が直角三角形または鈍角三角形であることの余事象なので,

$$q_n = 1 - p_n - \frac{n(n-1)(n-2)}{{}_n C_3} = \frac{n-2}{4n-2}$$



【(4) 極限の解釈】

右図のように, 1 つの鋭角三角形 ABC に対して, 3 つの鈍角三角形 (網目) が対応している.

逆に, 1 つの鈍角三角形に対して, 1 つの鋭角三角形と 2 つの鈍角三角形を対応させることができる.

このことから, 「1 つの鋭角三角形」と, 「3 つの鈍角三角形の組」が対応していることが分かる.

鈍角三角形の個数は, 鋭角三角形の個数の 3 倍である.

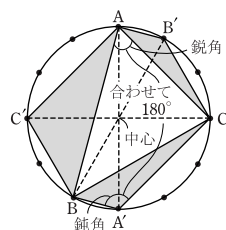
よって, T が鈍角三角形になる確率を r_n とすると,

$$r_n = 3q_n, \quad p_n + q_n + r_n = 1 \text{ である.}$$

$$n \rightarrow \infty \text{ のとき, } p_n \rightarrow 0 \text{ であるから, } r_n + q_n \rightarrow 1$$

$$r_n = 3q_n \text{ と合わせて, } n \rightarrow \infty \text{ のとき, } q_n \rightarrow \frac{1}{4} \text{ となる.}$$

(石井)



受験報告

〇慶應義塾大学・薬学部 (解説は p.110)

▶慶應薬学部の受験報告. 今年は慶大薬も受けてみました. ①(1)から見ていく.

分母の式にギョッとするが, $\sqrt{\quad}$ は簡単に外れ, $-1 < a < \frac{1}{3}$ なので場合分けも不要.

②も見掛け倒し. ③はセンター試験にこういうのがあったかなと思いながら解く. ④は(i)の親切的誘導のおかげで楽勝. ⑤で手が止まり, 先に(7)へ. 大昔の東大で似た問題があった筈. 球の中心を O , BCDE の中心を O' として $\angle BOO' = \theta$ として V を θ の式で表して更に $t = \cos \theta$ に置換してから微分するだけ. ⑥もセンター試験でよくあるタイプ. ⑤に手をつけてみる.

$$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} t \\ -3t+10 \end{pmatrix} \text{ として}$$

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \cos 45^\circ$ に代入して解くと t が二つ得られる. しかし(ii)を見るとどう考えても t は一通りに求められるようで, とりあえず飛ばす (30 分).

③(1)は $a=4$ なので絶対値を外す処理も楽で, $f(x)$ のグラフを描いて求める. ②は a の値の場合分けが生じるもやってみると大したことがなかった. ③は $a=4$ の場合を考えれば良いので, 先程描いたグラフを用いて考える. 面積の導出に工夫の余地がありそうだが, 考える時間が勿体ないので, 普通に

$$\int_{-1}^0 (-2x^2 + 6x + 8) dx + \cdots \text{ のように求}$$

める (55 分). ②(1)は問題なし. ②(2)はとりあえず CCEE——は $3! = 6$ 通り…と初めから順に計算していく. 順番にやっていき, CE——は $5! = 120$ 通り, CI——も同様に 120 通りとしてしまう. 後になってその誤りに気づき, 残り時間が少ないのでパニックになりかけるもどうにか立て直して EECSCNI を出す.

③は C——は $\frac{6!}{2!} = 360$ 通り…とやっていくとすぐにできて $n=1124$ を導く. 結局①(5)は何が悪かったのか気づかないまま終了した. 全体的に昔に比べて簡単になっている気がした.

(受験オタク)

あとがき

毎年の入試から、「合否を分けたこの1題」を集めて刊行してきました。集めてきた問題は良問ばかりで、しかも1題1題じっくり解説してあります。

その2019～2021年で取り上げた問題から、さらに問題を選びすぎり、ほぼ全分野をカバーするように73題を精選しました。

詳しく解説しているので、例えば、p.42の東北大の問題はテイラー展開を背景に持つことが分かります。

また、類題や関連問題も充実しています。例えばp.114の慶大・医の問題は、 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ がテーマなのですが、誘導のつけ方が違う入試問題を「解き比べ」として紹介してあります。

このように関連事項を詳しく解説してありますから、1問1問をより深く理解できるはずです。

みなさんの実力upに役立てて頂ければ幸いです。(坪田)

この問題が合否を決める！ 2019～2021年入試

令和4年6月30日 第1刷発行

定価：本体1,900円＋税

編者 東京出版編集部

発行者 黒木美左雄

発行所 東京出版

〒150-0012 東京都渋谷区広尾3-12-7

電話 (03)-3407-3387

振替 00160-7-5286

URL <https://www.tokyo-s.jp/>

整版所 錦美堂整版

印刷所 光陽メディア

製本所 技秀堂

落丁・乱丁の場合はご連絡下さい。送料弊社負担にてお取替えいたします。

©Tokyo shuppan 2022 Printed in Japan

ISBN 978-4-88742-266-7