はじめに

『1対1対応の演習』シリーズは，入試問題から基本的あるいは典型的だけど重要な意味を持っていて，得るところが大きいものを精選し，その問題を通して

入試の標準問題を確実に解ける力

をつけてもらおうというねらいで作った本です．

さらに，難関校レベルの問題を解く際の足固めをするのに最適な本になることを目指しました．

そして，入試の標準問題を確実に解ける力が，問題を精選してできるだけ少ない題数（本書で取り上げた例題は56題です）で身につくように心がけ，そのレベルまで，

効率よく到達してもらうこと

を目標に編集しました．

以上のように，受験を意識した本書ですが，教科書にしたがった構成ですし，解説においては，高1生でも理解できるよう，分かりやすさを心がけました．学校で一つの単元を学習した後でなら，その単元について，本書で無理なく入試のレベルを知ることができるでしょう．

なお，教科書レベルから入試の基本レベルの橋渡しになる本として『$\boxed{\text{プレ}}$1対1対応の演習』シリーズがあります．また，数ⅠAⅡBを一通り学習した大学受験生を対象に，入試の基礎を要点と演習で身につけるための本として「入試数学の基礎徹底」（月刊「大学への数学」の増刊号として発行）があります．

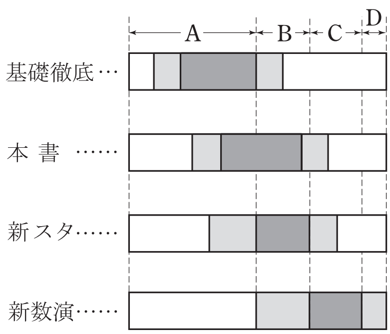
問題のレベルについて，もう少し具体的に述べましょう．入試問題を10段階に分け，易しい方を1として，

1〜5の問題……A（基本）
6〜7の問題……B（標準）
8〜9の問題……C（発展）
10の問題………D（難問）

とランク分けします．この基準で本書と，本書の前後に位置する月刊「大学への数学」の増刊号

「入試数学の基礎徹底」（「基礎徹底」と略す）
「新数学スタンダード演習」（「新スタ」と略す）
「新数学演習」（「新数演」と略す）

のレベルを示すと，次のようになります．（濃い網目のレベルの問題を主に採用）



本書を活用して，数Aの入試への足固めをしていってください．

皆さんの目標達成に本書がお役に立てれば幸いです．

本書の構成と利用法

坪田三千雄

本書のタイトルにある‘1対1対応’の意味から説明しましょう．

まず例題(四角で囲ってある問題）によって，例題のテーマにおいて必要になる知識や手法を確認してもらいます．その上で，例題と同じテーマで1対1に対応した演習題によって，その知識，手法を問題で適用できる程に身についたかどうかを確認しつつ，一歩一歩前進してもらおうということです．この例題と演習題，さらに各分野の要点の整理（4ページまたは2ページ）などについて，以下，もう少し詳しく説明します．（なお，本書では，数ＩＡに限定すると窮屈なときは，無理に限定せず，数Ⅱ等の内容に一部踏み込んでいます．）

要点の整理：　その分野の問題を解くために必要な定義，用語，定理，必須事項などをコンパクトにまとめました．入試との小さくはないギャップを埋めるために，一部，教科書にない事柄についても述べていますが，ぜひとも覚えておきたい事柄のみに限定しました．

例題：　原則として，基本～標準の入試問題の中から

・これからも出題される典型問題
・一度は解いておきたい必須問題
・幅広い応用がきく汎用問題
・合否への影響が大きい決定問題

の56題を精選しました（出典のないものは新作問題，あるいは入試問題を大幅に改題した問題）．そして，どのようなテーマかがはっきり分かるように，一題ごとにタイトルをつけました（大きなタイトル／細かなタイトル の形式です）．なお，問題のテーマを明確にするため原題を変えたものがありますが，特に断っていない場合もあります．

解答の**前文**として，そのページのテーマに関する重要手法や解法などをコンパクトにまとめました．前文を読むことで，一題の例題を通して得られる理解が鮮明になります．入試直前期にこの部分を一通り読み直すと，よい復習になるでしょう．

解答は，試験場で適用できる，ごく自然なものを採用し，計算は一部の単純計算を除いては，ほとんど省略せずに目で追える程度に詳しくしました．また解答の右側には，傍注（⇦ではじまる説明）で，解答の補足や，使った定理・公式等の説明を行いました．どの部分についての説明かはっきりさせるため，原則として，解答の該当部分にアンダーライン（——）を引きました（容易に分かるような場合は省略しました）．

演習題：　例題と同じテーマの問題を選びました．例題よりは少し難し目ですが，例題の解答や解説，傍注等をじっくりと読みこなせば，解いていけるはずです．最初はうまくいかなくても，焦らずにじっくりと考えるようにしてください．また横の枠囲みをヒントにしてください．

そして，例題の解答や解説を頼りに解いた問題については，時間をおいて，今度は演習題だけを解いてみるようにすれば，一層確実な力がつくでしょう．

演習題の解答：　解答の最初に各問題のランクなどを表の形で明記しました（ランク分けについては前ページを見てください）．その表にはA*，B*°というように*や°マークもつけてあります．これは，解答を完成するまでの受験生にとっての“目標時間”であって，*は1つにつき10分，°は5分です．たとえばB*°の問題は，標準問題であって，15分以内で解答して欲しいという意味です．高1生にとってはやや厳しいでしょう．

ミニ講座：　例題の前文で詳しく書き切れなかった重要手法や，やや発展的な問題に対する解法などを1～2ページで解説したものです．

コラム：　その分野に関連する興味深い話題の紹介です．

本書で使う記号など：　上記で，問題の難易や目標時間で使う記号の説明をしました．それ以外では，⇨**注**は初心者のための，➾**注**はすべての人のための，➡**注**は意欲的な人のための注意事項です．

1対1対応の演習

数学A 三訂版

目 次

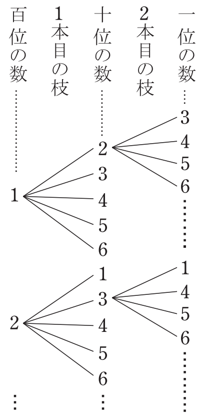
場合の数
要点の整理

1．順列・組合せ

6 枚のカード $\boxed{1}\,\boxed{2}\,\boxed{3}\,\boxed{4}\,\boxed{5}\,\boxed{6}$ から 3 枚を選んで横一列に並べ，3 桁の自然数を作るとしよう．

右のような樹形図を書くと，

- 百位の数は 6 通り．
- 1 本目の枝は，百位の数 1 つにつき 5 本．よって十位の数には 6×5 個の数が並ぶ．
- 2 本目の枝は，十位の数 1 つにつき 4 本．よって一位の数には 6×5×4 個の数が並ぶ．



となって，3 桁の自然数は

6×5×4＝**120** 個できることがわかる．

一般に，異なる n 個のものから r 個を選び，その r 個を一列に並べて得られるもの（**順列**という）の個数は

$$n(n-1)\cdots\cdots(n-(r-1)) \quad [r\text{ 個の数の積}]$$

であり，これを ${}_n\mathrm{P}_r$ という記号で表す．階乗（1 から n までの n 個の自然数の積を n の階乗といい，$n!$ で表す）の記号を用いると，

$$\boldsymbol{{}_n\mathrm{P}_r=\frac{n!}{(n-r)!}}$$

と書ける．

次に，上の 6 枚のカード $\boxed{1}$～$\boxed{6}$ から 3 枚を選ぶ（どの 3 枚が選ばれたかだけに着目する）ときに選び方が何通りあるかを考えよう．この選び方を**組合せ**という．

3 枚の組合せ 1 通りに対して，順列（3 桁の自然数）は ${}_3\mathrm{P}_3=3!=3\cdot2\cdot1=6$ 通りできるから，3 枚の組合せが x 通りあるとすると，

$$x\times6=120 \qquad \therefore\ x=\mathbf{20}$$

となる．

一般に，異なる n 個のものから r 個を選ぶ組合せの個数を ${}_n\mathrm{C}_r$ で表す．上と同様に

$${}_n\mathrm{C}_r\times{}_r\mathrm{P}_r={}_n\mathrm{P}_r$$

であるから，

$$\boldsymbol{{}_n\mathrm{C}_r=\frac{{}_n\mathrm{P}_r}{{}_r\mathrm{P}_r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

となる．実際の数値計算は，$(n-r)!$ を約分した形

$${}_n\mathrm{C}_r=\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-(r-1))}{r!}$$

［分子は r 個の自然数の積で n から 1 ずつ減らしていく］ですることが多い．また，$r>n/2$ のときは

$${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}$$

を活用して r を小さくしておくとよい．なお．②は①を用いても確かめられるが，「n 個から r 個を選ぶことと（ここで選ばれなかった）$n-r$ 個を選ぶことは同じ」と考えれば明らかである．

例題 1． A，A，B，B を並べてできる 4 文字の文字列は全部でいくつあるか．

数え上げ（全部の文字列を書く）でできる程度の個数であるが，辞書式に書き出していかないと間違える可能性が高くなる．この例題では，

AABB，ABAB，ABBA，
BAAB，BABA，BBAA

とすれば過不足がないことが明白．答えは 6 個である．

計算でも求めてみよう．文字列は順列であるが，例えば 1 文字目は A か B で 2 通り，2 文字目も 2 通り，のようにするとうまくいかない．AA の次は B しかないが，AB の次は A でも B でもよく，単純にかけ算で求めることはできない．

同じものを含む順列では，最初に文字を配置する場所を用意しておき，どの文字をどこに配置するか，と考えるとよい．

$\boxed{1}\,\boxed{2}\,\boxed{3}\,\boxed{4}$

この例題では，「A を配置する 2 か所を選ぶ」と考える．残り 2 か所は B になって文字列が 1 つ決まるので，求める個数は「4 個から 2 個を選ぶ組合せの個数」で

$${}_4\mathrm{C}_2=\frac{4\cdot3}{2\cdot1}=\mathbf{6}\ \textbf{(個)}$$

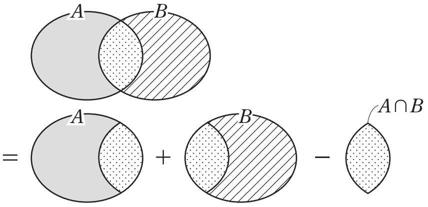
となる．

2. 和の法則

和集合の要素の個数に関する公式

$$\boldsymbol{n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)} \cdots ③$$

は特に重要である（$n(X)$ は集合 X の要素の個数を表す）．公式の丸暗記より，



のようなイメージを大切にしよう．

> **例題 2.** 6 枚のカード 1 2 3 4 5 6 から 3 枚を選び，横一列に並べて 3 桁の自然数を作る．1 または 2 を含む自然数はいくつあるか．

まず，上の公式を使って解いてみよう．1～6 の中の 3 枚を並べてできる自然数のうち，1 を含むもの全体の集合を A，2 を含むもの全体の集合を B とする．

$n(A)$ について： 1 を含む 3 枚のカードの組合せは，1 以外の 2 枚の組合せを考えればよく，${}_5C_2=10$ 通り．3 枚のカードの組合せ 1 通りに対して並べ方（並べてできる自然数）は $3!=6$ 通りあるから，$n(A)=10\times6=60$

$n(B)$ について： 同様に $n(B)=60$

$n(A\cap B)$ について： 1 2 を含む 3 枚のカードの組合せは，残りの 1 枚を考えて 4 通り．並べ方は各 6 通りだから，$n(A\cap B)=4\times6=24$

以上より，

$$\begin{aligned}n(A\cup B)&=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\\&=60+60-24=\mathbf{96}\ \textbf{（個）}\end{aligned}$$

＊　　　　＊

例題 2 の解答としてはこれでよいのであるが，実は全体から条件を満たさないものを引く方が早い．$\overline{X}$ で「全体集合 U の要素であって X の要素でないもの」（X の補集合という）を表すとき，

$$n(X)=n(U)-n(\overline{X}) \cdots\cdots ④$$

が成り立つことを用いる．

例題 2 では，求めたいものの補集合は「1 も 2 も含まない自然数」であるから，3 4 5 6 から 3 枚を選んで横一列に並べて作られる自然数である．それは ${}_4P_3=4\cdot3\cdot2=24$（個）あるから，全体（${}_6P_3=120$ 個）から引いて 96 個が答えとなる．

＊　　　　＊

公式③は，第 1 の解法のように，求めたいものが左辺で実際に計算するのは右辺，という使い方をすることが多い．これは，「または」の条件より「かつ」の条件の方が扱いやすいことが多いからである．第 2 の解法は，ド・モルガンの法則（本シリーズ数Ⅰ p.68）

$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B},\ \overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$$

を用いて「または」を「かつ」に変換している．④で $X=A\cup B$ とし，ド・モルガンの法則の後者を使うと

$$n(A\cup B)=n(U)-n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(\overline{A}\cap\overline{B})$$

となる．$\overline{A}\cap\overline{B}$ を日本語で書いたものが「1 も 2 も含まない」である．

なお，④は「少なくとも 1 つ…」というときに使うことが多い．これを否定すると「すべてが…でない」となって扱いやすいからである．

3. 区別する・しない

場合の数の問題では，人は区別する，モノや文字は区別しないのが前提（暗黙の了解）である．問題文に明記されていなければこのルールに従う．

最終的な答えはこれに従って求めなければならないが，「とりあえず区別する」のは自由である．例えば，例題 1 で 2 つの A，2 つの B をそれぞれ区別して A_1，A_2，B_1，B_2 とすると，これらの順列は $4!$ 通りある．区別のない文字列 1 つについて，どちらの A を A_1 にするか，どちらの B を B_1 にするかが 2 通りずつあって，区別する文字列 4 通り（$4=2\times2$）と対応する．従って求める個数は $\dfrac{4!}{2\times2}=6$（個）とすることもできる．

1 順列／整数・和

袋の中に1から5までの整数が1つずつ記入されたカードが各1枚ずつ全部で5枚入っている．この中から1枚ずつもとに戻さずに，3枚のカードを取り出して順に並べ，3桁の整数をつくる．

（1） このようにしてつくられる整数は全部で $\boxed{}$ 個ある．

（2） 偶数である整数は $\boxed{}$ 個ある．

（3） 3の倍数である整数は $\boxed{}$ 個ある．

（4） （1）の整数のすべての和は $\boxed{}$ である．（帝京大／一部変更）

制約の強い桁から （1）は百の位（5通り）⇨十の位（4通り）⇨一の位（3通り）と考えていけばよい．（2）は，制約のある一の位（2か4）を先に決めると一つの式で求められる．

3の倍数は桁の数字の組合せを決める ある整数が3の倍数であるための条件は，桁の数字の和が3の倍数であること．よって，1〜5の中から和が3の倍数になる3つの数を選び，それらを並べかえて3桁の整数にする（並べ方は自由）．

和は桁ごとに計算 和の計算は桁ごとに行うのがポイント．傍注を参照．

解 答

（1） 百の位は5通り，それを決めると十の位は4通り，さらに一の位は3通りの選び方があるので，全部で $5\times4\times3=$ **60** 個．

⇦どの桁から決めてもよい．

（2） 一の位は2か4なので2通り，それを決めると十の位は4通り，さらに百の位は3通りの選び方があるので，偶数は $2\times4\times3=$ **24** 個．

（3） 1〜5の中の異なる3つの数で，和が3の倍数になるものは

和が6…$1+2+3$　　和が9…$1+3+5$，$2+3+4$

和が12…$3+4+5$

より $\{1,2,3\}$，$\{1,3,5\}$，$\{2,3,4\}$，$\{3,4,5\}$．それぞれを並べかえてできる整数はすべて3の倍数で，異なる3数の並べ方は $3!$ 通りあるから，答えは $4\times3!=$ **24** 個．

⇦使わない2数の組合せを調べるのもよい．1〜5の和が15なので，使わない2数の和も3の倍数で，$1+2$，$1+5$，$2+4$，$4+5$．

（4） すべての整数を桁ごとに足す．

百の位： 1＊＊，2＊＊，3＊＊，4＊＊，5＊＊ は $4\times3=12$ 通りずつあるので，和は $(100+200+300+400+500)\times12=18000$

十の位： ＊1＊，＊2＊，＊3＊，＊4＊，＊5＊ は $4\times3=12$ 通りずつあるので，和は $(10+20+30+40+50)\times12=1800$

一の位： ＊＊1，＊＊2，＊＊3，＊＊4，＊＊5 は $4\times3=12$ 通りずつあるので，和は $(1+2+3+4+5)\times12=180$

以上を合わせて，$18000+1800+180=$ **19980**

⇦$123=100\times1+10\times2+1\times3$
$\vdots$
$351=100\times3+10\times5+1\times1$
$\vdots$
$543=100\times5+10\times4+1\times3$
網目部それぞれの和を計算する．

1 演習題（解答は p.20）

5個の数字0，1，2，3，4を使って3桁の整数を作る．ただし，百の位は0ではなく，同じ数字は1回しか使わない．

（1） 3桁の整数は何通りあるか．

（2） 3桁の偶数は何通りあるか．

（3） 132より大きい整数は何通りあるか．

（4） （1）の全ての整数を合計するといくつになるか．（新潟国際情報大）

例題と同様に考えるが，百の位は0でないので注意が必要

2 順列／隣り合う・かつとまたは

YAKKADAIの8文字を並べて得られる順列について考える．

（1） その並べ方は $\boxed{}$ 通りある．

（2） AAAまたはKKの並びを含むものは $\boxed{}$ 通りある．　（東京薬科大・生命／設問の一部）

同じものを含む順列　同じ文字は区別しないので，（1）は8!通りではない．このような問題では，文字を配置する場所を$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}\boxed{6}\boxed{7}\boxed{8}$と用意しておき，同じ文字を置く場所を一度に選ぶと考えるとよい．例えば，3つのAの場所を最初に選ぶとすると，選び方は ${}_8C_3$ 通りある．これを繰り返して求める（どの文字からやっても結論は同じ）．

隣り合うものは一つにまとめる　AAAの並びを含むものは，これを1文字 $\boxed{\text{AAA}}$ とみて並べる．

「または」の処理　条件が X または Y の形をしているときは，和の法則

$n(X\cup Y)=n(X)+n(Y)-n(X\cap Y)$　［$n(X)$ は集合 X の要素の個数］　を用いる．

解 答

（1） 8文字（A3個，K2個，Y，D，I）を配置する8か所（右図）から，まず3つのAを置く場所を選ぶと ${}_8C_3$ 通りある．次に，残りの5か所からKを置く2か所を選ぶと ${}_5C_2$ 通りある．さらに残った3か所にY，D，Iを入れる（順に3通り，2通り，1通り）と考えて，求める場合の数は

$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}\boxed{6}\boxed{7}\boxed{8}$

⇦ ${}_8C_3$ を ${}_8P_3$ としてしまうと，3つのAを区別することになるので誤り．

$${}_8C_3\times{}_5C_2\times3\times2\times1=\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2}\times\frac{5\cdot4}{2}\times6=56\cdot10\cdot6=\mathbf{3360}\text{（通り）}$$

（2） AAAを含む順列は，これを1文字とみて $\boxed{\text{AAA}}$，K，K，Y，D，Iの6文字を並べると考えて，${}_6C_2\times4!=15\times24=360$ 通り．

⇦ Kは隣り合うものも隣り合わないものも含む．

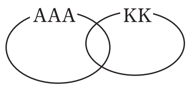
KKを含む順列は，これを1文字とみてA，A，A，$\boxed{\text{KK}}$，Y，D，Iの7文字を並べると考えて，${}_7C_3\times4!=35\times24=840$ 通り．

⇦ Aは隣り合うものも隣り合わないものも含む．

AAA，KKの両方を含む順列は，それぞれ1文字とみて $\boxed{\text{AAA}}$，$\boxed{\text{KK}}$，Y，D，Iを並べると考えて，$5!=120$ 通り．

以上より，求める場合の数は

$360+840-120=\mathbf{1080}$（通り）



2 演習題（解答は p.20）

（ア） YAKKADAIの8文字を並べて得られる順列について考える．YがDより左にあり，かつDがIより左にある並べ方は $\boxed{}$ 通りある．

（東京薬科大・生命／設問の一部）

（イ） V，E，T，E，R，I，N，A，R，Yの10文字を1列に並べるとき，同じ文字が隣り合わないような並べ方は何通りか．　（酪農学園大・獣医）

（ア） YDIの順に並ぶ．例題（1）の解答と同じ順に決めると，…
（イ） 条件を満たさないものを数える

場合の数
演習題の解答

1…B**○	**2**…B**○	**3**…B*○
4…B**	**5**…B***	**6**…C**
7…C**	**8**…B***	**9**…B**B*
10…B**	**11**…B***	**12**…C**○

1 （1） 百の位だけ制約がある（0 でない）から百の位を先に決める．
（2） 百の位と一の位に制約がある．百の位で分類するのが素直だが，奇数の方を数える手もある．
（3） 132 以下のものを調べて全体から引くのがよい．
（4） 桁ごとに和をとる．

解 （1） 百の位は 1～4 の 4 通りあり，それを決めると十の位は（0～4 のうちの百の位を除く）4 通りあり，さらに一の位はそれら以外の 3 通りの決め方があるので，答えは $4\times4\times3=$**48 通り**.
（2） 百の位が 1 のとき，一の位は 0，2，4 の 3 通り，十の位は残った 3 通りで $3\times3=9$ 通り．百の位が 3 のときも同数ある．
百の位が 2 のとき，一の位は 0，4 の 2 通り，十の位は 3 通りで $2\times3=6$ 通り．百の位が 4 のときも同数.
よって，$9\times2+6\times2=$**30 通り**.
（3） 132 以下のものは，百の位は 1 で十の位は 3 以下だから 102，103，104，120，123，124，130，132 の 8 通り．全体からこれを除き，$48-8=$**40 通り**.
（4） 百の位が 1 のもの，2 のもの，3 のもの，4 のものはいずれも 4×3 通りあるから，（1）の整数全部の百の位の合計は $(100+200+300+400)\times4\times3$
十の位が 1 のものは，百の位が 3 通り，一の位が 3 通りある．十の位が 2，3，4 のものも同数ずつあるので，十の位の合計は $(10+20+30+40)\times3\times3$
一の位も同様に，合計は $(1+2+3+4)\times3\times3$
以上を合わせて，$1000\times12+100\times9+10\times9=$**12990**

別解 （2） 奇数は，一の位（1 か 3），百の位（一の位と 0 を除く 3 通り），十の位（3 通り）の順に考えて $2\times3\times3=18$ 通り．偶数は $48-18=$**30 通り**.

2 （ア） 例題と同じ A⇨K⇨Y，D，I の順に決めるのがわかりやすい．K まで決めたあと，残った 3 か所は左から Y，D，I となる．
（イ） E が 2 個，R が 2 個，他の文字は 1 個ずつだから，E が隣り合うまたは R が隣り合うものを求めて全体から引く．

解 （ア） 8 文字を配置する 8 か所から，まず 3 つの A を置く場所を選ぶと ${}_8C_3$ 通りある．次に残りの 5 か所から K を置く 2 か所を選ぶと ${}_5C_2$ 通りある．条件より，残る 3 か所は左から Y，D，I に決まるから，答えは

$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}\boxed{6}\boxed{7}\boxed{8}$

$${}_8C_3\times{}_5C_2=56\times10=\mathbf{560}\text{（通り）}$$

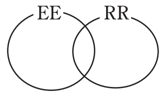
（イ） 並べる文字は，E2 個，R2 個，A，I，N，T，V，Y の 10 個.
同じ文字が隣り合うものも含めると，並べ方は（E⇨R⇨ 残り 6 文字の順に考えて）

$${}_{10}C_2\times{}_8C_2\times6!\text{（通り）}$$

このうち，E が隣り合う並べ方（R が隣り合うものも含む）は，$\boxed{\text{EE}}$ を 1 文字とみて 9 文字を並べると考え，

$${}_9C_2\times7!\text{（通り）}$$

R が隣り合う並べ方もこれと同数ある.
E も R も隣り合うものは，$\boxed{\text{EE}}$，$\boxed{\text{RR}}$ をそれぞれ 1 文字とみて異なる 8 文字を並べると考え，



$$8!\text{（通り）}$$

よって，同じ文字が隣り合う並べ方は ${}_9C_2\times7!\times2-8!$ 通りあるので，答えは

$${}_{10}C_2\times{}_8C_2\times6!-({}_9C_2\times7!\times2-8!)$$
$$=(45\times28-36\times7\times2+8\times7)\times6!$$
$$=(1260-504+56)\times720=812\times720$$
$$=\mathbf{584640}\text{（通り）}$$

3 （3） A と B を先に並べておいて両端か間に C を入れる．
（4） （3）のうち A か B が隣り合うものを引く．例えば，A が隣り合うものは，AA を 1 文字とみて同じ数え方をすることで求められる．

解 （3） まず，A，A，B，B の 4 文字を並べると並べ方は ${}_4C_2$ 通りある．この 4 文字の両端か間（図の 5 か所の ↑）から異なる 3 か所を選んで C を入れることで C が隣り合わない文字列が得られる．答えは，

A A B B
↑ ↑ ↑ ↑ ↑

$${}_4C_2\times{}_5C_3=6\times10=\mathbf{60}\text{（通り）}$$

（4） （3）のうち，A が隣り合うものを数える．$\boxed{\text{AA}}$ を 1 文字とみて同様に考えることで，

$\boxed{\text{AA}}$ B B
↑ ↑ ↑ ↑

$${}_3C_1\times{}_4C_3=3\times4=12\text{（通り）}$$

B が隣り合うものも同数あり，A も B も隣り合うも

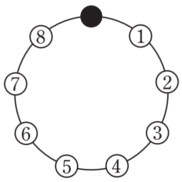
ミニ講座・2
円順列と数珠順列

○5 で円順列の問題を扱いましたが，ここでもう少し研究してみることにしましょう．

最初はこの問題です．

例題 1

3 個の●と 6 個の○を円形に並べるとき，異なる並べ方は何通りあるか．



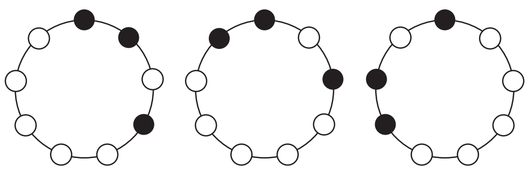
とりあえず ○5 と同様に考えてみましょう．1 つの●の位置を固定して，残りの①～⑧に 2 個の●と 6 個の○を配置すればよいので，●の位置 2 か所の選び方を考えて，

${}_8C_2=28$（通り）…………………………………①

となりそうです．しかし，これは正解ではありません．

間違いの箇所は「1 つの●の位置を固定する」です．

○5 では，並べるもの（人）がすべて異なるため，1 人を固定すれば回転して重なることはありませんでしたが，上の例題では●は 3 個あるため，「特定の●を固定する」ということはできないわけです．実際，次の 3 つは，① では異なるものとして数えられていますが，回転すると一致してしまいます．



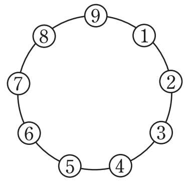
これを見ると，固定した●が 3 つのうちのどれか，で 3 通りずつ重複して数えていた，という結論がもっともらしいように思えてきます．しかし，①は 3 では割り切れませんから，単純にそうなるわけではありません．

ここでは，固定方式をあきらめて別の方針でアプローチしてみましょう．

最終的には回転して一致するものを同一視しますが，とりあえず並べる場所に名前をつけて（右上図），回転して一致する並べ方であっても区別することにしましょう．

これなら簡単です．●の場所 3 か所を決めればよいので

$${}_9C_3=\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2}=84\text{（通り）}$$

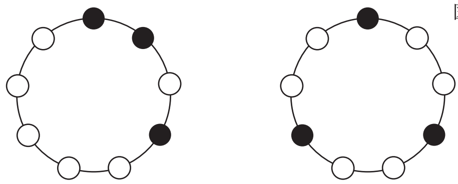


となります．そして，回転したときに同じになる並べ方が何通りずつあるかを考えていきます．

左段の例では，回転した 9 通りがすべて異なるので，上記 84 通りの中の 9 通りが同一視される，ということです．しかし，全部が「9 通りずつ同一視」となるわけではありません（84 は 9 で割り切れない）．

そこで，もう少し考えてみましょう．回転した 9 通りがすべて異なるのは，（その並べ方が）1 回転以外では自分自身に重ならないからです．そうでない並べ方，例えば下右図のように 1 回転未満で自分自身に重なる並べ方は「9 通りが同一視」とはなりません．

図☆



［9 通りが同一視］　［3 通りが同一視］

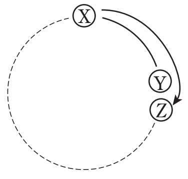
円順列の問題ではこの区別（1 回転未満で自分自身に重なるか重ならないか）がポイントで，

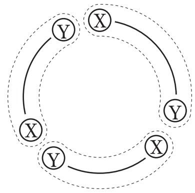
1. 回転すると同じになるものも区別して総数を計算
2. 1 回転未満で自分自身に重なるものを個別に調査
3. 総数から 2. を除いた残りを玉の個数（例題 1 では 9）で割る
4. 2. と 3. の合計が答え

という手順で計算するのが一般的です．

それでは，2. をやってみましょう．

下左図のように，Ⓧを Ⓩ まで回転させたときに自分自身に重なったとします．このとき，全体は下右図のように Ⓧ－Ⓨ の繰り返しになっています．





ここで，繰り返し部分Ⓧ－Ⓨに●が a 個，○が b 個あってこれが r 回繰り返される（つまり $1/r$ 回転で自分自身に重なる）とします．すると，$ar=3$，$br=6$ となり，r は 3 と 6 の公約数であることがわかります．

$r \neq 1$ より $r=3$，$a=1$，$b=2$ が決まり，Ⓧ－Ⓨ は
●－○－○，○－●－○，○－○－● の 3 通りですから，1 回転未満で自分自身に重なる並べ方は，84 通りの中に 3 通りあることがわかりました．この 3 通りは，回転させると互いに一致します（すべて図☆になる）．よって，円順列としては 1 通りという勘定になります．

これができれば終わったようなものです．$84-3=81$ 通りについては，1 回転未満で自分自身に重なるものはなく，9 通りずつが同一視されます．従って，円順列としては $81 \div 9=9$ 通りです．

以上を合わせた $9+1=$**10 通り**が答えです．

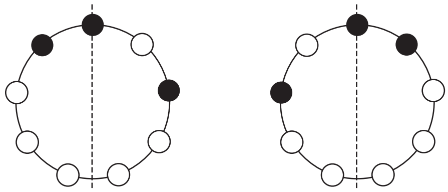
これをもとに，次の問題を考えて下さい．

例題 2

3 個の黒球と 6 個の白球をつないで 1 つの輪を作るとき，異なるものはいくつできるか．

3 個の黒球と 6 個の白球をすべて使ってブレスレットを作るという意味です．数珠（じゅず）のようにつなげることから，数珠順列の問題と呼ぶことがあります．

円順列との違いは，「裏返して同じになるつなぎ方も同一視する」ということです．例えば，下の 2 つは回転のみであれば同一視されず，10 通りの中の 2 通りと数えられていますが，破線で折り返すと重なるので例題 2 では同一視して 1 通りとなります．



それなら単純に 2 で割って $10 \div 2=5$（通り）とすればよいかというと，そうではありません．例えば図☆のつなぎ方は裏返しても同じものですから，例題 1 でも例題 2 でも 1 通りです．

これで何をすべきかがわかりましたね．例題 1 の 10 通りを，

A…裏返しても変らないもの

B…裏返すと変わる（回転では同一視されない）もの

に分類すればよいのです．そうすると，A は例題 2 でも 1 通りになって，B は（裏返しを 2 回行うと元に戻るので）2 通りずつが同一視されます．従って，

$$(\text{A の個数})+\frac{1}{2}\times(\text{B の個数})$$

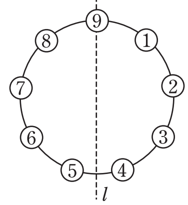
が例題 2 の答えです．

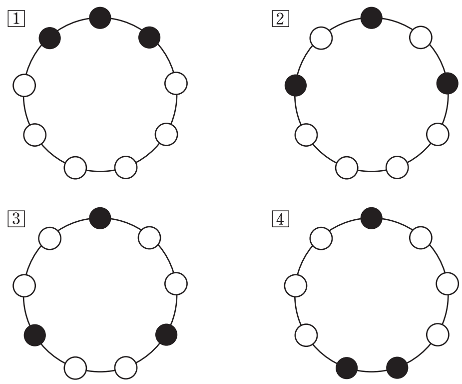
10 通りしかないのですべて書いてしまうのも一つの手ですが，数が少し増えても対応できるような解き方をしてみます．なお，円順列や数珠順列では，「黒球 50 個と白球 100 個の円順列・数珠順列」のような，数値があまりにも大きい問題は通常は出ません．単純に何かで割ればよい場合を除き，例外処理（1 回転未満の回転や裏返しで自分自身に重なるものの勘定）が煩雑になりすぎるからです．

さて，裏返しとは折り返し，すなわち対称移動のことでしたから，裏返しで自分自身に重なる並べ方とは，線対称な並べ方のことです．そこで，対称軸（以下，l）が⑨を通るとしてみましょう．黒球 3 個が l に関して対称に配置されなければならないので，⑨は黒球になり，残り 2 個の黒球は

①と⑧，②と⑦，③と⑥，④と⑤

の 4 通りが考えられます（下図）．





この中に回転で重なるものはない（例えば 1 を回転しても 2 3 4 に重ならない）ので，A が 4 通り，B は $10-4=6$ 通りです．話をまとめると

	A 型	B 型	合計
円順列	4	6	10
数珠順列	4	3	7

となって，例題 2 の答えは **7 通り**となります．

あとがき

本書をはじめとする『1対1対応の演習』シリーズでは，スローガン風にいえば，

志望校へと続く

バイパスの整備された幹線道路

を目指しました．この目標に対して一応の正解のようなものが出せたとは思っていますが，100点満点だと言い切る自信はありません．まだまだ改善の余地があるかもしれません．お気づきの点があれば，どしどしご質問・ご指摘をしてください．

本書の質問や「こんな別解を見つけたがどうだろう」というものがあれば，“東京出版・大学への数学・1対1係宛（住所は下記）”にお寄せください．

質問は原則として封書（宛名を書いた，切手付の返信用封筒を同封のこと）を使用し，**1通につき1件**でお送りください（電話番号，学年を明記して，できたら在学（出身）校・志望校も書いてください）．

なお，ただ漠然と‘この解説が分かりません’という質問では適切な回答ができませんので，‘この部分が分かりません’とか‘私はこう考えたがこれでよいのか’というように具体的にポイントをしぼって質問するようにしてください（以上の約束を守られないものにはお答えできないことがありますので注意してください）．

毎月の「大学への数学」や増刊号と同様に，読者のみなさんのご意見を反映させることによって，100点満点の内容になるよう充実させていきたいと思っています．

（坪田）

大学への数学
1対1対応の演習／数学A［三訂版］

令和 4 年 3 月 22 日　第 1 刷発行

編　者　東京出版編集部
発行者　黒木美左雄
発行所　株式会社　東京出版
〒150-0012　東京都渋谷区広尾 3-12-7
電話 03-3407-3387　振替 00160-7-5286
https://www.tokyo-s.jp/

製版所　日本フィニッシュ
印刷所　光陽メディア
製本所　技秀堂

ISBN978-4-88742-264-3 （定価はカバーに表示してあります）