

# はじめに

『1対1対応の演習』シリーズは、入試問題から基本的あるいは典型的だけど重要な意味を持っていて、得るところが大きいものを精選し、その問題を通して

入試の標準問題を確実に解ける力をつけてもらおうというねらいで作った本です。

さらに、難関校レベルの問題を解く際の足固めをするのに最適な本になることを目指しました。

そして、入試の標準問題を確実に解ける力が、問題を精選してできるだけ少ない題数（本書で取り上げた例題は56題です）で身につくように心がけ、そのレベルまで、

効率よく到達してもらおうことを目標に編集しました。

以上のように、受験を意識した本書ですが、教科書にしたがった構成ですし、解説においては、高1生でも理解できるよう、分かりやすさを心がけました。学校で一つの単元を学習した後でなら、その単元について、本書で無理なく入試のレベルを知ることができるでしょう。

なお、教科書レベルから入試の基本レベルの橋渡しになる本として『**ブレ**1対1対応の演習』シリーズがあります。また、数ⅠAⅡBを一通り学習した大学受験生を対象に、入試の基礎を要点と演習で身につけるための本として「入試数学の基礎徹底」（月刊「大学への数学」の増刊号として発行）があります。

問題のレベルについて、もう少し具体的に述べましょう。入試問題を10段階に分け、易しい方を1として、

1～5の問題……A（基本）

6～7の問題……B（標準）

8～9の問題……C（発展）

10の問題……D（難問）

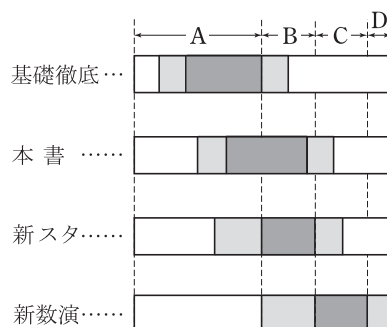
とランク分けします。この基準で本書と、本書の前後に位置する月刊「大学への数学」の増刊号

「入試数学の基礎徹底」（「基礎徹底」と略す）

「新数学スタンダード演習」（「新スタ」と略す）

「新数学演習」（「新数演」と略す）

のレベルを示すと、次のようになります。（濃い網目のレベルの問題を主に採用）



本書を活用して、数Ⅰの入試への足固めをしていってください。

皆さんの目標達成に本書がお役に立てれば幸いです。

# 本書の構成と利用法

坪田三千雄

本書のタイトルにある‘1対1対応’の意味から説明しましょう。

まず例題(四角で囲ってある問題)によって、例題のテーマにおいて必要になる知識や手法を確認してもらいます。その上で、例題と同じテーマで1対1に対応した演習題によって、その知識、手法を問題で適用できる程に身についたかどうかを確認しつつ、一步一步前進してもらおうということです。この例題と演習題、さらに各分野の要点の整理(4ページまたは3ページ)などについて、以下、もう少し詳しく説明します。(なお、本書では、数ⅠAに限定すると窮屈なときは、無理に限定せず、数Ⅱ等の内容に一部踏み込んでいます。)

**要点の整理：** その分野の問題を解くために必要な定義、用語、定理、必須事項などをコンパクトにまとめました。入試との小さくはないギャップを埋めるために、一部、教科書にない事柄についても述べていますが、ぜひとも覚えておきたい事柄のみに限定しました。

**例題：** 原則として、基本～標準の入試問題の中から

- ・これから出題される典型問題
  - ・一度は解いておきたい必須問題
  - ・幅広い応用がきく汎用問題
  - ・合否への影響が大きい決定問題
- の56題を精選しました(出典のないものは新作問題、あるいは入試問

題を大幅に改題した問題)。そして、どのようなテーマかがはっきり分かるように、一題ごとにタイトルをつけました(大きなタイトル／細かなタイトルの形式です)。なお、問題のテーマを明確にするため原題を変えたものがありますが、特に断っていない場合もあります。

解答の前文として、そのページのテーマに関する重要手法や解法などをコンパクトにまとめました。前文を読むことで、一題の例題を通して得られる理解が鮮明になります。入試直前期にこの部分を一通り読み直すと、よい復習になるでしょう。

解答は、試験場で適用できる、ごく自然なものを採用し、計算は一部の単純計算を除いては、ほとんど省略せずに目で追える程度に詳しくしました。また解答の右側には、傍注(◁ではじまる説明)で、解答の補足や、使った定理・公式等の説明を行いました。どの部分についての説明かはっきりさせるため、原則として、解答の該当部分にアンダーライン(——)を引きました(容易に分かるような場合は省略しました)。

**演習題：** 例題と同じテーマの問題を選びました。例題よりは少し難し目ですが、例題の解答や解説、傍注等をじっくりと読みこなせば、解いていけるはずで、最初はうまくいかなくても、焦らずにじっくりと考えるようにしてください。また横の枠囲みをヒントにしてください。

そして、例題の解答や解説を頼りに解いた問題については、時間をおいて、今度は演習題だけを解いてみるようにすれば、一層確実な力がつくでしょう。

**演習題の解答：** 解答の最初に各問題のランクなどを表の形で明記しました(ランク分けについては前ページを見てください)。その表にはA\*、B\*○というように\*や○マークもつけてあります。これは、解答を完成するまでの受験生にとっての“目標時間”であって、\*は1つにつき10分、○は5分です。たとえばB\*○の問題は、標準問題であって、15分以内で解答して欲しいという意味です。高1生にとってはやや厳しいでしょう。

**ミニ講座：** 例題の前文で詳しく書き切れなかった重要手法や、やや発展的な問題に対する解法などを1～2ページで解説したものです。

**コラム：** その分野に関連する興味深い話題の紹介です。

本書で使う記号など： 上記で、問題の難易や目標時間で使う記号の説明をしました。それ以外では、⇨注は初心者のための、⇩注はすべての人のための、⇨注は意欲的な人のための注意事項です。

# 1対1対応の演習

## 数学 I 三訂版

### 目次

|        |       |     |
|--------|-------|-----|
| 数と式    | 坪田三千雄 | 5   |
| 2次関数   | 坪田三千雄 | 29  |
| 集合と論理  | 坪田三千雄 | 67  |
| 図形と計量  | 石井 俊全 | 85  |
| データの分析 | 坪田三千雄 | 107 |

#### ミニ講座

|                   |     |
|-------------------|-----|
| 1 文字定数に慣れよう       | 28  |
| 2 定数分離はエライ        | 64  |
| 3 逆手流             | 66  |
| 4 ひし形を折り曲げてできる四面体 | 105 |
| 5 有理数の小数表示        | 106 |

#### 超ミニ講座

|          |    |
|----------|----|
| 不等式は怖い！  | 9  |
| グラフの対称移動 | 33 |

#### コラム

|         |    |
|---------|----|
| 推理できるとは | 84 |
|---------|----|

# 数と式

## 要点の整理

タイトルは「数と式」ですが、1次方程式、1次不等式、1次関数もここで扱うことにします。

### 1. 展開と因数分解

#### 1・1 指数法則

$a$  は0でない実数,  $m, n$  が整数のとき, 次が成立.

$$a^0=1, a^{-n}=\frac{1}{a^n}, a^m a^n=a^{m+n}, (a^m)^n=a^{mn},$$

$$(ab)^n=a^n b^n$$

#### 1・2 公式

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \quad \cdots\cdots\textcircled{1}$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \quad \cdots\cdots\textcircled{2}$$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2 \text{ (和}\times\text{差は平方の差)} \quad \cdots\cdots\textcircled{3}$$

$$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd \quad \cdots\cdots\textcircled{4}$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \quad \cdots\cdots\textcircled{5}$$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \quad \cdots\cdots\textcircled{6}$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3 \quad \cdots\cdots\textcircled{7}$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3 \quad \cdots\cdots\textcircled{8}$$

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \quad \cdots\cdots\textcircled{9}$$

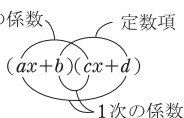
$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\ =a^3+b^3+c^3-3abc \quad \cdots\cdots\textcircled{10}$$

\*

\*

左辺から右辺を導くことを「展開する」、右辺から左辺を導くことを「因数分解する」という。

なお、④の展開について 2次の係数 定数項  
は、公式を丸暗記するとい  
うより、右の計算手順を押  
さえておこう。



#### 1・3 ⑧の一般形

$$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}) \\ =a^n-b^n$$

$$\text{特に, } (x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)=x^n-1$$

また、⑦の一般形は、 $n$ が奇数のとき、

$$(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1}) \\ =a^n+b^n$$

$$\text{特に, } (x+1)(x^{n-1}-x^{n-2}+\cdots-x+1)=x^n+1$$

#### 1・4 因数定理

因数定理は数Ⅱで学ぶが、因数分解と密接な関係があるので、ここで紹介しておくことにする。

まず整式の割り算を説明する。整数の割り算の場合、 $a$  を  $b$  で割った商が  $q$  で余りが  $r$  のとき、

$$a=qb+r \quad (0\leq r<b)$$

と表せ、 $q$  と  $r$  は1つに定まった。整式の場合もほぼ同様である。整式  $f(x)$ ,  $g(x)$  が与えられたとき、

$$f(x)=Q(x)g(x)+R(x)$$

( $Q(x)$ ,  $R(x)$  は整式で、 $R(x)$  は  $g(x)$  より低次) を満たす  $Q(x)$ ,  $R(x)$  がただ1組存在する。

$Q(x)$ ,  $R(x)$  をそれぞれ、 $f(x)$  を  $g(x)$  で割ったときの商、余り(剰余)という。

【剰余の定理】

整式  $f(x)$  を  $x-a$  で割った余りは  $f(a)$  である。

(証明)  $f(x)$  を  $x-a$  で割った商を  $Q(x)$  とする。1次式で割るから、余りは定数で、それを  $R$  とすると、

$$f(x)=(x-a)Q(x)+R$$

これに  $x=a$  を代入して、 $R=f(a)$  を得る。 //

これから、次の因数定理が得られる。

【因数定理】

$$f(a)=0 \iff \text{整式 } f(x) \text{ は } x-a \text{ を因数にもつ} \\ (f(x) \text{ は } x-a \text{ で割り切れる})$$

(証明) 剰余の定理により、

$$f(a)=0 \iff f(x) \text{ を } x-a \text{ で割った余りが } 0 \\ \iff f(x) \text{ は } x-a \text{ で割り切れる} //$$

### 2. 対称式・交代式

$x$  と  $y$  についての整式  $P$  で、 $x$  と  $y$  を入れ替えたときの整式が、

$P$  のままであるものを、 $(x, y)$  の対称式

$-P$  となるものを、 $(x, y)$  の交代式

という。例えば、 $f(x, y)=x^3+xy+y^3$  のときは、 $x$  と  $y$  を入れ替えた式は、 $y^3+yx+x^3=f(x, y)$  であるから、 $f(x, y)$  は対称式である。 $g(x, y)=x^3-y^3$  のときは、入れ替えた式は、 $y^3-x^3=-g(x, y)$  であるから、 $g(x, y)$  は交代式である。

また、 $x, y, z$  についての整式で、 $x^3+y^3+z^3$  のように、3文字  $x, y, z$  のどの2文字を入れ替えても元の式

と同じになるものを,  $x, y, z$  の対称式という.

## 2・1 基本対称式

$x, y$  の対称式のうち, とくに  $x+y$  と  $xy$  を  $x, y$  の基本対称式という.  $x, y$  の対称式は基本対称式で表せる. 例えば,  $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$  である.

また,  $x, y, z$  の対称式のうち, とくに  $x+y+z$ ,  $xy+yz+zx$ ,  $xyz$  を  $x, y, z$  の基本対称式という.  $x, y, z$  の対称式は, 基本対称式で表せる.

対称式は必ず基本対称式を用いて表せるのである.

## 2・2 $x, y$ の交代式は $x-y$ を因数にもつ

$x, y$  の整式  $P$  を交代式とする. 例えば  $P=x^3+x^2y-xy^2-y^3$  を考えよう. これを  $x$  の整式と見て  $f(x)$  とおく.  $x$  に  $y$  を代入すると

$$f(y)=y^3+y^2\cdot y-y\cdot y^2-y^3=0$$

よって, 因数定理により,  $f(x)(=P)$  は  $x-y$  を因数にもつ. これは, 交代式一般について成り立つ.

# 3. 実数

## 3・1 有理数・無理数・実数

$\frac{m}{n}$  ( $m, n$  は整数) と表すことのできる数を有理数という. 2つの有理数の和, 差, 積, 商は有理数である. このことを「有理数の集合は四則演算について閉じている」という (0 で割ることは定義されていない).

整数でない有理数を小数で表すと,  $\frac{1}{4}=0.25$  のように有限小数になる場合と,  $\frac{1}{22}=0.04545\cdots=0.0\dot{4}\dot{5}$  のように無限小数になる場合がある. 有理数が無限小数になるとき, 必ず循環小数になる (『p.106』). 逆に, 循環小数は分数の形に表すことができる. 具体的には, 例えば  $a=0.\dot{1}\dot{3}$  のとき,  $100a=13.\dot{1}\dot{3}=13+a$

よって,  $a=\frac{13}{99}$  と分数で表すことができる.

整数と, 有限小数または無限小数で表される数を合わせて実数という. 実数のうち有理数でないものを無

理数という. 無理数を小数で表すと循環しない無限小数になる.

実数の集合もまた, 四則演算について閉じている. (なお 0 で割ることは定義されていない)

## 3・2 “係数” 比較

$a, b, c, d$  が有理数,  $j$  が無理数のとき,

$$a+bj=c+dj\cdots\cdots\textcircled{1} \iff a=c \text{ かつ } b=d$$

(証明)  $\textcircled{1} \iff a-c=(d-b)j$  である.  $d-b\neq 0$

とすると,  $j=\frac{a-c}{d-b}$  となり, この右辺は有理数であ

るが, 左辺は無理数で矛盾. よって,  $d-b=0$  で, すると  $a-c=0$  である. // (背理法 (『p.69』) による)

## 3・3 数直線と絶対値

実数  $x$  は数直線上の 1 点として表される. そして, 数直線上の原点  $O$  (実数 0 に対応する点) と  $x$  との距離のことを  $x$  の絶対値といい, 記号  $|x|$  で表す.



上図から分かるように,

$x\geq 0$  のとき,  $|x|=x$ ,  $x<0$  のとき,  $|x|=-x$   
また  $|x-y|$  は, 数直線上の 2 点  $x, y$  の距離を表す.



## 3・4 絶対値の性質

- $|x|\geq 0$ . 等号成立は,  $x=0$  のときのみ.

- $|-x|=|x|$

- $x^2=|x|^2$ ,  $|xy|=|x||y|$ ,  $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$

- $a>0$  のとき,

$$|x|=a \iff x=\pm a$$

$$|x|<a \iff -a<x<a$$

$$|x|>a \iff x<-a \text{ または } a<x$$

(なお,  $|x|\leq|y| \iff -|y|\leq x\leq|y|$ )

- $|x+y|\leq|x|+|y|$ . 等号成立は,  $x, y$  が同符号か, 少なくとも一方が 0 のとき.

## 3・5 平方根の性質

- $a\geq 0$  のとき,  $(\sqrt{a})^2=a$ ,  $\sqrt{a}\geq 0$

# 1 展開／公式の応用

- (1)  $(a-b+c)^2-(a-b-c)^2$  を展開せよ。 (静岡理工科大)  
 (2)  $(a-b)^2+(b-c)^2+(a+c)^2-(a-b+c)^2$  を展開せよ。 (獨協大)  
 (3)  $(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)$  を展開せよ。 (札幌学院大)  
 (4)  $(a-1)^2(a+1)^2(a^2+1)^2$  を展開せよ。 (山梨学院大)  
 (5)  $(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$  を展開せよ。 (京都産大・文系)

**かたまりを利用して展開** 例えば  $(a+b)(c+d)$  の展開は、  
 $(a+b)(c+d)=a(c+d)+b(c+d)$  というようにバラしていけば必ずできるが、その単純操作のスピードが速いからといって計算力があるとはいえない。公式を利用する際に、簡単になる形に着目したり、式の特徴を生かしてかたまりを利用したりすることで省力化を図って計算できる力の方がより重要である。例えば(3)では、 $(x-1)(x+3)$ 、 $(x-2)(x+4)$  という組合せで展開すれば、ともに  $x^2+2x$  が現れ、これをかたまりと見る工夫ができる。  
**掛け算の順番を変える** 例えば(4)では、 $(a-1)^2(a+1)^2=\{(a-1)(a+1)\}^2=(a^2-1)^2$  として、 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$  の公式が使えるようにする。

## ■ 解 答 ■

- (1)  $(a-b+c)^2-(a-b-c)^2=\{(a-b)+c\}^2-\{(a-b)-c\}^2$   
 $=4(a-b)c=4ac-4bc$   $\Leftrightarrow (A+B)^2-(A-B)^2=4AB$   
 $a-b$  をかたまりと見た。  
**⇒注** 2乗の差の因数分解の公式  $(A^2-B^2)=(A+B)(A-B)$  を使って、  
 与式  $= (2a-2b) \cdot 2c = 4ac-4bc$  とすることもできる。
- (2)  $(a-b)^2-(a-b+c)^2=(a-b)^2-\{(a-b)+c\}^2$   $\Leftrightarrow$  与式の第1項と第4項を組合  
 $=-2(a-b)c-c^2=-2ac+2bc-c^2$  .....①  
 $(b-c)^2+(a+c)^2=(b^2-2bc+c^2)+(a^2+2ac+c^2)$  .....②  
 $\therefore$  与式  $=$  ①+②  $= a^2+b^2+c^2$   
 ①で展開すると  $(a-b)^2$  がキャンセルされて簡単になることに着目。
- (3)  $(x-1)(x+3)=x^2+2x-3$ ,  $(x-2)(x+4)=x^2+2x-8$   
 であるから、 $x^2+2x$  をかたまりと見て、  
 与式  $= \{(x^2+2x)-3\}\{(x^2+2x)-8\}=(x^2+2x)^2-11(x^2+2x)+24$   
 $= x^4+4x^3-7x^2-22x+24$
- (4)  $(a-1)^2(a+1)^2(a^2+1)^2=\{(a-1)(a+1) \times (a^2+1)\}^2$   $\Leftrightarrow A^2B^2C^2=(ABC)^2$  を活用。  
 $= \{(a^2-1)(a^2+1)\}^2=(a^4-1)^2=a^8-2a^4+1$
- (5)  $(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$   
 $= \{a+(b+c)\}\{-a+(b+c)\} \times \{a-(b-c)\}\{a+(b-c)\}$   
 $= \{-a^2+(b+c)^2\}\{a^2-(b-c)^2\}$   
 $= -a^4+\{(b+c)^2+(b-c)^2\}a^2-\{(b+c)(b-c)\}^2$   $\Leftrightarrow a$  について整理。  
 $= -a^4+2(b^2+c^2)a^2-(b^2-c^2)^2$   
 $= -a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2$

## □ 1 演習題 (解答は p.22)

つぎの式を展開せよ。

- (1)  $(a+b+c)^2-(b+c-a)^2+(c+a-b)^2-(a+b-c)^2$  (九州東海大・工)  
 (2)  $(x+y+2z)^3-(y+2z-x)^3-(2z+x-y)^3-(x+y-2z)^3$  (山梨学院大)  
 (3)  $(x^2+xy+y^2)(x^2+y^2)(x-y)^2(x+y)$  (山形大・工)

どの2つの( )の組合せがよいのか、何をかたまりと見るのがよいのか考えよう。

## 2 因数分解 / 2 次式

つぎの式を因数分解せよ。

(1)  $(a-b+c-1)(a-1)-bc$

(酪農学園大・酪農, 環境)

(2)  $2x^2+5xy-12y^2-2x+25y-12$

(京都産大・生命)

(3)  $(x+2y)(x-y)+3y-1$

(東北学院大・文系)

**因数分解では最低次の文字について整理する** 2 文字以上が現れる式の因数分解の原則は、最低次の文字 (複数あるときはどれか 1 つの文字) について整理することである。一般に、次数の低い式の方が因数分解しやすい。

**$x, y$  の 2 次式の因数分解** 原則に従えば、 $x$  か  $y$  について整理するところであるが、(3) において  $(x+2y)(x-y)$  を展開して整理するのはソンである。「 $x+2y$ 」「 $x-y$ 」を用いて解答のように「たすきがけ」をすればよい。(2) も、 $x, y$  の 2 次式の部分を因数分解すれば同様にできる (別解)。

**慣習** 因数分解せよ、という問題では、特に指示がない限り、係数が有理数の範囲で因数分解する。

### 解答

(1) まず  $c$  について整理することにより、

$$\text{与式} = \{c(a-1) + (a-b-1)(a-1)\} - bc$$

$$= (a-b-1)c + (a-b-1)(a-1) = (a-b-1)(a+c-1)$$

⇨ 与式は  $a$  については 2 次だが、 $b$  や  $c$  については 1 次。

(2) まず  $x$  について整理することにより、

$$\text{与式} = 2x^2 + (5y-2)x - (12y^2 - 25y + 12)$$

$$= 2x^2 + (5y-2)x - (3y-4)(4y-3)$$

$$= \{x + (4y-3)\} \{2x - (3y-4)\} \cdots \cdots \text{①}$$

$$= (x+4y-3)(2x-3y+4)$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} 3 & -4 \\ 4 & -3 \end{matrix} \rightarrow -25$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} 1 & (4y-3) \\ 2 & -(3y-4) \end{matrix} \rightarrow 5y-2$$

⇒ 注 ①におけるたすきがけで、試行錯誤するのを避けるためには、

$$\text{①} = \{ax + (3y-4)\} \{bx - (4y-3)\}$$

とおき、展開して係数比較すればよい。 $x$  の係数は ( $y$  は定数と見る)、  
 $-a(4y-3) + b(3y-4) = (-4a+3b)y + 3a-4b$  となり、 $5y-2$  と一致するの  
 で、 $-4a+3b=5$ ,  $3a-4b=-2$ 。これを解いて、 $a=-2$ ,  $b=-1$  となる。

⇨ このとき、 $x^2$  の係数も一致する。

(3) 与式  $= \{(x+2y)-1\} \{(x-y)+1\}$

$$= (x+2y-1)(x-y+1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} x+2y & -1 \\ x-y & 1 \end{matrix} \rightarrow 3y$$

⇒ 注  $A=x+2y$ ,  $B=x-y$  とおくと、与式  $= AB + 3y - 1$  であり、

$$3y = A - B \text{ であるから、与式} = AB + A - B - 1 = (A-1)(B+1)$$

【別解】(2) [ $x, y$  の 2 次式の部分をまず因数分解して、(3) と同様に解くと]

$$2x^2+5xy-12y^2 = (x+4y)(2x-3y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{matrix} \rightarrow 5$$

であるから、

$$\text{与式} = (x+4y)(2x-3y) + (-2x+25y) - 12$$

$$= \{(x+4y)-3\} \{(2x-3y)+4\}$$

$$= (x+4y-3)(2x-3y+4)$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} x+4y & -3 \\ 2x-3y & 4 \end{matrix} \rightarrow -2x+25y$$

### 2 演習題 (解答は p.22)

(1)  $x^2-y^2-(a-5)x-(a+5)y-5a$  を因数分解せよ。

(福岡大・理, 薬)

(2)  $8x^2-18y^2+10x+21y-3$  を因数分解せよ。

(静岡産大)

(3)  $(x-y)(x+y)-z(z+2y)$  を因数分解せよ。

(北海道薬大)

(2) は、例題(2)と同様に、2 通りのやり方がある。



# 数と式 演習題の解答

|             |           |           |
|-------------|-----------|-----------|
| 1...B*o     | 2...A*o   | 3...B**o  |
| 4...B**     | 5...A*o   | 6...B**   |
| 7...AoA*o   | 8...A*B*  | 9...B*o   |
| 10...B**B** | 11...B*B* | 12...B*** |

① (1)(2) かたまりを利用する.

(3) 公式が使えるように掛け算の順番を変える.

**解** (1)  $(a+b+c)^2 - (b+c-a)^2$   
 $= \{(b+c)+a\}^2 - \{(b+c)-a\}^2 = 4(b+c)a$   
 $(c+a-b)^2 - (a+b-c)^2$   
 $= \{a+(c-b)\}^2 - \{a-(c-b)\}^2 = 4a(c-b)$

であるから,

$$\text{与式} = 4a\{(b+c)+(c-b)\} = 8ac$$

(2)  $(x+y+2z)^3 - (y+2z-x)^3$   
 $= \{(y+2z)+x\}^3 - \{(y+2z)-x\}^3 \dots\dots\dots ①$

ここで,  $\left. \begin{aligned} (A+B)^3 &= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \\ (A-B)^3 &= A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots ②$

であるから,  $(A+B)^3 - (A-B)^3 = 2(3A^2B + B^3)$

よって, ①  $= 2\{3(y+2z)^2x + x^3\}$

また,  $(2z+x-y)^3 + (x+y-2z)^3$   
 $= \{x-(y-2z)\}^3 + \{x+(y-2z)\}^3 \dots\dots\dots ③$

②により,  $(A+B)^3 + (A-B)^3 = 2(A^3 + 3AB^2)$

であるから, ③  $= 2\{x^3 + 3x(y-2z)^2\}$

したがって, 与式は,

$$\begin{aligned} & 2\{3(y+2z)^2x + x^3\} - 2\{x^3 + 3x(y-2z)^2\} \\ &= 6x\{(y+2z)^2 - (y-2z)^2\} \\ &= 6x(4 \times y \cdot 2z) = 48xyz \end{aligned}$$

(3)  $(x^2+xy+y^2)(x^2+y^2)(x-y)^2(x+y)$   
 $= (x-y)(x^2+xy+y^2) \cdot (x^2+y^2) \cdot (x-y)(x+y)$   
 $= (x^3-y^3) \cdot (x^2+y^2)(x^2-y^2)$   
 $= (x^3-y^3)(x^4-y^4) = x^7 - x^3y^4 - x^4y^3 + y^7$

② (1)(3) 最低次の文字 (複数あるときはどれか1つの文字) について整理する.

(2) 2通りの方法でやってみる.

**解** (1)  $a$  について整理して,

$$\begin{aligned} & x^2 - y^2 - (a-5)x - (a+5)y - 5a \\ &= -a(x+y+5) + (x^2 - y^2 + 5x - 5y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -a(x+y+5) + (x-y)(x+y+5) \\ &= (x+y+5)(x-y-a) \end{aligned}$$

(2) [まず  $x$  について整理する方針だと]

$$\begin{aligned} & \text{与式} = 8x^2 + 10x - 3(6y^2 - 7y + 1) \\ &= 8x^2 + 10x - 3(y-1)(6y-1) \\ &= \{2x-3(y-1)\} \times \{4x+(6y-1)\} \quad \begin{matrix} 2 \times -3(y-1) \\ 4 \times 6y-1 \end{matrix} \rightarrow 10 \\ &= (2x-3y+3)(4x+6y-1) \end{aligned}$$

**別解** [2次の部分をまず因数分解する方針だと]

$$\begin{aligned} & 8x^2 - 18y^2 = 2(4x^2 - 9y^2) = 2\{(2x)^2 - (3y)^2\} \\ &= 2(2x+3y)(2x-3y) \quad \text{であるから,} \\ & 8x^2 - 18y^2 + 10x + 21y - 3 \\ &= 2(2x+3y)(2x-3y) + (10x+21y) - 3 \\ &= \{2(2x+3y)-1\} \times \{2(2x+3y)+3\} \quad \begin{matrix} 2(2x+3y) \times -1 \\ 2x-3y \times 3 \end{matrix} \rightarrow 10x+21y \\ &= (4x+6y-1)(2x-3y+3) \end{aligned}$$

(3)  $x$  について整理することにより,

$$\begin{aligned} & (x-y)(x+y) - z(z+2y) \\ &= x^2 - y^2 - z^2 - 2yz = x^2 - (y^2 + 2yz + z^2) \\ &= x^2 - (y+z)^2 = \{x+(y+z)\}\{x-(y+z)\} \\ &= (x+y+z)(x-y-z) \end{aligned}$$

③ (1) まず最低次の  $z$  について整理する.

(2) まず  $(a+b+c)^3$  を  $\{a+(b+c)\}^3$  として展開するか,  $x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2)$  (複号同順) の因数分解の公式を使う (**別解**).

**解** (1)  $z$  について整理して,

$$\begin{aligned} & x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 2y^2z + yz^2 + z^2x + 2zx^2 + 4xyz \\ &= (x+y)z^2 + (2x^2 + 4xy + 2y^2)z + x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\ & \quad \text{[各係数は } x \text{ について降べきの順に整理した]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (x+y)z^2 + 2(x+y)^2z + (x+y)^3 \\ &= (x+y)\{z^2 + 2(x+y)z + (x+y)^2\} \\ &= (x+y)\{z+(x+y)\}^2 = (x+y)(x+y+z)^2 \end{aligned}$$

(2)  $(a+b+c)^3 - a^3 = \{a+(b+c)\}^3 - a^3$   
 $= \{a^3 + 3a^2(b+c) + 3a(b+c)^2 + (b+c)^3\} - a^3$   
 $= 3a^2(b+c) + 3a(b+c)^2 + (b+c)^3 \dots\dots\dots ①$

であり, [①  $-b^3 - c^3$  を因数分解すればよいが]

$$\begin{aligned} & (b+c)^3 - b^3 - c^3 \\ &= (b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3) - b^3 - c^3 \\ &= 3b^2c + 3bc^2 = 3bc(b+c) \dots\dots\dots ② \end{aligned}$$

である. よって, ①, ②により,

$$\begin{aligned} & (a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 \\ &= 3a^2(b+c) + 3a(b+c)^2 + 3bc(b+c) \end{aligned}$$



## ミニ講座・2 定数分離はエライ

解の配置の問題では、

文字定数を分離する解法が使えないかどうか  
に目を光らせるようにしたいです。“定数分離”を使わ  
ずに解いて間違える人が大変多い問題を紹介します。

**例題** 2次方程式  $2x^2 - ax + 2a = 0$  について、2つ  
の相異なる実数解を持ち、1つの解だけが  
 $-1 < x < 1$  の範囲にあるような定数  $a$  の値の範囲  
を求めよ。

まずは、文字定数  $a$  を分離して解いてみましょう。  
p.49 の注のように考えます。

**解**  $2x^2 - ax + 2a = 0$

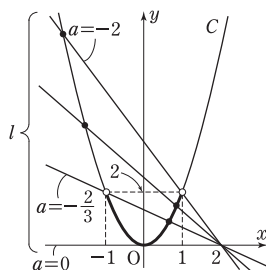
$\Leftrightarrow a(x-2) = 2x^2$

であるから、与えられた  
方程式の実数解は、

$\left\{ \begin{array}{l} \text{直線 } l: y = a(x-2) \\ \text{放物線 } C: y = 2x^2 \end{array} \right.$

の共有点の  $x$  座標であ  
る。  $l$  と  $C$  を図示すると  
右図のようで、これより

答えは、 $-2 < a \leq -\frac{2}{3}$



この問題に対して、「 $f(-1)f(1) < 0$ 」が条件だ、と  
して、次のように解く人が少なくありません。

**解?**  $f(x) = 2x^2 - ax + 2a$  とおく。

区間の端点での値は、

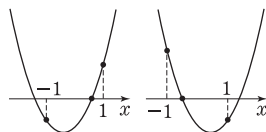
$f(-1) = 3a + 2, f(1) = a + 2$

1つの解のみが  $-1 < x < 1$  を満たす条件は、

$f(-1)f(1) < 0$

$\therefore (3a+2)(a+2) < 0$

$\therefore -2 < a < -\frac{2}{3}$



\*

\*

解答の答えと一致しないのでこれは誤答です。

$a = -\frac{2}{3}$  が抜けているからです。  $a = -\frac{2}{3}$  のとき、左図  
により、確かに1つの解だけが  $-1 < x < 1$  の範囲にあり  
ますね。

「1つの解のみが  $-1 < x < 1 \Leftrightarrow f(-1)f(1) < 0$ 」  
は、 $\Rightarrow$  が不成立なのです！

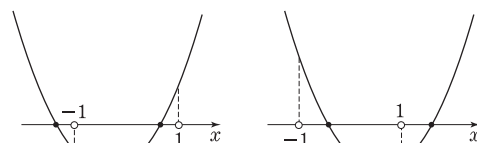
例えば、「1つの解のみが  $-1 < x < 1$ 」の例として、  
「2解が  $-1$  と  $0$ 」の場合がありますが、このとき  
 $f(-1) = 0$  なので、 $f(-1)f(1) < 0$  を満たさないか  
らです。 $(f(-1)f(1) < 0$  のとき、 $f(-1) \neq 0$  なので  
 $x = -1$  を解に持つことはありません。同様に  $x = 1$  を  
解に持つことはなく、2解の一方が  $x = -1$  や  $x = 1$  に  
なるケースが考えられていないのです。）

なお、 $\Leftarrow$  は成立します。そこで、これをもとに修正  
してみることを考えてみます。 $f(-1)f(1) < 0$  はどの  
ような条件を表すのでしょうか。

「 $-1 < x < 1$ 」を区間  $I$ 、

「 $x < -1$  または  $1 < x$ 」を区間  $J$

( $I$  と  $J$  を合わせても、 $x = -1$  と  $x = 1$  が抜けている) と  
すると、



区間  $I, J$  に1解ずつ  $\Leftrightarrow f(-1)f(1) < 0$   
が成り立ちます。つまり、 $f(-1)f(1) < 0$  は

区間  $I, J$  に1解ずつ持つ  
を表します。

\*

\*

さて、**解?** の修正にとりかかりましょう。

$f(-1)f(1) < 0$  では、2解の一方が  $x = -1$  や  $x = 1$  に  
なるケースが抜けています。つまり誤答の原因は、

区間の端点（が解になる場合）の処理  
にあると言えます。**解?** を修正するには、  
区間の端点（が解になる場合）を個別調査  
する必要がある

のです。実際にやってみましょう。

①  $x = -1$  が解のとき

②  $x = 1$  が解のとき

③  $x = -1$  と  $x = 1$  を解に持たないとき

に分けて考えます。次の「解1」のようになります。

〔解1〕  $f(x)=2x^2-ax+2a$  とおく.

区間の端点での値は,

$$f(-1)=3a+2, f(1)=a+2$$

また, 「 $-1 < x < 1$ 」を区間  $I$

「 $x < -1$  または  $1 < x$ 」を区間  $J$

とする.

①  $x=-1$  が解のとき.

$$f(-1)=0 \text{ により, } a=-\frac{2}{3}$$

もう1つの解を  $\beta$  とすると, 解と係数の関係により,

$$-1 \cdot \beta = a \quad \therefore \beta = \frac{2}{3}$$

このとき, 題意を満たす.

②  $x=1$  が解のとき.

$$f(1)=0 \text{ により, } a=-2$$

解と係数の関係により,  $1 \cdot \beta = a \quad \therefore \beta = -2$

このとき, 2解とも  $-1 < x < 1$  を満たさず不適.

③  $x=-1$  と  $x=1$  が解でないとき.

区間  $I, J$  に1解ずつ持つことが条件で,

$$f(-1)f(1) < 0$$

$$\therefore (3a+2)(a+2) < 0$$

$$\therefore -2 < a < -\frac{2}{3}$$

①~③により, 答えは,  $-2 < a < -\frac{2}{3}$

●解? を修正して解くと上のようになります. なかなかこのようには処理できず, 間違えやすいですね.

○15で述べた, 基本的処理法を用いるときは,

軸の位置で場合分け

する必要があつて, こちらの解法で解くのもなかなか大変です.

〔解2〕  $f(x)=2x^2-ax+2a$  とおく.

$y=f(x)$  の軸  $x=\frac{a}{4}$  によって場合分けする.

ここで,  $f(-1)=3a+2, f(1)=a+2$  である.

(i)  $\frac{a}{4} \leq -1$ , つまり  $a \leq -4$  .....①

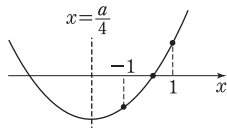
のとき.

$$f(-1) < 0 < f(1)$$

$$\therefore -2 < a < -\frac{2}{3}$$

①を満たさず不適.

(ii)  $-1 < \frac{a}{4} < 0$ , つまり  $-4 < a < 0$  のとき.

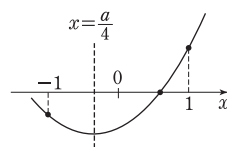


$$f(-1) \leq 0 < f(1)$$

(注)

$$\therefore -2 < a \leq -\frac{2}{3}$$

( $-4 < a < 0$  を満たす)



(iii)  $\frac{a}{4} = 0$ , つまり  $a = 0$

のとき,  $f(x)=2x^2$  となり, 方程式の解は  $x=0$  (重解) となり, 不適.

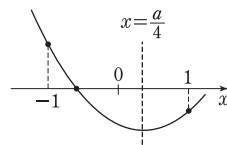
(iv)  $0 < \frac{a}{4} < 1$ , つまり

$0 < a < 4$  のとき.

$$f(1) \leq 0 < f(-1)$$

$$\therefore a \leq -2 \text{ かつ } a > -\frac{2}{3}$$

これを満たす  $a$  は存在しない.

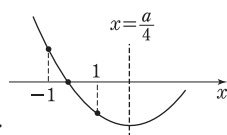


(v)  $1 \leq \frac{a}{4}$ , つまり  $4 \leq a$  のとき.

$$f(1) < 0 < f(-1)$$

$$\therefore a < -2 \text{ かつ } a > -\frac{2}{3}$$

これを満たす  $a$  は存在しない.



以上により, 答えは,  $-2 < a < -\frac{2}{3}$

●注 (ii) の場合の条件は,

$$f(-1) < 0 < f(1)$$

ではなく,

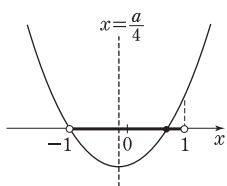
$$f(-1) \leq 0 < f(1)$$

であることに要注意!

$f(-1)=0$  のとき, 右図

のようになって, 題意を満たしています.

(iv) も同様です.



この解法だと, 区間  $-1 < x < 1$  の中点  $x=0$  も場合分けに登場し, 5通りも場合分けになってしまいます. (もっとも, (ii)(iii)(iv) を合わせて処理することも可能で, その場合は,

「 $f(-1) \leq 0 < f(1)$ 」または「 $f(1) \leq 0 < f(-1)$ 」とすればOKですが, この処理は高度でしょう)

左の例題に関して言えば, [解1] と [解2] では, [解1] の方をお勧めしますが,

やはり, 実戦的には文字定数  $a$  を分離して

●解のように解きたい

ところです.

『定数分離はエライ』ので, この解法が活用できるときは, 逃さず使うということが肝心と言えますね.

## あとがき

本書をはじめとする『1対1対応の演習』シリーズでは、スローガン風にいえば、

志望校へと続く

バイパスの整備された幹線道路を目指しました。この目標に対して一応の正解のようなものが出せたとは思っていますが、100点満点だと言いつける自信はありません。まだまだ改善の余地があるかもしれません。お気づきの点があれば、どしどしご質問・ご指摘をしてください。

本書の質問や「こんな別解を見つけたがどうだろう」というものがあれば、“東京出版・大学への数学・1対1係宛（住所は下記）”にお寄せください。

質問は原則として封書（宛名を書

いた、切手付の返信用封筒を同封のこと）を使用し、1通につき1件でお送りください（電話番号、学年を明記して、できたら在学（出身）校・志望校も書いてください）。

なお、ただ漠然と‘この解説が分かりません’という質問では適切な回答ができませんので、‘この部分が分かりません’とか‘私はこう考えたがこれでよいのか’というように具体的にポイントをしばって質問するようにしてください（以上の約束を守られないものにはお答えできないことがありますので注意してください）。

毎月の「大学への数学」や増刊号と同様に、読者のみなさんのご意見を反映させることによって、100点満点の内容になるよう充実させていきたいと思っています。

（坪田）

大学への数学

## 1対1対応の演習／数学Ⅰ〔三訂版〕

令和4年3月22日 第1刷発行

編者 東京出版編集部

発行者 黒木美左雄

発行所 株式会社 東京出版

〒150-0012 東京都渋谷区広尾 3-12-7

電話 03-3407-3387 振替 00160-7-5286

<https://www.tokyo-s.jp/>

製版所 日本フィニッシュ

印刷所 光陽メディア

製本所 技秀堂

©Tokyo shuppan 2022 Printed in Japan

ISBN978-4-88742-263-6 （定価はカバーに表示してあります）