はじめに

秋山貴之

数学の入学試験問題の扉を開けると，複数の独立小問が大問の１つとして出題されるケースが少なくありません．独立小問に盛り込む問題の出題意図は，学校によって異なりますが，幾つかのポイントが見えてきます．

［1］ 基本〜標準レベルの理解度をみる

［2］ 標準〜応用レベルの典型題の定着度をみる

［3］ 目新しい問題の出題を通じて，初見の問題への対応力をみる＆入試問題にアクセントを加える

［1］は出題者の立場からすると，身に付けておいてほしい基本事項が幅広く出題できます．これこそ，独立小問形式の使い勝手の良さでしょう．受験生の立場からすると，合格点をとるために，最優先で確実に押さえたい問題になります．しかし，「基本」イコール「易しい」ではありません．当たり前かの如く使っている用語・定義，いざ証明せよといわれるとたじろいでしまう定理・性質…といった具合に，受験生にとって何とも悩ましい出題がされることもあるのです．

つづいて［2］です．難関校の入試問題ともなると，本来ならば小設問による誘導付きの問で見かける問題が，コンパクトな姿になって立ちはだかります．出題者の立場からすると，出題できる問題数を抑えること，あるいは，出題内容の分野別のバランスをとるのに好都合です．受験生の立場からすると，これまでの学習の真価が最も問われる場面といっても過言ではありません．そして時には，合否を左右する問題にもなりうる代物なのです．

最後に［3］です．塾で教える仕事をしていますと，入試を終えて校舎に立ち寄った受験生の労をねぎらうかたわら，試験について尋ねます．数学が得意な生徒の場合，その多くは見慣れない難問・奇問が印象に残るようです．教える立場からするとどうでしょうか．当該入試についてのみ言及するのであれば，その問題で得点できなくても，合否への影響がなければ深追いする必要はありません．しかし，入試が終わった瞬間から，その問題は「過去問」へと立場が変わり，次年度以降は，「あの学校」は「あんな問題」も出題してきた…となるのです．だからこそ，様々な問題に対応できる力を養わなくては！という心構えが芽生えます．

これこそ出題者の思うツボなのかもしれませんね．それはメッセージでもあるのでしょう．

またスパイスのきいた問題を出すから準備してきてね…と．

これら［1］〜［3］のすべてに対応することを目標にして，月刊「高校への数学」で 2017 年 7 月号から 2022 年 3 月号にかけて『ハイレベル小問☆ベストセレクション・図形編』を執筆してまいりました．前作の数式編の隣りに図形編が並ぶことで，数学の得点力の強化をより幅広い分野で，かつ，よりスピーディーに進めていくことが可能になります．

2022 年 3 月

本書の利用法

☆どこから始める？

高校入試の図形分野について，直線図形・円・角柱＆角錐・円柱＆円錐＆球・動く図形の各単元をそれぞれテーマ別に分類し，強化したい項目を選別できるようにしてあります．1ページ1テーマの構成になっていますので，気になるテーマだけつまみ食いしていただいても構いません．ピンポイントでの強化が期待できます．その一方で，それぞれの単元において，どの順番で扱うのが効果的か，テーマの配列にもこだわりました．各単元について，順番通りに解き進めていただくと，他のテーマとの結びつき・相互理解といった化学反応が期待できるかと思われます．

☆掲載されている問題は…？

各回ともに，日本全国の高校入試問題で実際に出題された問題で構成されています．基本スタンスとして，掲載されている問題のほとんどは，高校入試において独立小問の形式で出題された問題になります．オーソドックスな典型題に始まり，知識がものをいう問題から思考力を要する難問に至るまで様々にカバーしています．

また，新旧を問わず，高い学習効果が期待できる問題を選びました，今どきの流行の一題から伝説の名作といえる一題まで，まさに時空を超えて，バラエティに富んだ問題に触れることができます．

☆1ページに費やす時間は…？

テストにおける小問集合の対策を想定して，お使いになるのであれば，各ページ15分〜30分の時間制限を設定して取り組んでいただくのが効率的です．はたまた，気が済むまでじっくり考えたいということであれば，一題につき最大15分を目安として取り組んでいただいてもよいでしょう．

☆問題を解き終えて…①

解き終えてからのケアこそ大切にして下さい．スムーズに解くことができた問題であれば，解説で紹介する解法ならびに別解とご自身の解法を比べて吟味してみましょう．肝心なのはできなかった問題です．取り組んだ際，自分の力で乗り越えられなかった部分がどこなのかを見極めて下さい．思考の過程で見落としていた部分は…，あるいは，解説を読んで始めて知るところとなる知識・公式・テクニックは…それらをフィードバックするための専用ノートを作って整理するのも効果的な学習法です．

☆問題を解き終えて…②

時折，高校入試で見かけるテーマの中から，受験生にとって悩ましいと思しきものを，独断と偏見で4つ選びました．「とっておきゼミナール」と銘打ってお届けします．解説ページだけでは語り尽くせないネタも盛り込んであるので，熟読して下さい．きっと，ライバルに差をつけるテクニックが手に入ることでしょう．

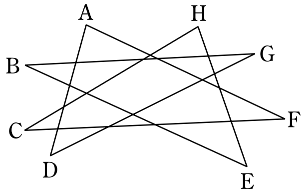
目 次

（　）内は解答・解説のページ

多角形と角度

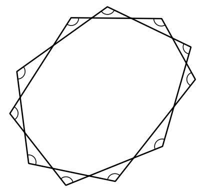
1 右図において，∠A の大きさを求めよ．ただし，∠B＝20°，∠C＝25°，∠D＝35°，∠E＝40°，∠F＝33°，∠G＝30°，∠H＝75° とする．

（2007 西大和学園）



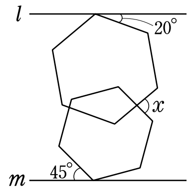
2 右の図で，印をつけた 11 個の角の和を求めよ．

（1997 早稲田実業）



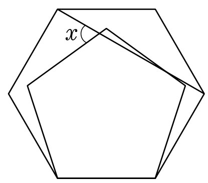
3 2 直線 l，m が平行で，2 つの正六角形が右図のように交わっているとき，∠x は何度か．

（2005 洛南）



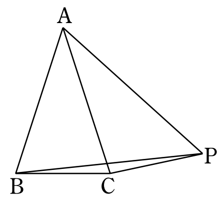
4 右図のように，1 辺の長さが等しい正五角形と正六角形を，1 辺を重ねて置いたとき，∠x の大きさを求めよ．

（1999 巣鴨）



5 図の点 A，B，C は正五角形の 5 つの頂点の中の 3 つであり，AB＝AC，AB＞BC である．点 P を BC＝CP，∠PBC＝6° となるようにとるとき，∠PAC の大きさを求めなさい．

（2007 市川）



等長図形

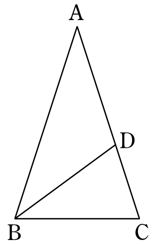
1　右図の△ABC において，

　　AB＝AC，AD＝BD＝BC

である．

∠A の大きさを求めよ．

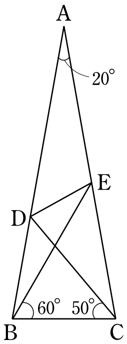
（1996　浦和明の星女子）



2　△ABC は AB＝AC の二等辺三角形である．

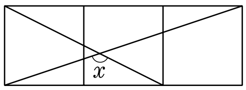
CE 上に点 F をとり，FD，FB を結ぶ補助線を利用して∠DEB の大きさを求めよ．

（2002　渋谷教育学園幕張）



3　右図のように，3 つの正方形が並んでいるとき，∠x は何度か．

（2002　日本大習志野）



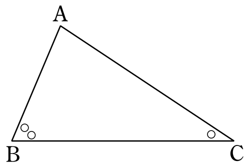
4　図のように，

　　AB＝3，AC＝5，∠B＝2∠C

の△ABC がある．

辺 BC の長さを求めよ．

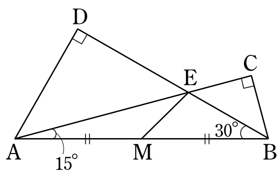
（2016　巣鴨）



5　右の図において，∠ACB＝∠ADB＝90°，∠ABD＝30°，∠BAC＝15°，AB の中点を M とする．

このとき，∠AME の大きさを求めよ．

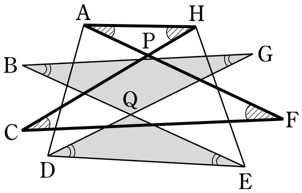
（1996　広島大附）



＜解答・解説＞
多角形と角度

多角形を題材とした角度の問題を集めました．角の和を求める際には，$\boxed{1}$のように分かりやすい図形の内角の和に持ち込むか，$\boxed{2}$のように多角形の外角の和を利用するなどの方法があります．$\boxed{5}$は図だけでなく，問題の条件を忘れずに．

$\boxed{1}$　砂時計をつくって，角度を移動させると⁉



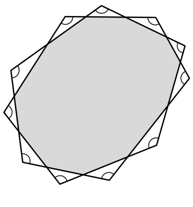
AとHを結び，△APHと△FPCの内角に注目する．

∠Cと∠Fの和は，∠PAHと∠PHAの和に等しい．

DとEを結ぶと，同様にして，∠Bと∠Gの和が，∠QDEと∠QEDの和に等しくなる．

以上より，∠A～∠Hの和は四角形ADEHの内角の和360°に等しいから，∠Aの大きさは，360°－(20°＋25°＋35°
＋40°＋33°＋30°＋75°)＝**102°**

$\boxed{2}$　三角形11個分の内角の和から引くのは⁉

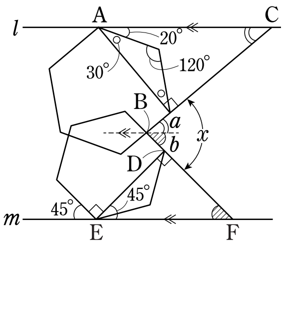


右図の網目の十一角形と辺を共有する11個の三角形について，内角の総和は，180°×11＝1980°

11個の三角形の内角のうち，印がついていない角の総和は，網目の十一角形の外角の和2セット分である．

したがって，1980°－360°×2＝**1260°**

$\boxed{3}$　平行線の錯角を利用するために…



2つの正六角形の辺を延長したり，対角線を引くなどして，直角三角形ABCおよび直角二等辺三角形DEFをつくる．

2直線 l，m に平行な直線を補うことで，問われている角(＝∠CBF)を2つに分ける．

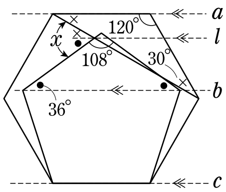
平行線の錯角は等しいので，

a＝∠ACB，b＝∠DFE

∠ACB＝180°－90°－(20°＋30°)＝40°より，

x＝a＋b＝∠ACB＋∠DFE
＝40°＋45°＝**85°**

$\boxed{4}$　図形に潜む平行線に着目すると…⁉

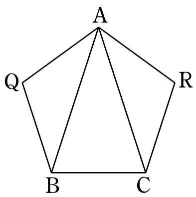


正五角形と正六角形が共有する辺と平行な直線(直線 l とする)を補うことで，問われている角を2つに分ける．

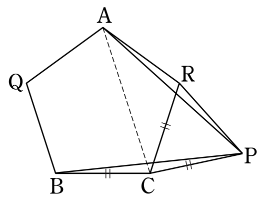
a // l // b // c より，平行線の錯角が等しくなることを利用すると，

x＝●＋×＝36°＋30°＝**66°**

$\boxed{5}$　正五角形のことも忘れずに…



点A，B，Cは正五角形の5つの頂点の中の3つで，AB＝AC，AB＞BCだから，右図のように，正五角形AQBCRの内部に△ABCをつくることができる．



BC＝CP＝CR…①

であるから，△CPBは，底角6°，頂角168°の二等辺三角形．

∠BCR＝108°であるから，

∠RCP＝168°－108°＝60°　……………②

①，②より△PRCは正三角形になる．

△RAPは，△CPBと合同な二等辺三角形であるから，∠RAP＝6°

△RACは頂角108°，底角36°の二等辺三角形であるから，

∠PAC＝∠RAC－∠RAP＝36°－6°＝**30°**

＜解答・解説＞
等長図形

二等辺三角形・正三角形を主とする等長図形に関する問題を集めました．長さの等しい線分を見つけられるか，また，必要に応じて補えるかで答えにたどり着けるか否かが決まります．

1 外角の定理を用いて，角に印をつけると⁉

∠A＝x(＝○)…①　とすると，AD＝BD より，

∠ABD＝x

△DAB に外角の定理を用いると，∠BDC＝2x

BC＝BD より，

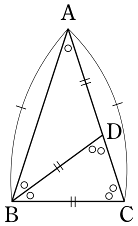
∠BCD＝∠BDC＝2x …………………②

AB＝AC より，

∠ABC＝∠ACB＝∠BCD＝2x ………③

①，②，③より，△ABC の内角の和は，

$x+2x+2x=5x=180°$　∴　$x=$**36°**



2 BC＝BD を考慮すると，F の位置は…⁉

AB＝AC より，

∠ABC＝∠ACB＝80°

△BCD について，∠B＝80°，∠C＝50° より，∠D＝50°

∴　BC＝BD …………①

CE 上に，∠BFC＝80° となる点 F をとる．

△BCF で，∠C＝∠F＝80°

∴　BC＝BF …………②

∠FBC＝20°，∠DBF＝60°…③　が決まる．

①，②，③より，△BFD は正三角形 …④

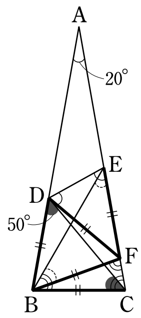
∠BFE＝100°，∠FBE＝40° より，

∠FEB＝40°　∴　FB＝FE …………⑤

④，⑤より，FD＝FE がいえて，∠DFE＝40° より，∠FED＝∠FDE＝70°

∠CEB＝180°－(60°＋80°)＝40°

∴　∠DEB＝70°－40°＝**30°**

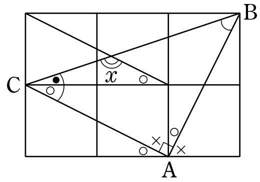


3 平行線の錯角を利用するために…⁉

次図のように正方形を 3 個補うと，△ABC は AB＝AC の直角二等辺三角形になるので，

○＋●＝∠C＝45°

x＝180°－45°＝**135°**

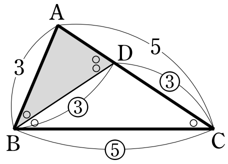


4 二等辺三角形＋α で

［その 1］

∠B の 2 等分線と AC の交点を D とする．

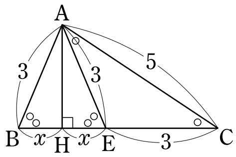
DB＝DC かつ △ABC∽△ADB (相似比 5：3) であるから，AD＝$\frac{3}{5}$AB＝$\frac{9}{5}$



∴　BC＝$\frac{5}{3}$CD＝$\frac{5}{3}\left(5-\frac{9}{5}\right)=\boldsymbol{\frac{16}{3}}$

［その 2］

BC 上に AB＝AE となる点 E をとると，△ABE，△AEC は二等辺三角形である(図 2)．



BH＝EH＝x とすると，BC＝2x＋3

このとき，$AH^2=3^2-x^2=5^2-(3+x)^2$

∴　$x=\frac{7}{6}$　∴　BC＝$\boldsymbol{\frac{16}{3}}$

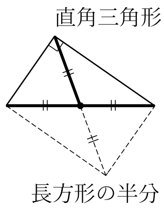
5 直角の頂点と斜辺の中点を結ぶと⁉

△ABD は直角三角形で，M は斜辺 AB の中点であるから，

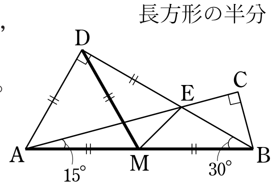
AM＝BM＝DM ………①

∠DAM＝60° と①より，

△DAM は正三角形 ………②



△DAE は∠D＝90°，∠DAE＝45° より，DA＝DE …③　の 45° 定規形．



②，③より，

△DME は頂角 30° の二等辺三角形．

∴　∠DME＝∠DEM＝75°

∴　∠AME＝60°＋75°＝**135°**

とっておきゼミナール①

黄金比と正五角形

今回は，『黄金比』を特集します．入試問題では正五角形の問題を解く際に必要となります．
まずは，黄金比の紹介から．

＜黄金比＞

図1

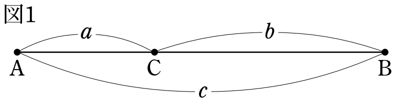


図１の線分ABについて，

$$\mathbf{AC}:\mathbf{CB}=\mathbf{CB}:\mathbf{AB} \cdots\cdots\cdots\cdots(☆)$$

すなわち，$a:b=b:c$ となる点Cで分割する分け方を『黄金分割』といいます．

いま，$b=1$，$c=x$ とすると，$a=x-1$ より，

$$(x-1):1=1:x \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$から得られる２次方程式 $x^2-x-1=0$ を解きます．$x>0$ より，$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ が得られます．

図2

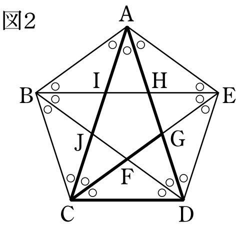


図２の正五角形ABCDEにおいても，この関係が現れます．

例えば，△ACDと△CDGは頂角36°，底角72°の二等辺三角形(○＝36°)ですから，△ACD∽△CDGが成り立ちます．

比例式を作ると，DG：DC＝DC：DA…①

△CDGはCD＝CGの，△GACはGC＝GAのそれぞれ二等辺三角形です．

①とDC＝GAから，(☆)と同様の比例式

$$\text{DG}:\text{GA}=\text{GA}:\text{DA}$$

を導くことができます．

CD＝1，AC＝AD＝y のとき，

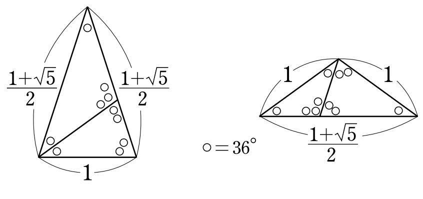
$$(y-1):1=1:y \cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

これを解くと，やはり，$y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ が得られます．

同様にして，△GDE∽△ABEなどからも，正五角形ABCDEの対角線の長さ $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ を求めることができます．

＜黄金比が現れる二等辺三角形＞

頂角36°，底角72°の二等辺三角形　　頂角108°，底角36°の二等辺三角形



ドイツの天文学者ケプラーは

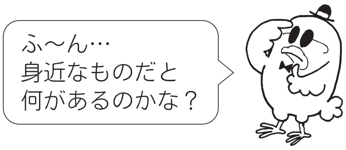
『正五角形の１辺と対角線の長さの比

$$1:\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$ は宝石のようだ』

と称(たた)えました．この比はギリシャ時代から最も調和のとれた美しい比と考えられていました．そして，19世紀に入ると，『黄金比』と呼ばれるようになります．

絵画や彫像の人物などにも多く見出されていて，例えば，ミロの『ヴィーナス』では，おへ

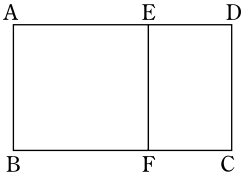
そから上の部分と下の部分の長さの比が黄金比に近い比（およそ5：8）になっているといわれています．また，パルテノン神殿の全体像は
『縦と横の長さの比が黄金比の長方形』
（黄金長方形といいます！）とほぼ同じ形になっています．



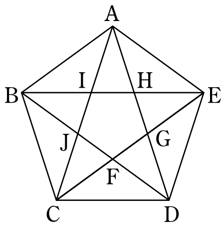
私たちの生活においては，キャッシュカードやIC型乗車券などが黄金長方形になっています．他にもあるので，後ほど紹介することにしよう．

＜練習問題＞

1 AB＝1である長方形ABCDの辺AD，BC上に点E，Fを四角形ABFEが正方形となるようにとる．長方形DEFCが長方形ABCDと相似になるときのBCの長さを求めよ．



2 1辺が2の正五角形ABCDEがある．対角線の交点をF，G，H，I，Jとするとき，



（1） 対角線ACの長さを求めよ．

（2） 正五角形ABCDEの面積は△ACDの面積の何倍か．

（3） 星形AIBJCFDGEHの面積は正五角形FGHIJの面積の何倍か．

＜練習問題・解説＞

1 長方形DEFCが長方形ABCDと相似になるとき　AD＝xとおくと，

AB：BC＝DE：EFより，

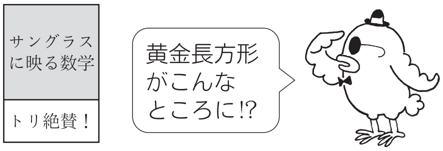
$1 : x = (x-1) : 1$

2次方程式$x^2-x-1=0$を解くと，

$x>0$より，$x=\mathbf{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$

これぞまさしく黄金長方形だね！

発売されたばかりの本やコミックなどを見ると，表紙に帯が巻いてあるね．このとき，帯の上側（網目部）は正方形になっているんだ．



2 （2）が（3）の誘導になっているね．

（**1**） △ACD∽△CDGが成り立つので，

AC：CD＝CD：DG

よって，AC＝AD＝xとおくと，

$x : 2 = 2 : (x-2)$

これより，$x^2-2x-4=0$

$x>0$より，$x=\mathbf{1+\sqrt{5}}$

（**2**） △ACG：△ACD＝AG：AD

＝$2 : (1+\sqrt{5})$

△ACG≡△ACB≡△ADEより

△ACD：（正五角形ABCDE）

＝△ACD：（△ACB＋△ACD＋△ADE）

＝$(1+\sqrt{5}) : (2+1+\sqrt{5}+2)$

＝$(1+\sqrt{5}) : (\sqrt{5}+5) = 1 : \sqrt{5}$

正五角形ABCDEの面積は△ACDの面積の$\mathbf{\sqrt{5}}$**倍**である．

（**3**） （2）を利用すると，

△FHI：（正五角形FGHIJ）＝$1 : \sqrt{5}$

△FHIと△AIH，△BJI，△CFJ，△DGF，△EHGは合同であるから，

（星形AIBJCFDGEH）：（正五角形FGHIJ）

＝{（正五角形FGHIJ）＋5△FHI}

：（正五角形FGHIJ）

＝$(\sqrt{5}+5) : \sqrt{5} = (1+\sqrt{5}) : 1$

星形AIBJCFDGEHの面積は，正五角形FGHIJの面積の（$\mathbf{1+\sqrt{5}}$）**倍**である．

あとがき

入試問題の前半の大問に配置されることが多い小問集合ですが，その中に目新しい図形の小問を見つけると，つい目が奪われてしまいます．「このような問題をよく思いついたなぁ」と作問者への尊敬の念を抱く一方で，「解き方パッと思いつくのかな…」「深追いして時間を使わされていないかな」など，受験生の立場で，あるいは，教える者の立場で，思いを巡らせます．

典型題中心の積み上げ式の学習を進めていく中で，発想力が試される難問との遭遇は，頭の中にある解法・発想にインパクトを与えます．それが実力 UP＆得点力 UP へ繋がります．

最後に，月刊「高校への数学」で 10 年間に渡り連載させていただいた『ハイレベル小問☆ベストセレクション』において，編集に携わっていただいた堀西編集長に感謝の意を表して，結びの言葉とさせていただきます．

（秋山貴之）

高校入試　図形の得点力を急速チャージ！

2022 年 3 月 2 日　第 1 刷発行

著　者　秋山貴之
発行者　黒木美左雄

発行所　**東京出版**
〒150-0012
東京都渋谷区広尾 3-12-7
電　話　03-3407-3387
振　替　00160-7-5286
https://www.tokyo-s.jp/

整　版　所　錦美堂整版
印刷・製本　技秀堂

ISBN978-4-88742-262-9