

はじめに

谷津綱一

本書の書名にある**ビギナーズ**という言葉には、これから難関高校入試へ立ち向かう中学生のための入門書という意味が込められています。

本書は、難関高校で出題される重厚感ある問題に対して、「どのようにアプローチすればよいかを身に付ける」ことを目的としています。

入門書ですので、初めから難しい公式や知識を前提とするわけではありません。一つひとつの項目のスタートは中学校の教科書に記載されている内容であり、その知識を足掛かりにどのように入試問題攻略にしなければよいかという一連の流れが書かれています。

さて改訂版を上梓するにあたり、前作との違いをまとめます。

・予備知識（巻頭）として、本書を解くにあたって必要な基盤となる重要性質をまとめました。この中には中学校で習わないものも含まれるので、成り立つ理由も載せています。

・入試の重要項目の1つである「数と式」の分野を追加しました。このことから、この1冊でさらに広い範囲を習得できるようになったはずです。

・近年の入試傾向に合わせて、掲載するテーマの一部を入れ替えました。特に最近の入試問題は、難関国私立高校と公立高校の親和性が高いことから、どちらにも対応できる項目をいくつか追加しました。

本書を学ぶことで、

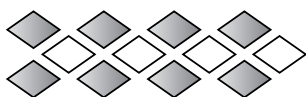
‘解き方を知らない’

‘出題を見たことがない’

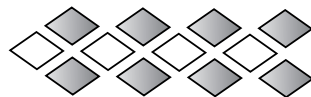
‘これまでやったことがない’

という不安要素が、少しでも取り除かれることを願っています。

2021年12月



本書の使い方



■本書の構成

本書は、「数と式」「関数」「平面図形（直線図形・円）」「立体図形」という高校入試の重要分野から構成されています。さらにテーマごとに細かく分類し、1つのテーマにつき見開き2ページで紹介します。

また導入として、巻頭には「予備知識」をまとめてあります。

■本書の目的

本書で学ぶのは、“問題へのアプローチの仕方”です。言い方を替えれば、“どこに着眼し、どのような流れで問題を解いていくか”を習得することにあります。

「解けたからもう終わり」とするのではなく、解説をじっくり読み確認することで、理解もより一層深まり、さらに解法の幅が広がっていくでしょう。

■本書への取り組み方

本書で最も大事なことは、学習するテーマを決めてから取り組むことです。ただ漠然と本書を開くのではなく、「今日はここを強くしたい」という明確な意志のもと学習しましょう。

例えば試験でできなかったテーマがあれば、本書の対応する類題を繰り返すことで次の試験に備えたり、あるいは授業で理解できなかったテーマを本書で復習して定着させるといった、「いま自分がすべきこと」を十分に整理した上で、効率よく消化してください。

もちろん冒頭から順序よく解く必要はありません。

■本書の進め方

さて学習テーマが決まれば、さっそくノートを準備します。それは本書専用にしましょう。

いきなり問題を解いても構いませんが、数学が得意でない人は、手始めに問題と解説を一気に読み切るのも良いでしょう。やり方が頭に入ったならば、時間を空け、仕切り直して再度チャレンジするのも方法です。

その際、解法の図は必ず自分なりにノートに描いてください。図を描くことは、解法を理解することの近道です。

こうすることで、自ずと頭の中に染み込み定着します。

本書の各テーマを積み上げれば、必ずや数学の得点が飛躍的に向上すること間違いありません。



目 次



はじめに1

本書の使い方2

〔予備知識〕4

〔プロローグ〕

- ① 放物線と直線の交点が織りなす‘線分比’の美しさ22
- ② ‘補助線’と‘面積比’、あなたはどっち？46
- ③ 立体の表面の一筋は、三平方を駆使しよう88
- ④ 空間内の線分には、‘面積’や‘線分比’を有効に使おう90

〔本編〕

<数と式>

- 01 思考を働かせる計算問題8
- 02 次数を下げて求値計算10
- 03 有理数と無理数の関係を操れ12
- 04 ルートの大きさを比べるには14
- 05 筆算の繰り下がりに注意し、丹念に調べよう16
- 06 ‘桁ズラシ’に慣れよう18
- 07 アイテムは素因数分解‘約数の個数’20

<関数とグラフ>

- 08 連立方程式の解の存在は一次関数から24
- 09 等積変形の基本を自分のものにしよう26
- 10 座標平面上の‘三角形の面積二等分’の基本中の基本28
- 11 2つの放物線を横切る直線は、線分の比を操る30
- 12 ヴェリエーション豊かな‘台形の面積二等分’32
- 13 補助三角形を加え、等積変形へ持ち込もう34
- 14 ‘放物線の奏でる相似’に気付けば瞬時に解決36
- 15 ‘等積変形’で面積自在に38
- 16 放物線と平行四辺形の関わりを見る40
- 17 座標平面上の‘直角’を上手に活かそう42
- 18 放物線と直線が繰り出す規則性44

<平面図形>

- 19 直角三角形の斜辺への中線の存在感48
- 20 色褪せない、頂角 45° と垂線から生み出される合同50
- 21 正方形内に辻がでるとき52
- 22 ‘回転系合同’に注目しよう54
- 23 ‘回転系相似’を使いこなそう56

24 円に内接する四角形の‘ツイン相似形’は語る58

25 三角形の裏返しの相似に注意する60

26 まだある、三角形の裏返しの相似62

27 円内の二等辺三角形には、重なる裏返しの相似が隠れている64

28 接線が角の二等分線になるときの相似66

29 円に内接する二等辺三角形の‘頂点から引いた直線の長さ’68

30 弦となる、角の二等分線の長さ70

31 円内の3つの相似形を絡める72

32 三角形の‘角の二等分線の長さ’はこう求める74

33 円内の正三角形に宿る長さに注目76

34 弦への垂線から、円の半径を求める78

35 直角二等辺三角形から、外接円の半径を知る80

36 2円の中心を結ぶ相似を上手に使おう82

37 ‘補角’を使うとやっぱりすごい、面積比の利用84

38 円周上で最も遠い点はどこ？86

<立体図形>

- 39 正多面体の切断面に着目し、空間内を射る線分の長さを求める92
- 40 正四面体に登場するさまざまなシチュエーション94
- 41 立方体の対角線と、垂直に交わる断面の変移96
- 42 立方体の断面を、対称面に注目すれば98
- 43 直角三角形の相似を利用する、面への距離100
- 44 対称面を見つけ面積を介す、面への距離102
- 45 面への距離、困ったときは体積にすがろう104
- 46 体積は‘面と辺の垂直’を活かしきろう106
- 47 立方体内にある立体の体積を、よりよく刻もう108
- 48 立方体内にある四面体を等積変形から考える110
- 49 正八面体から削る、四面体の体積112
- 50 面を貫く線分とその交点の位置114
- 51 ‘屋根型の体積’には便利な公式も使おう116
- 52 情報収集力がものをいう‘球の切断面’118

〔コラム〕

- ① よく使う整数三角形を頭の隅へ留めておこう120
- ② 動点の軌跡が円になるのは？122
- ③ 正多面体にできる角度を調べよう124
- ④ 四、六、八はつながってる126

あとがき128

予備知識

① 約数の個数

$300(=2^2 \times 3 \times 5^2)$ の約数の個数

右の表のように,

素因数 2 $\cdots$ 0 個, 1 個, 2 個 $\rightarrow$ 3 種類

素因数 3 $\cdots$ 0 個, 1 個 $\rightarrow$ 2 種類

素因数 5 $\cdots$ 0 個, 1 個, 2 個 $\rightarrow$ 3 種類

したがって, 各素因数の組み合わせは,

$$3 \times 2 \times 3 = 18 (\text{個})$$

このことを利用して,

$n = p^a q^b \cdots r^c$ の約数の個数

素因数 $p \cdots$ 0 個, 1 個, $\cdots$, a 個 $\rightarrow (a+1)$ 種類

素因数 $q \cdots$ 0 個, 1 個, $\cdots$, b 個 $\rightarrow (b+1)$ 種類

.....

素因数 $r \cdots$ 0 個, 1 個, $\cdots$, c 個 $\rightarrow (c+1)$ 種類

したがって, 約数の個数は,

$$(a+1) \times (b+1) \times \cdots \times (c+1) (\text{個})$$

素因数 2	素因数 3	素因数 5
0	0	0 1 2
		0 1 2
1	0	0 1 2
	1	0 1 2
2	0	0 1 2
	1	0 1 2

② 2 次方程式の解の公式

x についての 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a > 0$) の解は次のようになる.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \rightarrow 4x^2 + \frac{4b}{a}x + \frac{4c}{a} = 0 \rightarrow \left(2x + \frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b^2}{a^2} + \frac{4c}{a} = 0$$

$$\rightarrow \left(2x + \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{a^2} \rightarrow 2x + \frac{b}{a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{a^2}} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$$

$$\rightarrow 2x = -\frac{b}{a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

③ 2 次方程式の解と係数の関係

x についての 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a > 0$) の 2 つの解 p, q について,

まず, $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \cdots \cdots \textcircled{7}$ へと変形する.

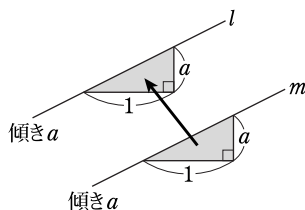
一方, 2 次方程式の解は p, q だから, $\textcircled{7}$ は, $(x-p)(x-q) = 0$

これより, $x^2 - (p+q)x + pq = 0$ だから, $\textcircled{7}$ と比較して,

$$p+q = -\frac{b}{a}, pq = \frac{c}{a}$$

④ 平行や垂直な直線の式

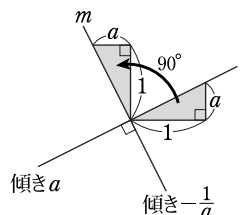
直線 $l \parallel$ 直線 m のとき、
 下図の三角形を平行移動したと考えれば、
 (直線 l の傾き) = (直線 m の傾き)



直線 $l \perp$ 直線 m のとき、下図の三角形を
 90° 回転移動したと考えれば、直線 m の傾き
 は $-\frac{1}{a}$. よって、

$$(\text{直線 } l \text{ の傾き}) \times (\text{直線 } m \text{ の傾き}) = -1$$

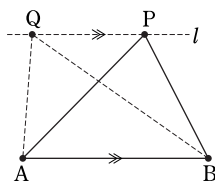
$$a \times \left(-\frac{1}{a}\right) = -1$$



⑤ 等積変形

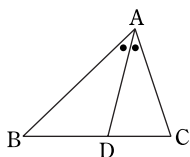
$\triangle PAB = \triangle QAB$ とするためには、
 $AB \parallel$ 直線 l となればよい。

<理由> 点 P, Q それぞれから
 直線 AB への距離を等しくする。



⑥ 角の二等分線定理

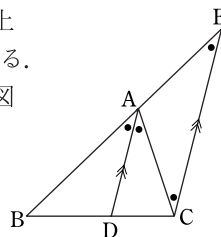
下図で、 $\angle BAD = \angle CAD$
 のとき、 $AB : AC = BD : DC$



<理由> 図で BA の延長線上
 に、 $AD \parallel EC$ となる点 E をとる。

平行線の同位角，錯角から図
 のように等しい角になり、

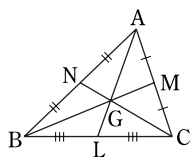
$$\begin{aligned} BD : DC &= AB : AE \\ &= AB : AC \end{aligned}$$



⑦ 三角形の重心

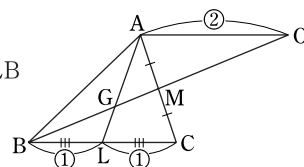
図で、点 G を重心といい、

$$AG : GL = 2 : 1$$



<理由> 図のように
 点 O をとれば、

$$\begin{aligned} AG : GL &= AO : LB \\ &= 2 : 1 \end{aligned}$$



思考を働かせる計算問題

毎年塾で教えていると、“数学が好き”という生徒ほど、計算問題に対しての意識が薄いように感じます(つまり、おろそかにしている、ということ)。その深層には「図形＝思考」「計算＝作業」という思い込みがあるのではないのでしょうか。確かに授業中も、生徒はつまらなそうな顔をして計算していますから、こんなことでいいのか、と考えることもあります。

前置きが長くなりましたが、今回は「計算＝思考」、つまり考えることに重点を置いた計算問題を紹介していきたいと思います。

言っておきますが、これはスピードを競うためのものではありませんから、どうやったら煩雑な計算をせずに、楽にこなすことができるか、このことだけを思って、(力ではなく頭で)解いていきましょう。

それでは第1問、一次方程式です。これは私が以前に塾の試験(中1)で出題したものです。

問題 1. 方程式

$$\frac{99^{10}}{1000^9}(x-1) = \frac{100^{10}}{999^9}(1-x)$$

を解け。

問題を見てすぐに手を付けようとする人は、そこを我慢してしばらくじっと問題を眺めてください。

そこで、方針が立たない人のために、ヒントをあげましょう。

《ヒント1》 指数部分をいじらないこと。

99や999が出てくると、何となく計算したくなりますが、この部分に手を付けてはいけません。慌てて計算しないように。

《ヒント2》 $x-1$ 、 $1-x$ をまとめる。

()があるから即はずす、とせずに、これに着目してうまくまとめれば(例えば左辺に移項して)、分かりやすい式ができあがります。

これでもう、みえてきましたね。後はどう解答まで持っていくかです。勘に頼って、答えだけを出しても意味がありません。最後まで、じっくりと考えてください。

では、模範解答を示しましょう。

解法 右辺を、すべて左辺へ移項して、

$$\frac{99^{10}}{1000^9}(x-1) - \frac{100^{10}}{999^9}(1-x) = 0$$

$$\frac{99^{10}}{1000^9}(x-1) + \frac{100^{10}}{999^9}(x-1) = 0$$

ここで、 $(x-1)$ でくくれば、

$$\left(\frac{99^{10}}{1000^9} + \frac{100^{10}}{999^9} \right) (x-1) = 0$$

この両辺を~~~~部(>0)で割れば、

$$x-1=0 \quad \therefore x=1$$

最後に~~~~部を計算してしまっても、もともともありません。どうやったら楽ができるのか、ここがポイントです。

続いては連立方程式です。解き方には、代入法や加減法があります。

ところで、後者の加減法は消去法といわれるように、主に文字を消すために用いられる手法ですが、ここでは“文字を活かす”ために活躍してもらいましょう。

問題 2. 連立方程式

$$\begin{cases} 13x+37y+9z=182 & \cdots \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 23x+11y+15z=154 & \cdots \cdots \cdots \textcircled{2} \\ 33x+21y+45z=354 & \cdots \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

において、 z の値を求めよ。

z を残すのだから…、と慌てて x や y を消そうとすると、もうたいへん。式がグチャグチャになってしまいます(何せ、係数が互いに素なものばかりですから)。

どのような戦法をとるのか、数字とにらめっこして、パズルの感覚でやってみましょう。

《ヒント1》 上でも言ったように、文字を消去して解く、ということにとらわれない。うまくやれば、変形したり両辺に何かをかけなくても、すーっときれいな式が出来上がります。

《ヒント2》 定数項や係数が大きいときの定石の一つですが、式をそのまま足したり、引いたりすることによって(①②③を組み合わせで)、式が簡潔になります。

解法 ①+②+③を考えると、

$$69x+69y+69z=690$$

となり、これを整理して、

$$x+y+z=10 \cdots \cdots \cdots \textcircled{4}$$

さらに、③-②から、

$$10x+10y+30z=200$$

となり、 $x+y+3z=20 \cdots \cdots \cdots \textcircled{5}$

ここで、⑤-④より、 $z=5$

いかがですか。いつのまにか答えが出てしまった、という感じでしょう。

(ただもちろん、①×5-③と②×3-③から、 x 、 y を先に求めてもかまいません。ですが途中の数字はかなり大きくなりますよ。ちなみに、 $x=2$ 、 $y=3$ です。)

そして最後は、二次方程式です。

問題 3. 二次方程式

$x^2-2.94x-0.18=0$ を解け。

まず、次を解いてみましょう。

練習 $x^2-110x+2400=0$ (…*1)

これは勘の鋭い人ならば、すぐに30と80が思い浮かんで、 $(x-30)(x-80)=0$ から、 $x=30, 80$ と出せるはずです。

ならばそうでない人は、解の公式しかないのでしょうか。いえ、そんなことはありません。次に気付けば、簡単にできますよ。

そのためにまず、 $x^2-11x+24=0$ (…*2) の解を考えると、 $x=3, 8$ ですね。

*1と*2の2つの方程式、関連を何か感じましたか。そう*1は*2の解の10倍になっていますね。それでいて、 x の係数は10倍、定数項は 10^2 倍です。

したがって、次のようにいえます。

(※) 二次方程式*1は、*2を解いて、その解を10倍すればよい。

つまり、次の関係が成り立っているのです。

$$\begin{array}{ccc} x^2-110x+2400=0 & & x=30, 80 \\ \downarrow \div 10 & \downarrow \div 10^2 & \downarrow \uparrow \\ x^2-11x+24=0 & \Rightarrow & x=3, 8 \end{array}$$

これは特に、(割る数が)10でなくともよくて、 x^2 の係数が1のとき、 x の項を a 、定数項を a^2 で割って、その解を a 倍すればよいのです。

それでは問題3を解いてみましょう。

解法 練習とは反対に、今度は与えられた数字が小さいですから、 x の係数や定数項を大きくして、解き易くして考えましょう。

そこで、 x の項を $\frac{1}{100}$ 、定数項を $\left(\frac{1}{100}\right)^2$

で割った式を考えます。すると、

$$x'^2-294x'-1800=0$$

となって、これを解くと、 $x'=300, -6$ です。

これより、 x の値は x' に $\frac{1}{100}$ をかければよ

いですから、 $x=3, -0.06$ となります。

(もちろん普通に解くなら、最初に式全体を100倍してから始めます。)

いかがでしたか。計算も“ただがむしゃらに解けばよい”のではないことを、わかっていただけたのではないのでしょうか。

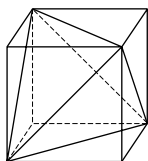
コラム④

四、六、八はつながってる

正四面体、正六面体(立方体)、正八面体の3種類の正多面体は、入れ子のような関係にあります。

<操作①>

立方体 A の頂点を一つおきに結びます。その中には正四面体 B が現れます。

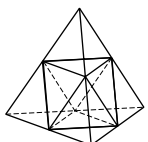


立方体 A と正四面体 B

こうして‘立方体’から‘正四面体’が生まれます。

<操作②>

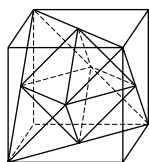
正四面体 B のとなり合う辺の中点を結びます。その中に正八面体 C が現れます。



正四面体 B と正八面体 C

こうして‘正四面体’から‘正八面体’が生まれます。

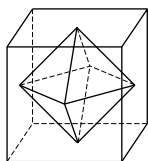
操作①と②によって、‘立方体 A’ ‘正四面体 B’ ‘正八面体 C’ の3種類の正多面体が右図のように一緒になっています。



立方体 A と正四面体 B と正八面体 C

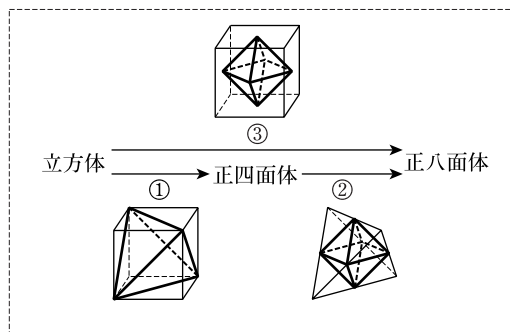
<操作③>

立方体 A のとなり合う面の中心を結ぶと正八面体 C です。



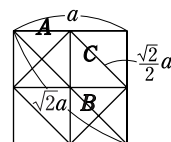
立方体 A と正八面体 C

こうして‘立方体’から‘正八面体’を生み出すこともできます。



さて、このような操作でできた、立方体 A、正四面体 B、正八面体 C の1辺の長さを比べましょう。

立方体 A の1辺を a とし、真上から眺めた図で考えます。すると正四面体 B の1辺は、立方体 A の対角線だから $\sqrt{2}a$ 。正八面体 C の1辺は、正四面体 B の1辺の半分だから $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ となります。



$$\text{1 辺の長さ } A : B : C = 1 : \sqrt{2} : \frac{\sqrt{2}}{2}$$

さらに、それぞれの体積を比較すると、

$$A \cdots a \times a \times a = a^3$$

$$B \cdots \frac{\sqrt{2}}{12} \times \sqrt{2}a \times \sqrt{2}a \times \sqrt{2}a = \frac{1}{3}a^3$$

$$C \cdots \frac{\sqrt{2}}{2}a \times \frac{\sqrt{2}}{2}a \times a \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}a^3$$

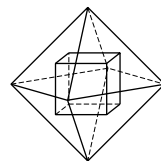
$$\text{体積 } A : B : C = 1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{6}$$

続いて別の方法も紹介します。

<操作④>

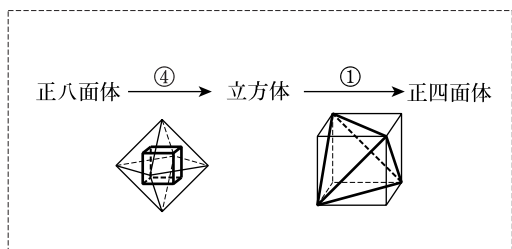
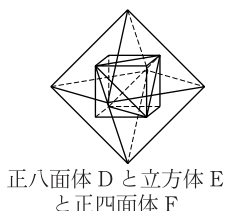
正八面体 D のとなり合う面の中心(重心)を結びます。その中には立方体 E が現れます。

こうして‘正八面体’から‘立方体’が生まれます。



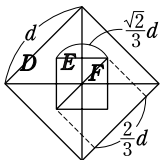
正八面体 D と立方体 E

引き続き＜操作①＞を行うことで、立方体 E から正四面体 F が現れ、
 ‘正八面体 D’ ‘立方体 E’ ‘正四面体 F’ の 3 種類が揃います。



ここで正八面体 D の 1 辺の長さを d として、比較します。先ほどと同様に真上から眺めます。

先に正四面体 F の 1 辺は $\frac{2}{3}d$ で、これと立方体 E の 1 辺を比べることで $\frac{\sqrt{2}}{3}d$ 。



$$\text{1 辺の長さ } D : E : F = 1 : \frac{\sqrt{2}}{3} : \frac{2}{3}$$

体積の比較は、

$$D \cdots d \times d \times \sqrt{2}d \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}d^3$$

$$E \cdots \frac{\sqrt{2}}{3}d \times \frac{\sqrt{2}}{3}d \times \frac{\sqrt{2}}{3}d = \frac{2\sqrt{2}}{27}d^3$$

$$F \cdots \frac{\sqrt{2}}{12} \times \frac{2}{3}d \times \frac{2}{3}d \times \frac{2}{3}d = \frac{2\sqrt{2}}{81}d^3$$

$$\text{体積 } D : E : F = 1 : \frac{2}{9} : \frac{2}{27}$$

また‘正八面体’の中に‘立方体’を作る方法として、他に次のようなものもあります。

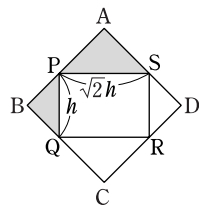
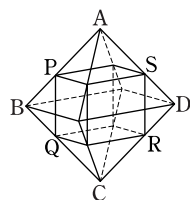
＜操作⑤＞

右図のように正八面体 G のとなり合う辺上にとった点を結び立方体 H を作ります。

できあがった立方体で 正八面体 G と立方体 H <操作①＞を続ければ、
 ‘正八面体’ ‘立方体’ ‘正四面体’ を作ることができます。

さて正八面体の面 ABCD を抜き出せばこれは正方形です。

上の見取り図から、この正方形の辺上に点 P, Q, R, S があって、立方体 H の 1 辺を h とすると、
 $PQ=h$, $PS=\sqrt{2}h$



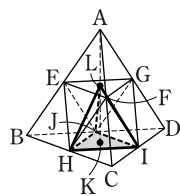
色をつけた三角形は、共に直角二等辺三角形だから、 $AP=h$, $PB=\frac{\sqrt{2}}{2}h$ です。

つまり $AP : PB = \sqrt{2} : 1$ 。正八面体 G と立方体 H の 1 辺の比は、 $(\sqrt{2}+1) : 1$ です。

ところで＜操作②＞では、正四面体の辺の中点を結んで正八面体を作りました。

そこで頂点 A から $\triangle BCD$ へ垂線 AK を下ろします。

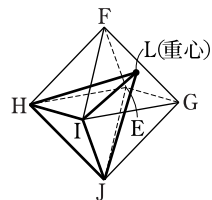
これと $\triangle EFG$ との交点を L とすると、
 三角すい L-HIJ は、
 三角すい A-EFG と
 合同な正四面体です。



◆注 点 K は $\triangle BCD$ の重心だから、点 L も $\triangle EFG$ の重心

このことからわかる

のは、正八面体 EFGHIJ の中に、1 辺の長さが等しい正四面体 LHIJ ができる＜操作⑥＞ということです





あとがき

数学は思考力が大事とされます。ただそれを縦横無尽に使いこなせるのは、前提となる知識があってこそです。

知識の習得は容易ではありませんが、本書でそれが無理なく得られると確信しています。

数学をあきらめることなく辛抱強く、本書がボロボロになるまで活用してください。

最終的には、必要な部分だけを取り出して、“自分だけのまとめノート”を作り上げることです。このノートは受験会場でもお守りがわりになるはずです。

中学生の今しか育たない能力があり、高校受験の問題にはそのエキスがたっぷり詰まっています。すべての中学生に是非解いてもらいたい一冊です。

(谷津綱一)

高校への数学

入試を勝ち抜く数学ワザ

・ビギナーズ 52 [改訂版]

2021 年 12 月 10 日 第 1 刷発行

著 者 谷津綱一

発行者 黒木美左雄

発行所 株式会社 東京出版

〒150-0012 東京都渋谷区広尾 3-12-7

電話 03-3407-3387 振替 00160-7-5286

<https://www.tokyo-s.jp/>

整 版 所 錦美堂整版

印刷・製本 技秀堂

落丁・乱丁の場合は、ご連絡ください。
送料弊社負担にてお取り替えいたします。

©Koichi Yatsu 2021 Printed in Japan
ISBN 978-4-88742-259-9