

京大・入試数学 51年の軌跡 【1971年～2021年】

目次	1
本書の構成	2

入試問題と解答

2021年～2015年

2021年	4
2020年	10
2019年	18
2018年	26
2017年	36
2016年	45
2015年	54

2014年～2006年

2014年	62
2013年	69
2012年	77
2011年	85
2010年	93
2009年	103
2008年	112
2007年	121
2006年(前・後期)	129

2005年～1997年

2005年(前・後期)	140
2004年(前・後期)	151
2003年(前・後期)	162
2002年(前・後期)	173
2001年(前・後期)	184
2000年(前・後期)	195
1999年(前・後期)	208
1998年(前・後期)	221
1997年(前・後期)	233

1996年～1985年

1996年(前・後期)	246
1995年(前・後期)	258
1994年(前・後期)	272
1993年(前・後期)	284
1992年(前・後期)	295
1991年(前・後期)	306
1990年(前・後期)	319
1989年(前・後期)	330
1988年(A・B日程)	340
1987年(A・B日程)	347
1986年	354
1985年	359

1984年～1976年

1984年	365
1983年	370
1982年	375
1981年	379
1980年	385
1979年	390
1978年	395
1977年	401
1976年	406

1975年～1971年

1975年	411
1974年	415
1973年	418
1972年	421
1971年	425

特色入試

理学部(2021年～2016年)	432
総合人間学部(2021年)	468

1992年～1971年の出題分野等	428
補遺	470
あとがき	488



本書の構成

本書は、京大入試の数学の過去問とその解答を集めたものです。過去 51 年分の 2 次試験の問題と解答を掲載しました。2016 年度から 2021 年度の理学部の特色入試も掲載しました。

原則として、解答は雑誌「大学への数学」から転載し、また、フォローノートは、今までに発行してきた「入試の軌跡／京大」から転載しました。

高校数学では、およそ 10 年ごとに、指導要領の改訂があり、現行課程においては範囲外になったものなどありますが、原則として、解答や受験報告などは当時のままです（現在は不適切とされている表現もあるかもしれませんが）。解答の前文などに、その当時発行していた今は絶版となっている本などが登場する箇所も、原則としてそのままにしてあります。なお、増刊「解法の探求Ⅱ」がしばしば登場しますが、それを部分改訂したものが「解法の探求・微積分」です。「解法の探求・確率」は大幅に改訂されています（主に演習編）。他の増刊号なども原則として指導要領が異なれば改訂されています。

本書で取り上げた 51 年を学習指導要領が同じもので分類すると以下のようになります。

1971 年～1975 年、1976 年～1984 年、
1985 年～1996 年、1997 年～2005 年、
2006 年～2014 年、2015 年～2021 年

本文中の年度表記ですが、原則として 1985 年までは 53 年と書いてあれば昭和 53 年を意味します。それ以降は 86 年と書いてあれば、1986 年を意味します。

解答の後に受験報告とフォローノートを掲載しています（掲載していない年度もあります）。

受験報告は、実際に受験した人の体験報告です。なお、1992 年から 1999 年のペンネームの後ろにある⑤は、編集部の調査で合格が判明した人です。

フォローノートは、解答や注の補足、別解、背景、研究など、問題を色々な角度から解説しました。フォローノートでとりあげる問題には、解答の問題番号に＊マークをつけてあります。

さらに巻末に補遺を設けました。補遺でとりあげる問題には、解答の問題番号に◆マークをつけてあります。

●本書で用いる記号などについて：

◎解答・解説部分で用いる記号について：

注意事項に関する記号は、1980 年以前は➡注だけでした。1981 年以降は 3 種類になり

⇒注…初心者のための注意事項

⇔注…すべての人のための注意事項

◆注…意欲的な人のための注意事項

です。そのほかについては、以下の通りです。

▨研究…すべての人のための研究事項

■研究…意欲的な人のための研究事項

▨…すべての人のためのコメント

■…意欲的な人のためのコメント

☆…是非身につけてほしい巧妙な解法

★…試験場では思いつかなくてよい巧妙な解法

＝…＝ 単純計算の省略（1981 年以前は単純計算の省略をしていてもたいていこの記号を使っていません）

◎解答のはじめの Data 欄について：

1993 年から設けられています（それ以前の出題分野について記したものを留意しました。□p.428）。

問題番号、難易度と目標時間、分野の順で、

・問題番号に☆がついているものは推薦問題。

・難易度は、大学入試問題を 1（易）～10（難）の 10 段階に分けたとき、

A（基本）…5 以下、B（標準）…6、7

C（発展）…8、9、D（難問）…10

です。出題当時の基準で評価した難易度を記しました。

・目標時間は、＊1 つにつき 10 分、○は 5 分、#は無制限。

・分野は、出題時点の課程で表し（例えば数Ⅰの場合、Ⅰなどと略記）、／のあとに具体的な分野名を記載。

1996 年は（ ）内に 1997 年からの課程を表示

1997 年は（ ）内に 1996 年までの課程を表示

2005 年は（ ）内に 2006 年からの課程を表示

◎受験報告の出来具合について：

○……完答（のつもり）

△……半答（のつもり）

×……誤答・手つかず・ほぼダメ

2021年

理系 ①～⑥ 150分 I II III AB(列ベ)
文系 ⑦～⑪ 120分 I II AB(列ベ)

文理共通問題がなく、理系で小問セットが2題もあります。中身は文理ともに控え目な出題で、発想・論証よりも処理・計算が目立ちます。一部を除き、どこかに類題がありそうな問題が並び、出来ないと不安、出来ても点差をつけた気になれません

① 次の各問に答えよ. (40点)

問1 xyz 空間の3点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, -1, 0)$, $C(0, 0, 2)$ を通る平面 α に関して点 $P(1, 1, 1)$ と対称な点 Q の座標を求めよ。ただし、点 Q が平面 α に関して P と対称であるとは、線分 PQ の中点 M が平面 α 上にあり、直線 PM が P から平面 α に下ろした垂線となることである。

問2 赤玉、白玉、青玉、黄玉が1個ずつ入った袋がある。よくかきまぜた後に袋から玉を1個取り出し、その玉の色を記録してから袋に戻す。この試行を繰り返すとき、 n 回目の試行で初めて赤玉が取り出されて4種類全ての色が記録済みとなる確率を求めよ。ただし n は4以上の整数とする。

② 曲線 $y = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$ 上の点 P における接線は x 軸と交わるとし、その交点を Q とおく。線分 PQ の長さを L とするとき、 L が取りうる値の最小値を求めよ. (30点)

③ 無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos \frac{n\pi}{6}$ の和を求めよ. (30点)

④ 曲線 $y = \log(1 + \cos x)$ の $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の部分の長さを求めよ. (30点)

⑤ xy 平面において、2点 $B(-\sqrt{3}, -1)$, $C(\sqrt{3}, -1)$ に対し、点 A は次の条件(*)を満たすとする。

(*) $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$ かつ点 A の y 座標は正。

次の各問に答えよ. (30点)

(1) $\triangle ABC$ の外心の座標を求めよ。

(2) 点 A が条件(*)を満たしながら動くとき、 $\triangle ABC$ の垂心の軌跡を求めよ。

⑥ 次の各問に答えよ. (40点)

問1 n を2以上の整数とする。 $3^n - 2^n$ が素数ならば n も素数であることを示せ。

問2 a を1より大きい定数とする。微分可能な関数 $f(x)$ が $f(a) = af(1)$ を満たすとき、曲線 $y = f(x)$ の接線で原点 $(0, 0)$ を通るものが存在することを示せ。

⑦ 次の各問に答えよ. (30点)

問1 10進法で表された数 6.75 を2進法で表せ。また、この数と2進法で表された数 101.0101 との積として与えられる数を2進法および4進法で表せ。

問2 $\triangle OAB$ において $OA = 3$, $OB = 2$, $\angle AOB = 60^\circ$ とする。 $\triangle OAB$ の垂心を H とするとき、 $\overrightarrow{OH}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。

⑧ 定積分 $\int_{-1}^1 \left| x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \right| dx$ を求めよ. (30点)

⑨ n を2以上の整数とする。1から n までの番号が付いた n 個の箱があり、それぞれの箱には赤玉と白玉が1個ずつ入っている。このとき操作(*)を $k = 1, \dots, n-1$ に対して、 k が小さい方から順に1回ずつ行う。

(*) 番号 k の箱から玉を1個取り出し、番号 $k+1$ の箱に入れてよくかきまぜる。

一連の操作がすべて終了した後、番号 n の箱から玉を1個取り出し、番号1の箱に入れる。このとき番号1の箱に赤玉と白玉が1個ずつ入っている確率を求めよ. (30点)

⑩ 空間の8点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(1, 2, 0)$, $C(0, 2, 0)$, $D(0, 0, 3)$, $E(1, 0, 3)$, $F(1, 2, 3)$, $G(0, 2, 3)$ を頂点とする直方体 $OABC-DEFG$ を考える。点 O 、点 F 、辺 AE 上の点 P 、および辺 CG 上の点 Q の4点が同一平面上にあるとする。このとき、四角形 $OPFQ$ の面積 S を最小にするような点 P および点 Q の座標を求めよ。また、そのときの S の値を求めよ. (30点)

⑪ p が素数ならば $p^4 + 14$ は素数でないことを示せ. (30点)

Data

- ①1 B* B／ベクトル（空間）
 2 B*○ A／確率
 ② B** IIⅢ／座標平面，微分法（最小）
 ③ B*** III／極限（無限級数の和）
 ④ B** III／積分法（弧長）
 ⑤☆ B*** II A／座標平面，平面図形
 ⑥1 B* A／整数
 2 D** III／微分法（接線）
 ⑦1 A*○ A／整数（記数法）
 2 A* B／ベクトル（平面）
 ⑧ A*○ II／積分法
 ⑨☆ C*** AB／確率
 ⑩ B** B／ベクトル（空間座標）
 ⑪ B*○ A／整数

① 問1 いかに手早く処理できるか，問2 定番商品に，「赤玉」でアクセントを加えています。

解 問1 平面 α の方程式は $x-y+\frac{z}{2}=1$ であるから，

$\vec{v}=\left(1, -1, \frac{1}{2}\right)$ は α の法線ベクトルである。

$\overrightarrow{PM}=s\vec{v}$ (s は実数)と表せるので，

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{OP}+s\vec{v}. \dots\dots\dots ①$$

Mは α 上にあるので， α の方程式より $\vec{v}\cdot\overrightarrow{OM}=1$ 。①を代入すると，

$$\vec{v}\cdot\overrightarrow{OP}+s|\vec{v}|^2=1 \quad \therefore \quad \frac{1}{2}+\frac{9}{4}s=1 \quad \therefore \quad s=\frac{2}{9}.$$

よって，

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{OP}+2s\vec{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\frac{2}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であり， $Q\left(\frac{13}{9}, \frac{5}{9}, \frac{11}{9}\right)$ 。

⇒注 α の単位法線ベクトルの1つを $\vec{n}$ とすると，
 $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}-2(\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n})\vec{n}$

と表せます。

問2 n 回目に赤玉を取り出す事象のうち， $1\sim n-1$ 回に取り出すのが赤玉以外の，3色以下である事象をX，ちょうど2色である事象をY，ちょうど1色である事象をZとすると，求める確率は

$$P(X)-P(Y)-P(Z). \dots\dots\dots ②$$

いま，

$$P(X)=\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\times\frac{1}{4}=\frac{3^{n-1}}{4^n},$$

$$P(Z)={}_3C_1\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4^n},$$

$$P(Y)={}_3C_2\left\{\left(\frac{2}{4}\right)^{n-1}-2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}\times\frac{1}{4} \\ =\frac{3\cdot 2^{n-1}-6}{4^n}.$$

$$\text{よって，} ②=\frac{3^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}+3}{4^n}.$$

② Pのx座標を設定するところ， L は分数関数になりますが，そのまま微分しても大したことはありません。

解 Pのx座標を t とおく． $C:y=\frac{1}{2}(x^2+1)$ について， $y'=x$ であるから， $x=t$ における接線の方程式は

$$y=t(x-t)+\frac{t^2+1}{2}.$$

これがx軸とQで交わるので， $t\neq 0$ である．Cはy軸に関して対称だから， $t>0$ で考えればよく，右図より，

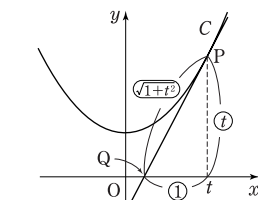
$$L=\frac{t^2+1}{2}\times\frac{\sqrt{1+t^2}}{t} \\ =\frac{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}{2t}.$$

$$L=f(t) \quad (t>0) \quad \text{とおくと，}$$

$$f'(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{3}{2}(t^2+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 2t\cdot t-(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}{t^2}$$

$$=\frac{(t^2+1)^{\frac{1}{2}}(2t^2-1)}{2t^2}$$

であるから，増減は右表のようになる．よって， L の最小値は



	t	(0) ...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$...
$f'(t)$		-	0 +
$f(t)$		↘	↗

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

別解 $L=\frac{1}{2}\left(\frac{t^2+1}{\frac{2}{t^3}}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (t>0)$ の括弧内は

$$t^{\frac{4}{3}}+\frac{1}{t^{\frac{2}{3}}}=t^{\frac{4}{3}}+\frac{1}{2t^{\frac{2}{3}}}+\frac{1}{2t^{\frac{2}{3}}} \dots\dots\dots ①$$

となるが，(相加平均) $\geq$ (相乗平均)より，

$$①\geq 3\sqrt[3]{t^{\frac{4}{3}}\cdot\frac{1}{2t^{\frac{2}{3}}}\cdot\frac{1}{2t^{\frac{2}{3}}}}=\frac{3}{2^{\frac{2}{3}}}.$$

等号は $t^{\frac{4}{3}}=\frac{1}{2t^{\frac{2}{3}}}$ ，つまり， $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき成立するの

で，このとき L は最小である（以下省略）。

③ 6項毎の和をとってもそれほど手間ではありませんが，複素数を用いて等比数列の和に持ち込むとラク。

$$\text{解} \quad a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n \cos \frac{n\pi}{6}, \quad S_n=\sum_{k=0}^n a_k,$$

$$z=\frac{1}{2}\left(\cos \frac{\pi}{6}+i \sin \frac{\pi}{6}\right) \quad (i \text{ は虚数単位})$$

とおく．ド・モアブルの定理より，

$$z^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\cos \frac{n\pi}{6} + i \sin \frac{n\pi}{6}\right)$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{2} (z^n + \bar{z}^n) = \frac{1}{2} (z^n + \bar{z}^n)$$

であるから、 $z \neq 1$, $\bar{z} \neq 1$ より、

$$S_n = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (z^k + \bar{z}^k) = \frac{1}{2} \left(\frac{1-z^{n+1}}{1-z} + \frac{1-\bar{z}^{n+1}}{1-\bar{z}} \right).$$

さて、 $|z^n| = |\bar{z}^n| = \frac{1}{2^n}$ より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z^n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\bar{z}^n| = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} z^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{z}^n = 0$$

であるから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1-\bar{z}} \right) = \frac{2-z-\bar{z}}{2(1-z)(1-\bar{z})}.$$

$z + \bar{z} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $z\bar{z} = |z|^2 = \frac{1}{4}$ であるから、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \frac{2 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4} \right)} = \frac{4 - \sqrt{3}}{5 - 2\sqrt{3}} \\ &= \frac{(4 - \sqrt{3})(5 + 2\sqrt{3})}{13} = \frac{14 + 3\sqrt{3}}{13}. \end{aligned}$$

別解 $b_n = a_{6n} + a_{6n+1} + \dots + a_{6n+5}$ とおく.

$$\begin{aligned} a_{n+6} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+6} \cos \frac{(n+6)\pi}{6} \\ &= -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+6} \cos \frac{n\pi}{6} = -\left(\frac{1}{2}\right)^6 a_n \end{aligned}$$

であるから、 $b_{n+1} = -\frac{1}{2^6} b_n$ となって、 $\{b_n\}$ は公比

$-\frac{1}{2^6}$ の等比数列である. よって、 m を正の整数として、

$$\begin{aligned} S_{6m-1} &= \sum_{k=0}^{6m-1} a_k = \sum_{j=0}^{m-1} b_j \\ &= \frac{1 - \left(-\frac{1}{2^6}\right)^m}{1 + \frac{1}{2^6}} b_0 \rightarrow \frac{64}{65} b_0 \quad (m \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

いま、

$$\begin{aligned} b_0 &= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2^5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{35}{32} + \frac{15}{64} \sqrt{3}. \end{aligned}$$

さて、 $|a_n| \leq \frac{1}{2^n}$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ であるから、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{6m-1} = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{6m} = \dots = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{6m+4}.$$

よって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{6m-1} = \frac{14 + 3\sqrt{3}}{13}.$$

④ ルートを外すことを念頭に、 $1 + \cos x$ を「2乗の形」に直しておきます.

解 $f(x) = \log(1 + \cos x)$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) とおく. 求

める部分の長さ L は

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx.$$

さて、

$$f(x) = \log\left(2\cos^2 \frac{x}{2}\right) = \log 2 + 2\log \cos \frac{x}{2}$$

$$\therefore f'(x) = 2 \cdot \frac{-\sin \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = -\tan \frac{x}{2}$$

$$\therefore 1 + \{f'(x)\}^2 = 1 + \tan^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}$$

であるから、

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\left|\cos \frac{x}{2}\right|} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos \frac{x}{2}} dx.$$

$x = 2t$ と置換すると、

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos t} \cdot 2dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos t}{\cos^2 t} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2(\sin t)'}{1 - \sin^2 t} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{1 + \sin t} + \frac{1}{1 - \sin t} \right) (\sin t)' dt \\ &= \left[\log |1 + \sin t| - \log |1 - \sin t| \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \log \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} = 2\log(\sqrt{2} + 1). \end{aligned}$$

⑤ 2017 年の理系④に雰囲気が似ています.

(1) B, C の座標から、外心の位置は見え見え?

(2) 初等幾何でもできますが、A の位置での場合分けや軌跡の限界が煩わしいので、垂心の座標を A の座標で表します. 垂心の x 座標は A の x 座標です.

解 (1) $\triangle ABC$ の外心を P とする. 円周角の定理より、

$$\angle BPC = 2 \times \angle BAC = \frac{2}{3}\pi.$$

座標の原点を O, 辺 BC の中点を M とする. P は BC の垂直二等分線 (直線 OM) 上で M の上側にある.

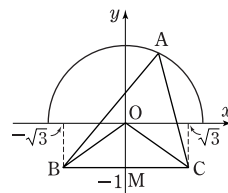
$\triangle BOM$ は $OM : BM = 1 : \sqrt{3}$ の直角三角形であるから、

$$\angle BOM = \frac{\pi}{3}, \triangle OBC \text{ は}$$

OB = OC の二等辺三角形で

$$\text{あるから、} \angle BOC = \frac{2}{3}\pi.$$

よって、P = O, つまり、P の座標は (0, 0).



受験報告

▶一浪生による京都大学工学部受験報告です。去年と同じく前日は一睡もできずに当日の朝を迎える(－7時間)。長い長い2時間の昼休みを経て(ほとんど寝てた)、ようやく問題が配られる(－15分)。透かし読みを試みてみた。光の当たり具合的にちょっと透ける角度を発見、そして $\sin \alpha \cos \alpha$ なんちゃらだけ見えた。そして一年間待ちわびてきた試験が開始。

全体をざっと眺め、まずは③へ。単純な極限問題じゃなか、今年は易化なのかなと思いつつ、油断せず丁寧に計算していく。そして完答(25分)。つぎに④へ。あれ、こんな簡単な積分を京大がだすか？と不安になりながらも完答。あまりにもあっけなかったの、自分が間違っているのかと疑心暗鬼になりじっくり見直すも、ミスはなかった。今年は易化と確信(40分)。勢いに乗ったまま⑤へ。正弦定理つかって外心求めるのって学コンにもあったな、懐かしいなと思いつつ(1)は瞬殺。つづいて(2)。証明は簡単だが導出は難しい等式 $\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$ が使えることに気づく。これは浪人して最初に知った事実だった。運命的なものに感銘を受け、花粉症との相乗効果で涙が

出る。しっかり見直し、完答(65分)。1時間で3完だから夢の6完いけるかと調子に乗りながら⑥へ。問1、見た瞬間対偶証明だなと気づき、完答(75分)。問2へ。平均値の定理とかであたりをつけるも失敗(85分)。気を取り直し①へ。問1、こんな京大受験生で解けない人いないだろうと思いつつ完答(90分)。京大ももっと差がつく問題だせよ、とちょっとした不満が募る。つづいて問2。問1と同じノリで解こうとしたら意外と手間がかかることに気づく。赤玉は他の色の玉と対等であることを念頭に置き、完答(110分)。そして最後の②。ここまで割とあっけなかったからこれは難問ではないかという潜感が入っていたかもしれない。単純に微分した式で、有理数解に極小値を持たないことに気づく。ここで、そもそも立式が違うのではないかと限なく見直す。問題が検出されなかったから、考え直す。そして、 $\cos 3\theta$ とかで3次の方程式が作れることを思い出す。ならば、 $1+t^2$ とかあるから $t=\tan \theta$ とおいたら $\cos$ だけの式になってうまくいくんじゃないかと思い、計算を進めてみるがどこかで計算ミスをし、そもそも極小値

が発生しない事になってしまい失敗(120分)。諦めて他の問題の確認作業をすることにした。そして、①の問2で計算ミス発覚&修正。②に戻る(145分)。ここでようやく t^2+1 を普通に s と置けばうまくいきそうだな、と気づき、消しゴムで消す時間を惜しみ、先程の愚考に大きく×印をつけ、 $t^2+1=s$ として計算を進める。時間がせまって字が汚くなっていくしょうがない。そして最小値、出たぞー！(残り1分)が、なぜか焦ってここで $t^2 = -\frac{1}{2}$ という謎のマイナスをつけてしまい困惑したまま試験終了。出来は

①○○②△③○④○⑤○⑥○×

この難易度は5完できたはずだ。②を落としたのがつらすぎる。1年間何やってきたんだ…。翌日、英語、物化はまずまずの出来でした。去年は果てしない絶望感を抱きながら京都を後にしたので、それに比べれば、今年はそこそこ晴れ晴れした気持ちで京都を去ることができたと思います(受かってほしいです)。(調査票出し忘れ、私立大受験資格を失った問題児)

フォローノート

⑦問1 <<別解>>

4進法を主役にした方が自然であることを六甲学院高等学校の後藤晃一先生から、ご指摘頂きました。

2進数を小数点を基準に2桁ずつに区切ると、表のように対応することを用います。

2進数	00	01	10	11
4進数	0	1	2	3

別解 $6.75_{(10)} = \left(4 + 2 + \frac{3}{4}\right)_{(10)} = 12.3_{(4)}$,

$(0)1\ 01\ 01\ 01_{(2)} = 11.11_{(4)}$ より、

(積) $= 12.3_{(4)} \times 11.11_{(4)}$

$= 203.313_{(4)}$

$= 10\ 00\ 11\ 11\ 01\ 11_{(2)}$

答は 100011.110111, 203.313

*

*

後藤先生のコメント：教科「情報」の内容に

2進数 ↔ 16進数をうまく変換する話が出てきますが、その応用です。簡単な問題ながら他教科とのつながりが見える良問と感じました。

V 作戦

理系…⑥問2は難しいので試験場では避けるべきだが、他はどれも標準レベルなので、得意な分野から順番に確保していくとよいだろう。①と⑥が2問ずつで合計8問と考えると、のんびりしている暇はない。本年のセットは、例年に比べて発想力よりも計算力・処理能力が必要とされている。例年より穏やかなので高得点でも安心はできず、医学部は8割5分、それ以外は8割が目標。

文系…⑦と⑧は基本的な問題なので落とせない。残り3問のうち1.5問分あれば上出来だろうが、⑪はここ数年の過去問に類題があるので、京大受験生なら確保したいところ。ただ、理系と同様に例年より差が付きにくそうなので、高得点でも安心はできない。

特色入試・理学部

2021年度

2020年11月14日 240分

極限の感覚が大学で要求されるものに近い，というのがこの試験の特徴で，これは踏襲されています．そういう人を求めているのでしょう．今年は，条件がシンプルな①をはじめ，見た目では難易度がわからない問題が並びました．抱くのは絶望感？

- ① n を3以上の自然数， λ を実数とする．次の条件(i)，(ii)を満たす空間ベクトル $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ が存在するための， n と λ が満たすべき条件を求めよ．

(i) $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ は相異なる長さ1の空間ベクトルである．

(ii) $i \neq j$ のときベクトル $\vec{v}_i$ と $\vec{v}_j$ の内積は λ に等しい． (20点)

- ② 自然数 n, m に対して横 n 個，縦 m 個からなる $n \times m$ 個のマスを考え，それぞれのマスに1つずつ白玉または黒玉を入れる．その白玉と黒玉の入れ方のうち，黒玉が上下左右いずれにも隣り合わないような入れ方の総数を $a_{n,m}$ とする．例えば $n=5, m=3$ のとき，図1の入れ方は黒玉が上下左右いずれにも隣り合わないような入れ方であり，図2の入れ方は黒玉が左右に隣り合っている入れ方である．

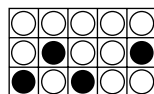


図1

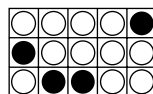


図2

以下の設問に答えよ．

(20点)

- (1) $a_{n,2}$ を求めよ．

- (2) ある正の実数 D が存在して，すべての自然数 n について $\frac{1}{2} \leq \frac{\log_2 a_{n,n}}{n^2} \leq \frac{1}{2} \log_2(1+\sqrt{2}) + \frac{D}{n}$ となることを示せ．

- ③ 以下の条件(i)，(ii)，(iii)を満たす実数の列 $x_1, x_2, \dots, x_{1000}$ は存在するか．

(i) $x_1 = \frac{1}{2}$

(ii) $k=2, 3, \dots, 1000$ に対し， x_k は $\frac{x_{k-1}+99}{100}$ ， $-\frac{100x_{k-1}}{99x_{k-1}-1}$ のいずれかに等しい．ただし， $x_{k-1} = \frac{1}{99}$

のときは $x_k = \frac{x_{k-1}+99}{100}$ とする．

(iii) $\frac{49}{100} < x_{1000} < \frac{51}{100}$ (20点)

- ④ C を1以上の実数， $\{a_n\}$ を0以上の整数からなる数列で $a_1=0, a_2=1$ を満たすとする． xy 平面上の点 $A_n=(a_n, a_{n+1})$ はすべての $n=1, 2, 3, \dots$ について次の条件(i)，(ii)，(iii)を満たすとする．

(i) 3点 A_n, O, A_{n+1} は同一直線上になく，三角形 A_nOA_{n+1} と三角形 $A_{n+1}OA_{n+2}$ の内部は互いに交わらない．

(ii) 三角形 A_nOA_{n+1} の面積は C より小さい．

(iii) $\angle A_1OA_{n+1} < \frac{\pi}{4}$ かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} \angle A_1OA_{n+1} = \frac{\pi}{4}$ である．

ここで O は xy 平面の原点を表す．以下の設問に答えよ．

(20点)

- (1) $C=100$ のとき，(i)，(ii)，(iii)を満たす数列 $\{a_n\}$ の例を1つ与えよ．

(2) 2以上の自然数 n, m が $n < m$ を満たすとき， $0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{a_{m+1}}{a_m} \leq 2C \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_m} \right)$ となることを示せ．

(3) ある実数 D が存在して，すべての自然数 n について $a_{n+1} - a_n \leq D$ となることを示せ．

(4) ある自然数 n_0 が存在して，点 $A_{n_0}, A_{n_0+1}, A_{n_0+2}, \dots$ はすべて同一直線上にあることを示せ．

Data

- ① C***** B/ベクトル (空間)
 ② C***** A/場合の数
 ③ D***** B/数列 (漸化式)
 ④ D# IIⅢ/座標, 極限

① 条件(i)(ii)を用いると, 各ベクトルの始点をそろえたとき, どの2つの終点どうしの距離も等しいという非常に強い条件が得られます. このことに注目して図形的に解いてみます.

解 空間内の点Oを始点としたときの $\vec{v}_i$ の終点を A_i とする($i=1, 2, \dots, n$). 条件(i)(ii)より

$$|\vec{A_i A_j}|^2 = |\vec{v_j} - \vec{v_i}|^2 = 2 - 2\lambda \quad (i \neq j)$$

でこれは定数なので, n 個の点 $A_1, A_2, \dots, A_n$ はどの2点間の距離も等しい. 特に, 3点 A_1, A_2, A_3 は正三角形をなし, これらの3点を含む平面を α とおく.

(ア) $n=3$ のとき, Oから α に下ろした垂線の足をHとおくと,

$$HA_i = \sqrt{OA_i^2 - OH^2} = \sqrt{1 - OH^2} \quad (i=1, 2, 3)$$

であるから, $HA_1 = HA_2 = HA_3$ となる. よって, Hは三角形 $A_1 A_2 A_3$ の外心(重心と一致)であり, 以下Gとおく. Oは, Gを通り α に垂直な直線 l 上にある.

さて, λ の範囲を求めよう.

$A_1 G \leq OA_1 = 1$ であるから,

$$0 < A_1 A_2 = \sqrt{3} A_1 G \leq \sqrt{3}$$

が成り立つ. 逆に,

$$0 < A_1 A_2 \leq \sqrt{3} \text{ であれば,}$$

$$0 < A_1 G \leq 1 \text{ なので, } l \text{ 上に}$$

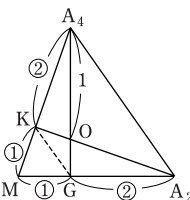
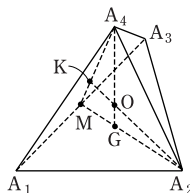
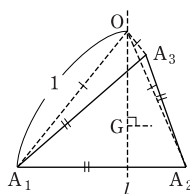
$OA_1 = OA_2 = OA_3 = 1$ となるOをとることができる. よって, λ の範囲は, $0 < \sqrt{2-2\lambda} \leq \sqrt{3}$ を解いて,

$$-\frac{1}{2} \leq \lambda < 1 \text{ である.}$$

(イ) $n=4$ のとき, 4点 A_1, A_2, A_3, A_4 は正四面体をなす. $A_1 A_3$ の中点をMとし, A_2 から対面に下ろした垂線の足をKとすると, Kは正三角形 $A_1 A_3 A_4$ の重心である. G, Kは平面 $A_2 A_4 M$ 上にあり, Oは $A_2 K$ と $A_4 G$ の交点である. 三角形 $A_2 A_4 M$ において,

$$\begin{aligned} MK : KA_4 &= MG : GA_2 \\ &= 1 : 2 \end{aligned}$$

なので, GKと $A_2 A_4$ は平行で,



$$A_4 O : OG = A_2 A_4 : KG = MA_2 : MG = 3 : 1$$

である. したがって, $OG = \frac{1}{3}$,

$$A_1 A_2^2 = 3 A_1 G^2 = 3 \cdot \left\{ 1^2 - \left(\frac{1}{3} \right)^2 \right\} = \frac{8}{3}$$

となり, $2 - 2\lambda = \frac{8}{3}$ から, $\lambda = -\frac{1}{3}$ と決まる.

(ウ) $n \geq 5$ のとき, $A_1, \dots, A_n$ はどの4点も正四面体をなし, (イ)の過程よりOはその内部にある. 正四面体 $A_1 A_2 A_3 A_4$ と $A_1 A_2 A_3 A_5$ に注目すると, A_4 と A_5 は α に関して対称であるが, 正四面体 $A_1 A_2 A_3 A_4$ と $A_1 A_2 A_3 A_5$ の内部は共有点を持たないため, Oをとることができない. したがって, 存在しない.

以上から, 「 $n=3$ かつ $-\frac{1}{2} \leq \lambda < 1$ 」または「 $n=4$ かつ $\lambda = -\frac{1}{3}$ 」が求める条件である.

② (1) 端の縦2マスを入れ方で分類すると, 連立漸化式が得られます.

(ウ) $n \geq 5$ のとき, $A_1, \dots, A_n$ はどの4点も正四面体をなし, (イ)の過程よりOはその内部にある. 正四面体 $A_1 A_2 A_3 A_4$ と $A_1 A_2 A_3 A_5$ に注目すると, A_4 と A_5 は α に関して対称であるが, 正四面体 $A_1 A_2 A_3 A_4$ と $A_1 A_2 A_3 A_5$ の内部は共有点を持たないため, Oをとることができない. したがって, 存在しない.

② (1) 端の縦2マスを入れ方で分類すると, 連立漸化式が得られます.

(2) $\log$ をはずして指数表記にすると方向性がつかみ

やすいかもしれません. 左側は $2^{\frac{n^2}{2}} \leq a_{n,n}$ なので, 全体の半分のマスは自由に決められる, ということです. 市松模様が思い浮かべば解決します. 右側は, (1)の数値が出てきます. 関連を考えましょう.

解 (1) 題意を満たす入れ方のうち, 左端の2マスが $\begin{smallmatrix} \bigcirc & \bigcirc \end{smallmatrix}$ であるものが b_n 通り, $\begin{smallmatrix} \bullet & \bigcirc \\ \bigcirc & \bullet \end{smallmatrix}$ であるものが各 c_n 通りあるとする. 黒玉が上下左右に隣り合わないこ

とから $\begin{smallmatrix} \bullet & \bullet \end{smallmatrix}$ であるものではなく,

$$a_{n,2} = b_n + 2c_n;$$

$$b_1 = 1, c_1 = 1,$$

$$b_{n+1} = b_n + 2c_n, c_{n+1} = b_n + c_n \quad (n=1, 2, \dots)$$

より $a_{n,2} = b_{n+1}$ が成り立つ.

$\{b_n + rc_n\}$ が等比数列になる r を見つける.

$$1 : r = (1+r) : (2+r) \text{ より } r = \pm\sqrt{2}$$

$$b_{n+1} + \sqrt{2}c_{n+1} = (1+\sqrt{2})(b_n + \sqrt{2}c_n),$$

$$b_{n+1} - \sqrt{2}c_{n+1} = (1-\sqrt{2})(b_n - \sqrt{2}c_n)$$

となるので,

◎2021 年

⑨の別解

箱 n から前に遡って考えることもできます.

別解 1 箱 1 と箱 n で取り出す玉が同じ色である確率を、箱 n で取り出す玉が元々どの箱にあったのかで場合分けして求める. 箱 $n, n-1, \dots, 2$ のときは順に,

$$\frac{1}{3}, \left(\frac{1}{3}\right)^2, \dots, \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

箱 1 のときは

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

求める確率はこれらの和で,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^k + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n-1}}\right) + \frac{1}{3^{n-1}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}} \end{aligned}$$

*

*

赤玉と白玉は「箱 1 から取り出した玉」以外是对等であることを最大限に活すと、次のように求められます.

別解 2 箱 1 から取り出した玉を⑤とする. 箱 n から取り出すのは,

(i) ⑤

(ii) ⑤ではない, ⑤と同じ色の玉

(iii) ⑤と違う色の玉

のいずれか. 最初は箱 2, $\dots, n$ には赤玉と白玉が 1 個ずつ入っているので, ⑤を除く赤玉と白玉は対等である. よって, (ii) と (iii) の確率は等しい. (i) の確率を p とおくと, 求める確率は

$$p + (1-p) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (1+p) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right\}$$

◎2016 年

⑪の別解

森 茂樹先生から頂いた別解です. 以下の (b) の場合に対称性を利用します.

別解 $f(x)=0$ が実数係数の 3 次方程式であることと (ロ) より, $f(x)=0$ の 3 解のうち 1 解は実数解であり, 他の 2 解は共役な虚数解であるから, 3 解を α, β, γ とするとき, α は実数, β, γ は虚数で $\gamma = \bar{\beta}$ としてよい.

以下では, $x^3=x$ を解くと,

$$x(x+1)(x-1)=0 \quad \therefore x=0, \pm 1$$

となり, 解はすべて実数となる……(*) ことに注意する.

さて, (イ) の条件は, $\alpha^3, \beta^3, \gamma^3$ がそれぞれ α, β, γ のいずれかに一致することであるが, α^3 が実数であることより, $\alpha^3 \neq \beta, \gamma$ であり, β, γ が虚数であることより, $\beta^3 \neq \beta, \gamma^3 \neq \gamma$ であるから, それは,

$$\text{「}\alpha^3=\alpha \text{ かつ } \beta^3=\alpha \text{ かつ } \gamma^3=\alpha\text{」}$$

$$\text{または「}\alpha^3=\alpha \text{ かつ } \beta^3=\gamma \text{ かつ } \gamma^3=\beta\text{」}$$

のいずれかとなることである.

ここで, $\alpha^3=\alpha$ のとき, (*) より, $\alpha=0, \pm 1$ である.

……①

(a) $\alpha^3=\alpha$ かつ $\beta^3=\alpha$ かつ $\gamma^3=\alpha$ のとき

α, β, γ は, $x^3=\alpha$, つまり, $x^3-\alpha=0$ の 3 解である. よって, (イ) を満たす $f(x)$ は,

$$x^3, x^3-1=(x-1)(x^2+x+1),$$

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$$

であり, これらのうち, (ロ) を満たすものは, x^3-1, x^3+1 である.

(b) $\alpha^3=\alpha$ かつ $\beta^3=\gamma$ かつ $\gamma^3=\beta$ のとき

$u=\beta+\gamma, v=\beta\gamma$ とおき, β が虚数であることより $\beta \neq \bar{\beta}=\gamma$ であることと, $u=\beta+\bar{\beta}$ より u が実数であることに注意すると,

$$\beta^3=\gamma \text{ かつ } \gamma^3=\beta$$

$$\iff \beta^3-\gamma^3=\gamma-\beta \text{ かつ } \beta^3+\gamma^3=\beta+\gamma$$

$$\iff \beta^2+\beta\gamma+\gamma^2=-1 \text{ かつ } \beta^3+\gamma^3=\beta+\gamma$$

$$\iff u^2-v=-1 \text{ かつ } u^3-3uv=u$$

$$\iff v=u^2+1 \text{ かつ } u^3-3u(u^2+1)=u$$

$$\iff v=u^2+1 \text{ かつ } u(u^2+2)=0$$

$$\iff u=0 \text{ かつ } v=1$$

よって、 β, γ は、 $x^2+1=0$ の2解であり、一方は i 、もう一方は $-i$ であるから、(ロ)は満たされ、①とあわせて、 $f(x)$ は、

$$x(x^2+1), (x-1)(x^2+1), (x+1)(x^2+1)$$

となる。

以上より、求める $f(x)$ は、

$$x^3-1, x^3+1, x(x^2+1), \\ (x-1)(x^2+1), (x+1)(x^2+1)$$

◎2006 年

後期⑤：エースの式について

“物理的”な問題ですが、“数学的”に解答してみます。

別解 すべての水を排出するのに要する時間を T とする。 $z=h$ のときの水面の面積を $S(h)$ とすると、

$$V(t)=\int_h^H S(z) dz$$

左辺を t で微分すると、合成関数の微分から、

$$\frac{dV(t)}{dt}=\frac{dV(t)}{dh}\times\frac{dh}{dt} \dots\dots\dots ①$$

$$\therefore \sqrt{h}=-S(h)\times\frac{dh}{dt} \quad \therefore 1=\left(-\frac{S(h)}{\sqrt{h}}\right)\frac{dh}{dt}$$

辺々 t で積分すると、置換積分より、

$$\int_0^T dt=\int_0^T\left(-\frac{S(h)}{\sqrt{h}}\right)\frac{dh}{dt} dt \\ \therefore T=\int_H^0\left(-\frac{S(h)}{\sqrt{h}}\right) dh=\int_0^H\frac{S(h)}{\sqrt{h}} dh$$

あとは $S(h)=\frac{\pi R^2}{H^2}h^2$ を代入すればよい。(以下省略)

t と h を数式で結びつけるのに、①が最大のポイントでした。この式を物理的に解釈すると、

(排出速度)=(水面の面積)×(水面の下降速度)

$$\frac{dV(t)}{dt} = S(h) \times \left(-\frac{dh}{dt}\right)$$

ですが、感覚的にも明らかですし、微小量を考えるという微積分の根本に立ち返った考え方とも言えます。

この等式を、月刊『大学への数学』元編集長の福田邦彦氏は“エースの式”と名付けました。「“水の問題”でエース級に大活躍するから」だそうです。

◎2005 年

前期④⑧の別解

$a-b$ が大きい場合はいかにもダメそうですが、これを不等式評価で示してみます。まずは④です。

別解 $a^3-b^3=217$ より $(-b)^3-(-a)^3=217$ であるから、 $(a, b)=(p, q)$ が答ならば $(a, b)=(-q, -p)$ も答。ここで、 $p\leq 0$ ならば、 $p^3-q^3=217$ より $q<0$ であるから、 $-q>0$ 。よって、 $a>0$ の場合を考えればよい。

$a-b\geq 31$ とする。 $b\geq 0$ とすると、

$$a^3-b^3\geq (b+31)^3-b^3\geq 31^3>217$$

となって、不適。 $b<0$ とすると、 $-b>0$ で、

$$217=a^3+(-b)^3>(-b)^3 \quad \therefore -b\leq 6$$

同様に、 $a\leq 6$ であるから、 $a-b\leq 12$ 。(以下省略)

*

*

⑧もほぼ同様です。

別解 (同様に) $a>0$ の場合を考えればよい。

$a-b\geq 13$ とする。 $b\geq 0$ とすると、

$$a^3-b^3\geq (b+13)^3-b^3\geq 13^3>65$$

となって、不適。 $b<0$ とすると、 $-b>0$ で、

$$65=a^3+(-b)^3>(-b)^3 \quad \therefore -b\leq 4$$

同様に、 $a\leq 4$ であるから、 $a-b\leq 8$ 。(以下省略)

あ と が き

1971 年から 2021 年までの 51 年分の京大入試の数学の問題と解答をまとめたのが本書です。51 年間で学習指導要領が変遷しました。最近では、おもに「複素数平面」と「1 次変換」が交互に入れ替わっています。複素数平面が扱われているのは

1971～1975 年

1997～2005 年

2015～2021 年

です。

学習指導要領の変遷があったとはいえ、共通している部分も多いです。

本書をパラパラ眺めて興味を持った問題を解くなり、各自うまく活用して、入試突破に役立てて頂ければ幸いです。(坪田)

京大の入試は、数学者・永田雅宜^{まさよし}先生(1927-2008)の多大な貢献があったと言われています。永田先生は生前、数学の問題を解くことについて、次のように書かれています。

自分で考えて、何かを知った、または、理解したときは、それがあまり重要なことでなくても、嬉しく感ずるものである。重要なことであれば、非常に嬉しく感ずる。

数学の問題は、このような嬉しさを感じするのに適した材料であろう。解法を教わって解いたのでは、嬉しさ・楽しさは感じられないのが普通であり、自分で考えて、解法を見つけて、嬉しさを感じるのである。他の人がすでに解法を知っている問題であっても、自分で考えて解法を見つけることに意義があり、嬉しさのもとになる。

—『数学まなびはじめ 第1集』
(日本評論社)

* * *

51 年に亘る問題を概観すると、

年による難易度の振れ幅も大きく、巷間と言われる「出題傾向」を意図的にハズしにかかっていると感じることもあります。いわゆる「京大らしい」と言われる問題が話題になりますが、その他の多くは、通常の学習の延長線上にあるオーソドックスな問題だったりします。

さて、京大の特徴として、数学的に自然な設定の問題を一から考えさせる問題が多く、「論証の京大」と言われますが、正解に至る論理的な正しさが肝になっていることが挙げられます。先に挙げた本の中で永田先生はこう書かれています。

第一、覚える数学なんて、おもしろくないでしょう。嬉しさ、楽しさを感じずる数学に励んでください。本書の楽しみ方として、これ以上の言葉はないように思われます。

2022 年、京大は創立 125 周年を迎えます。このタイミングで本書を出版できることに感謝したいと思います。(横戸)

大学への数学

京大・入試数学 51 年の軌跡【1971 年～2021 年】

2021 年 10 月 19 日 第 1 刷発行

編 者 東京出版編集部

発行者 黒木美左雄

発行所 株式会社 東京出版

〒150-0012 東京都渋谷区広尾 3-12-7

電話 03-3407-3387 振替 00160-7-5286

<https://www.tokyo-s.jp/>

整版所 錦美堂整版

印刷所 光陽メディア

製本所 技秀堂

落丁・乱丁の場合はご連絡下さい。送料弊社負担にてお取替えいたします。

©Tokyo Shuppan 2021

Printed in Japan

ISBN978-4-88742-257-5 (定価はカバーに表示してあります)