大学への数学

難関大入試数学

数列の難問とその周辺

栗田哲也 著

本書の利用法

本書は 2015 年度に私が雑誌「大学への数学」に連載した雑誌記事をもとに，若干の加筆を施してまとめた参考書です.

利用方法というものは人によって違うものです．一つの本にも様々な側面がありますし，同じことが書かれていても読者の知りたいテーマ，レベルなど，様々な要素によって読み方は変わってくるでしょう．そこで，以下に簡単な手引きをしておきます.

1．まずは数列分野の標準問題は解けるようになってから

本書は高校の「数列」に特化した参考書ですが，大学入試のやや難しめの問題に照準を合わせたために，標準的な問題（基本的な数列の一般項や和，漸化式のパターン的な解き方，数学的帰納法の標準的な問題）は取り扱っていません.

したがって，まずは教科書のレベル，一般大学の入試の標準レベルが解けるようになってからお使いになることをお勧めします.

2．対象となる方は

①　高校 1，2 年生で数学には自信があり，数列の基礎は一応できたと思っている方で，数列分野の難問に挑戦してみたい方

本書の問題はほとんどが難関大学が出題した問題の中でも難しめの問題，さらには，SLP といって，世界数学オリンピックの候補問題からとってあるような問題もあります.

高校 1，2 年生は，まだ受験には間がありますし，難しい問題に自力で挑戦するチャンスの時期と思います.

こうした方は，どんどんと解いては，どんどんと解説を読んでいけば自然と実力がついてきます.

②　難関大学を受験する受験生の方（特に仕上げの時期）

数列は「融合問題」として難関校ではいろいろなところに顔を出します．したがって微積分とともに，最後にまとめをするときには適した素材です．ただ，その場合，本書は問題数は多いので，すべてをやるのではなく，気になったタイプの問題を解いては解説を見るといった「つまみ食い」でよいと思います.

③　指導者の方

本書は数列の問題を，テーマ別に掘り下げています．珠玉の問題を集めたつもりですので，いろいろなタイプの問題を知り，興味深い問題を実力のある生徒さんに紹介されたい方にも適しているのではないでしょうか.

本書で用いる記号について：

＝…＝　単純計算の省略

⇨**注**　初心者のための注意事項.

⇨**注**　すべての人のための注意事項.

➡**注**　意欲的な人のための注意事項.

大学への数学

難関大入試数学・数列の難問とその周辺

▶栗田 哲也　著◀

CONTENTS

数 B, Ⅲ

§0 「はじめに」と「イントロ」を兼ねて

個人的な感慨で恐縮だが，数学は芸術などと同じように，「どこかで出会い」「どこかで目覚める」学問と思う．実際，好きであれば，いつでも考えていられるが，魅力を感じないものを四六時中考えねばならなかったら，これは苦痛以外の何物でもない．

まあ，学校のカリキュラムで学期ごとに嫌な教科の得点もかせがねばならず，やむなくコツコツと勉学をしている人にとっては，上記はぜいたくな理想なのだが，それでも私は上の論は，かなりの真実性を有すると思っている．

では，数学が「好き」になる契機は何か？

以前の教師生活で数学ができる人，得意な人をかなりの数見てきたが，その中でも数学を苦痛に感じずいつでも考えているような人は，どこかで数学の「不思議」に目覚めた人であったような気がする．彼らは少しくらいの困難や難しさにはめげずに，考えぬいた末，数学ができるようになっていくのである．

とすれば，数学の指導者や参考書の役割はなんであろう？

体系を記し，かみくだいてやさしく教えることも，成程必要だろうと思う．大学受験の必要上，効率よく各分野を網羅し，適切な解法を記す書物も必要だろう．

だが，その他に，読者に不思議な問題（多くは難しい）を呈示し，本質的だが「うーん，こんな考え方もあるのかあ」とうなる物の見方を呈示して，数学を考えることが好きになってもらう本も必要ではないだろうか．

そうした本は巷には少ない．「数学を好きにします」とうたう本の多くは，いわばベビーフードを与えて，好き嫌いをなくしましょう，というタイプである．

本書は，そういう親切な本とは異なって，はじめから，面白くて不思議だが，挑発的なまでに難しい問題を，大学受験や SLP（数学オリンピック世界大会の問題候補）の数列分野から選んで，それに解説を加えた本である．

従って，「数列の基礎」を解説した本ではなく，「数列の面白さ，数列の見方」を呈示して読者を‘挑発’するタイプの本といってもよい．

ただ，目標は数学の中の「数列」という一分野に‘出会い’好きになってもらうことであって，もちろん難しい問題の洪水に苦しんでもらうことではない（それは論外である）.

そこで最初に，数列の「ものの見方」のうち，ちょっと面白いがまずまずやさしいものを，ちょこっと 2 題ほどつけ加えてこの §0 とすることにした.

1．高校で習う「数列」と本書で取り上げる「問題」

現在「数列」という分野は高等学校のカリキュラムでは，高校 2 年時の「数学 B」で習うことになっている．そこで習う主なことは，

Ⅰ．等差数列，等比数列など，基本的な数列の一般項の出し方，n 項までの和

Ⅱ．$\sum$ 記号による計算など，様々な和の求め方

Ⅲ．様々なタイプの漸化式の解き方

Ⅳ．数学的帰納法による証明

ということになるだろう．本書に取りかかる前に，このあたりの基礎は一応学んでおいてほしい.

だが，こうした教科書のカリキュラムをマスターした気になっても難関大学の入試（数列の問題）はなかなか解き難いものが多く，その背後には，私が先程言ったような「不思議」に通じるものも多い.

そこで主流となっている難問は，

① 実験をして一般項や数列の性質を予想し，それを式変形や帰納法で示す

② 変わったタイプの漸化式の底に隠れている本質を見抜く（整数論や三角関数に関係するものなど）

③ 母関数という概念を背後にもっているもの

など，分類しはじめるとキリがないのだが，まずこの §0 では手はじめに，やさしい問題の「感覚的な解説（証明や答案ではなく単なるイメージ）」を 1 つ呈示してイントロとしよう．それは，

数列は関数の一種で，その調べ方には
微積分との類似性がある

というものだ.

かなり本質的で，しかもそれほど難しくはない物の見方なのに，高校数学ではなぜかこの見方はあまり重きをおかれない.

そこで，イントロには面白いかと思ったしだいである.

なお，以下の話では微分法・積分法の初歩（微分の概念，$f'(x)$，$f''(x)$ などの記号と，グラフの凹凸の関係など）は既知として話をすすめる．

また，この話題の難問については，§2 にたくさん出てくる．

2．数列は関数の一種である

まず，1 つの問題を呈示しよう．

問題 1

7 つの実数 a，b，c，d，e，f，g について，不等式

$$a-b>b-c>c-d>d-e>e-f>f-g>g-a$$

が成立している．このとき，この 7 つの実数のうち最大のものはどれか．

まずは普通に解いてみよう．

【解説】

結論から書けば $\boldsymbol{a}$ が最大である．

それは，その他の可能性を否定することで得られる．

まず，b が最大とすると $a-b<0$，$b-c>0$ だから与えられた不等式 $a-b>b-c$ に反する．

次に，c が最大とすると，$b-c<0$，$c-d>0$ だから，$b-c>c-d$ に反する．このようにして，b〜g についてはすべて最大である可能性が否定されるので，最大値は a 以外にない（逆に，a が最大である例を作るのは容易）．

*　　　*　　　*

さて，この解法は思いついてさえしまえばあっさりとはしている．だが，本問を別の観点から眺めてみよう．その観点とは，

<u>数列とは，自然数を定義域とする関数である（一種のトビトビ関数である）</u>

という観点である．関数（何回でも微分可能ななめらかな普通の関数）を数列と比較すると，

- ▨ グラフを座標平面に表示するという手があった．数列でも，このことが感覚的に有効な場合がある．
- ▨ 関数 $f(x)$ を微分するということは，$f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ を作るということだが，これによって局所の増減が分かった．この $f(x)$ を $\{a_n\}$ に，h を 1 に代えて考えると，数列 $\{a_n\}$ を差分すると

は

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{1}=a_{n+1}-a_n$$

を作ることである．もちろんこの符号で $a_n \to a_{n+1}$ の増減は分かる．

▨ 関数 $f(x)$ の第 2 次導関数（2 回微分したもの）を作るとは

$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$$

を作ることだが，

$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}$$

も成り立つ．h を 1 に代えて考えると，数列 $\{a_n\}$ を 2 階差分するとは，

$$a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n$$

を作るという操作に対応する．

そして，$f''(x)$ が正であれば $f(x)$ はその区間で下に凸だから，最大値の候補が区間の両端に限られるように，$\{a_n\}$ を 2 階差分した $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n$ が正であれば（§2 の p.27 で若干の図をつけたので参照してください），これが成り立つ“区間”では数列 $\{a_n\}$ は，初項か末項のどちらかが最大となる．

【問題 1 の感覚的イメージ】

さて，では先程の問題 1 は作り手の側から見ると，どのような問題なのだろう？

私は，この出題者はこれを「数列の問題」として捉えていたように思う．

そこで，説明のため問題を作りかえてみよう．

問題 1′

7 つの実数 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6，a_7 について，不等式

$$a_1-a_2>a_2-a_3>a_3-a_4>a_4-a_5>a_5-a_6>a_6-a_7>a_7-a_1$$

が成立している．このとき，この 7 つの実数のうち最大のものはどれか．

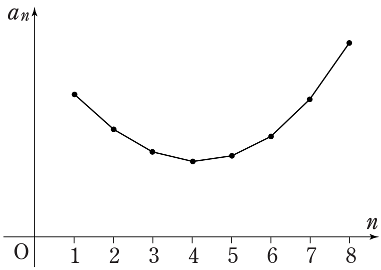
ここではあくまでも感覚的理解に徹することにする．

まず $a_1=a_8$ とする初項 a_1，第 8 項目 a_8（$=a_1$）という数列を考えよう．与えられた条件から，

$$a_3-2a_2+a_1>0$$
$$a_4-2a_3+a_2>0$$
$$a_5-2a_4+a_3>0$$
$$a_6-2a_5+a_4>0$$
$$a_7-2a_6+a_5>0$$
$$a_8-2a_7+a_6>0$$

という 6 つの式が成り立つが，これは，数列 a_1～a_8 を 2 階差分してできる数列がすべて正であることを示している．

2 階差分の数列が正なのだから（微分法で $f''(x)>0$ のとき下に凸なのと同じく），この数列を座標平面上に表すと，例えば下図のように“下に凸”のようなものとなり，最大値は両端のどちらかでとる．



従って，a_1 または a_8 が最大なのだが，$a_1=a_8$ なのだから，a_1 が最大である．

このように考えてみると，次の問題（過去の京都大（文系）の入試）も出題者の作問契機はすぐに分かるだろう．

問題 2

実数 x_1，…，x_n（$n≧3$）が条件 $x_{k-1}-2x_k+x_{k+1}>0$（$2≦k≦n-1$）を満たすとし，x_1，…，x_n の最小値を a とする．

このとき $x_l=a$ となる l（$1≦l≦n$）の個数は 1 または 2 であることを示せ．

出題者側から見れば，次のようになる．

これを n 項からなる数列 $\{x_m\}$ と見れば，2 階差分は常に正だから，この数列は‘下に凸’タイプである．

図 1

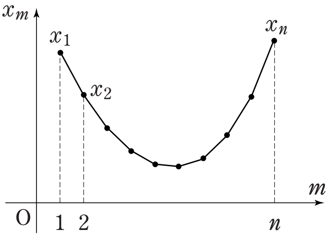


図 2

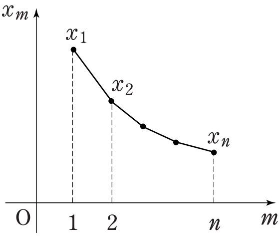


図 3

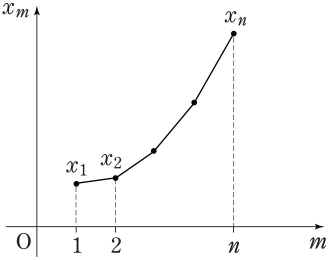
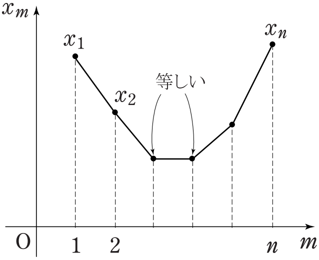


図 4



そこで，図 1，図 2，図 3 のように，下に凸タイプの数列を座標平面上に表してみると，最小値をとる x_l は一見 1 つしかないように見えるが，実は図 4 のように，途中で 2 つ連続して等しい箇所が出てくる場合もある（図 2 で $x_{n-1}=x_n$；図 3 で $x_1=x_2$ の場合もある）．

こうして，$x_l=a$ となるような l の個数は感覚的にも 1 つか 2 つである．

*　　　　*　　　　*

ではやさしい例で本書の趣旨をつかんでもらったところで，いよいよ §1 から，不思議を秘めた問題の数々が始まる．

面白さとの出会いがどこにあるかは各人各様で，どこにあるかはわからない．ただ，自力で考えぬいて，一応わかった気になった問題の解説を読んで，「あっ，そういうことか」と腹にストンと落ちたとき，数学に惹かれていくことが多い気はする．

張り切って，まずは各問自力で挑戦してみてください．

§1　実験・書き並べ・予想・帰納法

数列は小学校以来「規則的に並ぶ数の列」としてお馴染みだ．しかし，大学入試を中心に，一定水準以上の数列の問題を蒐集し眺めたところ，予想以上にこの分野は深かったし，面白かった．はりきって取りくんでいこう．

1．実験と予想

数が並んでいても，その並びが完全にデタラメ（規則性がない）だと，これは考察の対象にならない．そこで逆に考えれば，その「規則性」さえ発見してしまえば，「勝ち」のわけで，そのためには素朴なようだが手作業で「実験」し，きまりを見抜くことが大切だ．

問題 1

次の 3 条件(イ)(ロ)(ハ)をみたすような数列 $\{a_n\}$ を考える．

(イ)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}a_k=\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{n+l}$ ($n=1$, 2, $\cdots$)

(ロ)　$a_{2n}=\dfrac{a_{2n-1}}{a_{2n-1}+1}$ ($n=1$, 2, $\cdots$)

(ハ)　$a_n>0$ ($n=1$, 2, $\cdots$)

この数列の第 n 項を求めよ．　（阪大）

こうした問題では，抽象的に巧い手を考えつこうとして時間を浪費するより，まず初めの数項を求めて，アタリをつけることが大切だ．

【解説】

(イ)，(ロ)で $n=1$ とおくと(イ)から，$a_1-a_2=\dfrac{1}{2}$，(ロ)から $a_2=\dfrac{a_1}{a_1+1}$ がわかる．2 式を連立して a_2 を消去すると，

$$2a_1{}^2-a_1-1=0 \qquad \therefore \quad (2a_1+1)(a_1-1)=0$$

となり，(ハ)から，$a_1=1$，よって $a_2=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$ もわかる．

さらに実験をつづける．(イ)，(ロ)で $n=2$ とおく．

この実験も先と同様なので計算は読者にまかせるが，$a_3=\dfrac{1}{3}$，$a_4=\dfrac{1}{4}$ となる．

ここから，$\boldsymbol{a_n=\dfrac{1}{n}}$ が予想できる．また計算過程から，「2 項ずつ順にペアになって決まっていくらしい」という推測もつく．

＊　　＊　　＊

(イ)で，n ⇨ $n+1$ とした式から，元の式を引くと，

$$a_{2n+1}-a_{2n+2}=\left(\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+1}\right)-\frac{1}{n+1} \quad \cdots\cdots ①$$

(ロ)より，$a_{2n+2}=\dfrac{a_{2n+1}}{a_{2n+1}+1}$ $\cdots\cdots$ ②

①，②から a_{2n+2} を消去すると，

$$a_{2n+1}-\frac{a_{2n+1}}{a_{2n+1}+1}=\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$$

式変形して（予想があるので安心して計算できる！）

$$(2n+1)(2n+2)x^2-x-1=0 \text{（$a_{2n+1}=x$ とおいた）}$$

$$\therefore \quad \{(2n+1)x-1\}\{(2n+2)x+1\}=0$$

よって，条件(ハ)より，$a_{2n+1}=\dfrac{1}{2n+1}$，これを①に代入すれば，

$a_{2n+2}=\dfrac{1}{2n+2}$ となる．

以上より n が奇数の場合も偶数の場合も，先程の予想は示された．

⇨注　$1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}-\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n}$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

これを背景にした問題は時々ある．

あとがき

最近いろいろな場面で，「すぐに役立つ」ということがほとんどの価値を決めていると痛感し，首を傾げます．

もちろん役に立つのはよいことなのでしょうが，ちょいと腑に落ちないものも感じるのです．

体に譬えれば，受験勉強で即効性のある学習をするとは，薬を飲むようなもので，これは確かにある程度効きます．だから私もそれを全面的に否定する訳ではありません．

しかし，元になる体がしっかりとしていなければ，いつかは薬漬けとなり，薬を飲まなければ何もできなくなってしまうように，受験勉強もあまり「お役立ち系」のものばかりやっていると，「親切に教えてもらわないと何もできない」ということになりそうな気がしてしまうのです．

「成功するやり方」をたくさん聞くよりも，自ら挑戦して，失敗の中から学んでいった方が本当の応用力はつくもの．

もちろん入試に充てられる時間は限られていますからすべてを自力でやりきるわけにはいかないのですが，この頃の入試学習はあまりに「即効性」に重きを置きすぎて，バランスを欠き，「大学への数学」ではなく，「入試で終わる数学」をやっているような気がしてなりません．

以上はもちろん，ひねくれた老人のボヤキと思ってもらって一向にかまわないのですが，本書を手にする若い皆さんは，これは「受かるための薬」ではなく，
「体を鍛えるための運動だ」と思って，
本書を通じてたくましさのようなものを身につけてもらいたいと思っています．

最後になりますが，本書の執筆をさせて下さった東京出版の黒木美左雄社長，編集をして下さった飯島さん，坪田さんにこの場を借りて感謝したいと思います．

難関大入試数学・数列の難問とその周辺

令和３年４月５日　第１版第１刷発行　　定価はカバーに表示してあります．

著　者　栗田哲也
発行者　黒木美左雄
発行所　**株式会社　東京出版**
〒150-0012　東京都渋谷区広尾 3-12-7
電話 03-3407-3387　振替 00160-7-5286
http://www.tokyo-s.jp/
整版所　錦美堂整版株式会社
印刷所　株式会社光陽メディア
製本所　株式会社技秀堂製本部
落丁・乱丁本がございましたら，送料小社負担にてお取替えいたします．

ⒸTetsuya Kurita 2021 Printed in Japan
ISBN978-4-88742-253-7