はじめに

秋田洋和

受験生は，志望先が国私立高校であれ公立高校であれ，事前に数年分の過去問を解いて傾向や難易度を知り，入念なシミュレーションを経て入試本番に臨むのが一般的です．特に公立高校の入試問題は，出題傾向や難易度が急激に変わることは少ないと思われてきたため，過去問演習の結果が「本番の目安」として有効な資料とされています．

ところが 2012 年の春，ある県の公立高校入試問題が急激に難化して話題になりました．「(試験終了後に)廊下で泣き出す子がいた」といった報告もあったほどで，県全体の平均点は前年に比べておよそ 16 点も低くなり，正答率が 0.5％しかない設問も登場したのです．

この事をきっかけにして全国の公立入試問題を調べてみたところ，

「急激な難化」
「新傾向問題」

という 2 つの変化が，この年を境に全国各地で見られることがわかってきました．難化については，正答率が 10％に満たない問題も珍しくなく，ほぼ 0％という問題まで登場しています．入試問題そのものを 2 レベル用意する自治体が増え(例：埼玉県では「学校選択問題」という名称)，公立高校入試における難しい問題の象徴として東京都の「自校作成問題(都立高校でありながら私立高校のような独自の入試問題を出題する)」を挙げられる時代になりました．標準的な難易度の問題においては，大学入試改革と連動した「長文化」の傾向が全国的に見られるようになり，現在まで続いていることを覚えておいてください．

月刊「高校への数学」の『公立入試問題ピックアップ』は，前述の 2 つの変化を象徴する問題をテーマ別に深く掘り下げて紹介する目的で，2017 年から連載を続けています．本書はその中から 30 編を選んで一冊にまとめたものです．その中には，20 年〜 30 年前には「難関国私立高校の入試問題」として出題されていた，一般的な中学生だと目にすることさえなかったテーマも含まれています．

勉強時間が無限にあるのなら，古今東西のあらゆる入試問題に触れれば経験値を貯めることは可能でしょう．しかしながら，忙しい中学生にとって時間は有限です．限られた時間の中で「調べよう，思考しよう，自ら発見しよう」という経験を高いレベルで積み上げることは，なかなか難しいはずです．

本書は，公立高校入試を目指すそんな皆さん(特に数学を得点源とし，ライバルに差をつけたい人)を対象に，発展的な内容について「何を，どこまで」学んでおく必要があるのか，その目安を示しています．受験勉強における「羅針盤」として活用していただければ幸いです．

見慣れない問題・初見の問題の出題形式に慣れ，入試本番で焦らず解き進めることを目標に本書を読み進め，効率的に経験値を貯めていきましょう．

2021 年 3 月

本書の使い方

●本書の特長

1つのテーマにつき4ページの構成となっています．目次の配列に沿って解き進めることはもちろん，数式あるいは図形といったおおまかな分類で優先順位をつけても，関数や円といったテーマ別に演習しても，あるいは自分の苦手とするテーマからピンポイントで演習してもかまいません．

●本書の構成

全30編すべてに，テーマに即した全国の公立高校入試問題を掲載しています．正答率が公表されている問題については記載していますので，ぜひ参考にしてください．相似や三平方の定理，二次関数の性質といった教科書に登場する重要性質は既知という前提で解説します．

「例題」では，そのテーマに関する「難化」または「新傾向」の象徴的な問題を掲載してあります．ここでは，関数や図形，確率や整数といった分野ごとの頻出事項も紹介しますが，初見の知識に出会うこともあるはずです．そんなときは巻末の『重要事項のまとめ』を参照してください．ライバルとの差を埋めるor広げるための重要定理・公式を掲載していますので，必ず目で確認し手で描いて，頭の中に整理しいつでも取り出せるようにしておきましょう．

「演習問題」は，「例題」で確認した知識や手法の再確認に利用します．「例題」よりレベルアップしていることも多いので，基本事項や重要性質を「知っている」ではなく「使える」状態にすることを目標に解き進めましょう．

●本書の進め方

①　問題を解くときは

必ず専用のノートを用意して，小問ごとに途中経過や考えた跡を書き残しましょう(答えだけ書く，計算過程をグチャグチャ書くのはNG)．近年の公立高校入試が「なぜそうなるのか」を問い，記述させる傾向があることを念頭におき「後で見直したときに，ポイントがすぐにわかる」ようにまとめればOKです．よって，思考の跡をすべて文章で残す必要はなく，図や表を用いてもかまいません．

掲載されている問題は「難しい」あるいは「長文or新傾向」ですから，慣れないテーマではおそらく1問に費やす時間が10分では足りないこともあるでしょう．時間制限はそれほど深く考えず「出題形式やテーマに慣れる」ことを一番の目標としてください．

②　問題を解き終えたら

解説をジックリと読み込んでください．初見の知識は『重要事項のまとめ』で確認し，その都度日付を書き込みます．できれば「重要事項まとめノート」を作り，本書の掲載事項に限らず模試や塾の授業などで登場した知識も日付込みで記載し，自分だけのオリジナルの参考書とすることをお勧めします．日付の書き込みの多い定理・公式は「確認頻度の高いもの＝よく出題されるもの」です．

自力で解けた問題については，解説で紹介した解法(別解含む)と自分の解法を比べてみましょう．「より簡単に・より楽に」を合言葉にして途中経過を確認すると，理解がより進みます．

自力で解き切れなかったときは，自分で気づかなかった点のチェックが重要です．解説を読んで初見の知識を確認し，気づかなかった部分を専用ノートに記載しながら正解へ至るまでの過程をたどります．ただし，これは「理解した」ではなく「読んだ，書いた，確認した」段階です．多くの中学生はこの作業をもって「終了」としますが，皆さんは必ず一定の期間を空けて再度問題に挑み，チェックした内容が本当に自分の中に取り込まれているかを点検してください．正しい答えを覚えているのが目標ではなく，専用ノートに書き込んだ内容を自力で再現できることを目指します．

③　時間がないときは／入試直前期は

各テーマの「例題」とその解説を，読み物として空き時間に目を通すだけでもそのテーマのポイントを頭に入れることは可能です．何度も読み直して，最後の入試直前期には「例題」を見ただけで「この問題はここがポイントなんだ」と友達に説明する感じで整理ができていれば，ちゃんと経験値は貯まっています．

公立入試数学「難化＆新傾向」問題ピックアップ

目　次

はじめに …… 1
本書の使い方 …… 2

① 自分の考えを説明させる出題例あれこれ …… 4
② 有名テーマが題材の「その場で考えさせる問題」 …… 8
③ 20年前では考えられない難易度の問題―整数編 …… 12
④ 多くの受験生を悩ませる「整数」＋「記述」 …… 16
⑤ 「資料の活用なんて楽勝！」と言っていられない理由とは …… 20
⑥ 正答率が低くなる「資料の活用」の出題内容を探ろう …… 24
⑦ 公立入試で問われる「規則性」の全体像をつかもう …… 28
⑧ 規則的な数字の変化を追いかける …… 32
⑨ 「作業しながら数字の推移に注目する」ことがテーマの長文問題に挑もう …… 36
⑩ パターン通りの出題とは限らない「速さ」の文章題 …… 40
⑪ 「図形上の動点＋確率」を徹底マーク！ …… 44
⑫ 「2つのさいころ」が主役の難問に挑む …… 48
⑬ しばらく流行!?「長い文章＋確率」 …… 52
⑭ 数え漏れをどう防ぐ？「新しいルール＋確率」 …… 56
⑮ 20年前では考えられない難易度の問題―関数編 …… 60
⑯ ここで差がつく「関数＋図形」 …… 64
⑰ 公立入試でも登場する「関数＋○○」 …… 68
⑱ 座標平面上で扱う平行四辺形に要注意！ …… 72
⑲ 20年前では考えられない難易度の問題―直線図形編 …… 76
⑳ 「図形を見る目」が問われる直線図形 …… 80
㉑ 公立入試の「直線図形の難問」に潜む共通点 …… 84
㉒ 20年前では考えられない難易度の問題―円編 …… 88
㉓ 公立入試の「円」は難問の宝庫 …… 92
㉔ 隠れている相似，隠れている円を発見せよ！ …… 96
㉕ 「円＋○○」には有名性質が隠されている …… 100
㉖ 点Pが動くと何かが起こる～図形上の動点～ …… 104
㉗ 20年前では考えられない難易度の問題―立体図形編 …… 108
㉘ 立体図形上で扱う「最小値」の基本パターン …… 112
㉙ 「紙を折って立体を作る」問題を攻略するには …… 116
㉚ 公立入試で問われる正四面体の基本的な見方 …… 120

重要事項のまとめ …… 124
あとがき …… 128

公立入試問題ピックアップ①

自分の考えを説明させる出題例あれこれ

0. 答えるのは「正しい数値」だけじゃない

公立高校入試の出題傾向はここ10年弱で大きく変化していますが，その代表例が「(自分の考えを)説明しなさい」という設問です．

最近の公立高校入試においては分野に関係なく正解を求める途中経過や考え方を採点対象に含めるケースが多くなっているのです．考え方に部分点が与えられているため，正しい答えだけを解答用紙に記入しても満点はもらえません．しっかりと準備して入試に臨みましょう．「解けた・解けない」「書ける・書けない」を気にするのは入試直前になってからでいいので，まずは友達に説明する感じで自分の考えをまとめられるかどうかを点検してみましょう．

今回は整数と図形の分野を中心に紹介します．

1.「どうして？」と問いかけてくる出題例

まず紹介するのは「倍数の判定法」です．3の倍数の判定法はおなじみですが…．

例題・1-1

(1) 千の位の数と一の位の数，百の位の数と十の位の数がそれぞれ等しい4桁の自然数が11の倍数になることを説明しなさい．
（16 広島県，改）

(2) 3桁の整数で，百の位の数と一の位の数の和が，十の位の数と等しいならば，この3桁の整数が11の倍数であることを説明しなさい．
（15 山口県，改）

---

(1)と(2)は4桁と3桁の違いはありますが，問われている内容は同じです．

解 (1) 4桁の自然数Mの千の位と一の位の数をx，百の位と十の位の数をyとおくと，

$$M=1000x+100y+10y+x$$
$$=1001x+110y=11(91x+10y)$$

$91x+10y$は整数なので，$11(91x+10y)$は必ず11の倍数となる．よってMは11の倍数．

(2) 3桁の整数をM，Mの百の位の数をx，十の位の数をy，一の位の数をzとおくと，

$$M=100x+10y+z \quad \cdots\cdots①$$

条件より，$x+z=y$ ……②

ここで，②を①に代入して，

$$M=100x+10(x+z)+z$$
$$=110x+11z=11(10x+z)$$

$10x+z$は整数なので，$11(10x+z)$は必ず11の倍数となる．よってMは11の倍数．

＊　　＊　　＊

「11の倍数の判定法は知ってる．塾で習ったよ！」という皆さん，その成り立ちをしっかり説明することはできますか？「公式やテクニックは知っているけれど，ただ覚えているだけで友達に聞かれても説明できないよ」という人は要注意．普段の勉強への意識をちょっと変えることで，「説明しなさい」への準備も進めておきましょう．

4桁の整数が11の倍数となるための条件について，以下の説明も参考にしてください．

【参考】 4桁の自然数をM，Mの千の位の数をa，百の位の数をb，十の位の数をc，一の位の数をdとおくと，

$$M=1000a+100b+10c+d$$
$$=1001a+99b+11c-a+b-c+d$$
$$=11(91a+9b+c)-a+b-c+d$$

ここで，$91a+9b+c$は整数なので，

11($91a+9b+c$)は必ず 11 の倍数となる．したがって，M が 11 の倍数になるためには，～～～線部が 11 の倍数(0 以下を含む)になればよい．

➡**注**　これを板書風にまとめると…．
4 桁の整数 ABCD が 11 の倍数のとき，
(B+D)−(A+C)＝11 の倍数（0 以下を含む）
が成り立ちます(桁数が増えても同様)．

続けて図形分野からの出題も見てみましょう．

例題・1-2

七角形の外角の和が 360° であることを説明したい．説明の出だしを「どの頂点においても，内角とその外角の和は 180° であるから」とし，この続きを書いて，七角形の外角の和が 360° であることを説明しなさい．　(15　群馬県，改)

「n 角形の外角の和が 360°」であることは覚えていて当然ですが，「それはなぜ？」と改めて問われると困る人も多い事でしょう．

解　どの頂点においても，内角とその外角の和は 180° であるから，7 個の頂点における内角と外角の和は，180°×7＝1260°……①

次に，七角形の内角の和は，七角形の 1 つの頂点からひける 4 本の対角線によって七角形を 5 つの三角形に分割することで，

180°×5＝900°　……②

と考えられるから，七角形の外角の和は，
①−②＝360° となる．

2. 生活の中に潜む「なぜ？」も問われる

「うるう年」についていきなり入試で問われたら，ちょっとビックリしますよね．

例題・2

次は，先生と A さんの会話です．これを読んで，次の問いに答えなさい．

先生「A さんの誕生日は 3 月 2 日でしたね．」

A さん「はい．私は西暦 2000 年生まれで，今年(2017 年) 17 歳になります．西暦 2000 年は，うるう年だったと思うのですが，うるう年について教えてください．」

先生「うるう年は，次のように決められています．」

> (Ⅰ)　西暦の年数が 4 で割り切れる年をうるう年とする．
> (Ⅱ)　ただし，西暦の年数が 4 で割り切れても 100 で割り切れる年はうるう年としない．
> (Ⅲ)　ただし，西暦の年数が 100 で割り切れても 400 で割り切れる年はうるう年とする．

先生「うるう年は，2 月の日数が 1 日増えて 2 月 29 日までとなり，1 年間の日数が 366 日となります．」

(問)　A さんの 15 歳の誕生日(西暦 2015 年 3 月 2 日)は月曜日です．A さんの誕生日が，再び月曜日になるのは西暦何年ですか．途中の説明も書いて答えを求めなさい．

(15　埼玉県，改)

公表されている資料によると，正答率は 14.1%(無答率は 54.6%)です．うるう年の周期についての条件を見落としたと思われる 2022 年という誤答が最も多かったこと，また答えのみの解答も多く見られたことが記されています．皆さんも注意しながら考えてみてください．

解　365＝7×52＋1，366＝7×52＋2 より，3 月 2 日の曜日はうるう年でなければ 1 つ進み，うるう年であれば(2 月 29 日をはさめば) 2 つ進む．先生の説明により，うるう年は 2016 年，2020 年，…であるから，2015 年 3 月 2 日が月曜日であるとき，2016 年は 2 月 29 日をはさんだので曜日は 2 つ進んで水曜日，2017 年は木曜日，2018 年は金曜日，2019 年は土曜日．そして 2020 年は，2 月 29 日をはさんだので月曜日になる．よって，答えは**西暦 2020 年．**

＊　　＊　　＊

「約数の個数と総和の求め方」「n 角形の対角線の本数の求め方」などは，テクニックとして処理方法は覚えていても，その成り立ちや仕組みを説明できない生徒が多いものです．今後も数々のテクニックを学ぶはずですが，結果だけを丸暗記せず「なぜ？どうして？」を強く意識

しましょう．その習慣こそが，説明を求められる設問に対する一番の対策になるからです．

演　習　問　題

1．2つの奇数の積は奇数であることを，Aさんは次のように証明した．

【Aさんの証明】

> n を整数とすると，2つの奇数は $2n+1$，$2n+3$ と表せる．このとき，2つの奇数の積は，
>
> $(2n+1)(2n+3)=4n^2+8n+3$
>
> $=2(2n^2+4n+1)+1$
>
> $2n^2+4n+1$ は整数だから，これは奇数である．
>
> よって，2つの奇数の積は奇数である．

Aさんの証明は正しくない．その理由を書き，2つの奇数の積は奇数であることを証明せよ．　（15　福井県，改）

2．次の図のゲーム盤を使い，【ルール】に従ってゲームを行う．ただし，ゲーム盤の数字はゴールするまでに必要な数を表し，さいころの1から6までの目の出方は同様に確からしいとする．

（ゲーム盤）

⑬⑫⑪⑩⑨⑧⑦⑥⑤④③②①［ゴール］

【ルール】

［1］　スタートの位置をゲーム盤の①～⑬の中から1つ選び，コマを置く．

［2］　2つのさいころを同時に1回投げ，出た目の数の和だけゴールに向かってコマを進める．

［3］　出た目の数の和がゴールまでに必要な数をこえるときは，こえた数だけゴールからもどる．

例えば，スタートの位置を③に選び，出た目の数の和が7のときは，②①［ゴール］①②③④と進み，ゴールすることができない．

（1）　このゲームで，どのような目が出てもゴールすることができないスタートの位置はどこか．①～⑬の中から，すべて答えよ．

（2）　スタートの位置を②，⑤，⑧の3つの中から1つ選ぶとき，どの位置がもっともゴールしやすいか．②，⑤，⑧のいずれかを書き，言葉や数，式などを使って説明せよ．　（16　福井県）

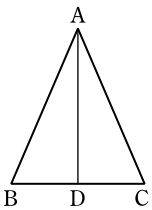
3．大輝さん，直樹さん，美咲さんの3人が，面積が $10\,\mathrm{m}^2$ になる正方形の花だんの作り方について，教室で話をしています．

> 大輝さん「1mごとに印が付いている20mのロープを使って，自宅の庭に，面積が $10\,\mathrm{m}^2$ の正方形の花だんを作ろうと思うんだ．面積が $10\,\mathrm{m}^2$ になる正方形は，どうすれば作れるかな？」
>
> 直樹さん「面積が $10\,\mathrm{m}^2$ になる正方形の一辺の長さは $\sqrt{10}$ mになるはずだよ．でも，$\sqrt{10}$ は無理数だね．$\sqrt{10}$ の長さは，どうすればとれるかな？」
>
> 美咲さん「①方眼紙があれば三平方の定理を利用して $\sqrt{10}$ の長さをとれるわ．」
>
> 大輝さん「そうか．それならとれそうだね．でも庭では方眼紙が使えないよ．」
>
> 直樹さん「方眼紙が使えなくても，直角が作れれば三平方の定理が使えるよね．ロープを使えば，二等辺三角形が作れるから，それから直角を作ることができるよ．」

直樹さんは，直角を作る方法を，下のように説明しました．

【直樹さんの説明】

> まず，AB＝AC＝5m，BC＝4mの二等辺三角形ABCを作る．次に，辺BCの中点Dをとり，線分ADを引くと，∠ADB＝90°となる．

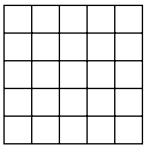


大輝さん「なるほど．それなら，ロープを使って作れそうだね．その方法を聞いて，僕は②直角を作る別の方法を思い付いたよ．」

美咲さん「どんな方法なの？私にも教えてよ．」

これについて，次の問いに答えなさい．

（1） 下線部①について，美咲さんは，右の方眼紙に $\sqrt{10}$ の長さの線分をかきました．この方眼の1目盛りを1として，$\sqrt{10}$ の長さの線分をかきなさい．



（2） 下線部②について，大輝さんは，1mごとに印が付いている20mのロープのみを使って，直樹さんとは別の方法で直角を作りました．このロープを使って直角を作る方法は，二等辺三角形から作る方法のほかに，どのような方法が考えられますか．【直樹さんの説明】のように直角を作る方法を説明しなさい．ただし，ロープは20mすべてを使わなくてもよいものとし，ロープを曲げたり押さえたり線を引いたりするために必要な人や道具，ロープの太さについては考えなくてよいものとします．

（16　広島県）

解答・解説

1．解　Aさんは連続する奇数の積について証明をしたが，連続しない2つの奇数の場合を示していないので正しくない．

（正しい証明）

m，n を整数とすると，2つの奇数は $2m+1$，$2n+1$ と表せる．このとき，2つの奇数の積は，

$$(2m+1)(2n+1)=4mn+2m+2n+1$$
$$=2(2mn+m+n)+1$$

$2mn+m+n$ は整数だから，これは奇数である．よって，2つの奇数の積は奇数である．

2．解　（1） 2つのさいころの目の和は2～12なので，スタート位置が⑬だと最大でも①までしか進めない．また，スタート位置が①だと，最小でも2マスは進むのでゴールできない．よって，①と⑬．

（2） スタート位置が②のとき，2つのさいころの目の和が2であればゴールできるので，右表より目の出方は(1，1)の1通り．

	1	2	3	4	5	6
1	②			⑤		
2			⑤			⑧
3		⑤			⑧	
4	⑤			⑧		
5			⑧			
6		⑧				

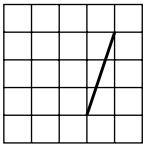
スタート位置が⑤のときは，目の和が5であればよいので，同様に表を用いて4通り．スタート位置が⑧のときは，目の和が8であればよいので，同様に表の5通り．

したがって，それぞれがゴールできる確率は，順に $\frac{1}{36}$，$\frac{4}{36}$，$\frac{5}{36}$ となるので，⑧をスタート位置とするときが最もゴールしやすい．

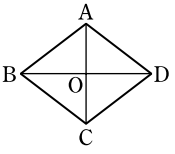
3．解　（1） $1^2+3^2=(\sqrt{10})^2$ であることを用いて，1×3の長方形の対角線をイメージして下の左図のような線分を書けばよい．

（2） 下の右図のような，AB＝BC＝CD＝DA＝4m（1m，2m，3m，5mいずれも可）のひし形ABCDを作る．次に，2つの対角線ACとBDをひき，その交点をOとすると，ひし形の性質により，∠AOB＝90°となる．

（1）



（2）



＊　　＊　　＊

「うるう年」や「ゲーム」のような題材が扱われるときには，必ず用いる性質については問題文中に言及がありますので，知識の有無が影響することはありません．大切なことは「いち早く性質を理解すること」にありますので，演習を通して慣れておきましょう．

公立入試問題ピックアップ②

有名テーマが題材の「その場で考えさせる問題」

O.「知らない」から始まる思考習慣の点検

最近の公立高校入試では「長文を読み，その場で考えさせる問題」の出題が全国的に増えています．その題材としてよく扱われるのが「整数」に関する周辺知識です．中学の教科書では体系的に学んでいないので，「知らない」からスタートするのが当たり前．出題者の意図が，知識や類題を解いた経験の有無ではなく「知らないという状態からどこまで粘り強く調べられるか」という思考習慣の確認にあることを知っておきましょう．

1．久しぶりに登場する「タイルの敷き詰め」

小学生の時に「縦 20cm，横 30cm の長方形の中に同じ大きさの正方形のタイルをピッタリに入れて敷き詰めます．タイルをできるだけ大きくするとき，タイルの 1 辺は何 cm になりますか」という問題に触れたことでしょう．その続編が，形を変えて公立入試で突然登場することがあります．

例題・1

図 1 のような，縦 $a$cm，横 $b$cm の長方形の紙がある．この長方形の紙に対して次のような【操作】を行う．ただし，a，b は正の整数であり，$a<b$ とする．

> 【操作】 長方形の紙から短い方の辺を 1 辺とする正方形を切り取る．残った四角形が正方形でない場合には，その四角形から，さらに同様の方法で正方形を切り取り，残った四角形が正方形になるまで繰り返す．

図 1

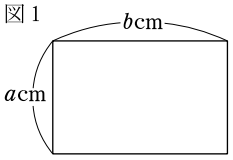
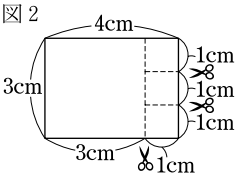


図 2



例えば，図 2 のように，$a=3$，$b=4$ の長方形の紙に対して【操作】を行うと，1 辺 3cm の正方形の紙が 1 枚，1 辺 1cm の正方形の紙が 3 枚，全部で 4 枚の正方形ができる．

このとき，次の問いに答えなさい．

（1） $a=4$，$b=6$ の長方形の紙に対して【操作】を行ったとき，できた正方形のうち最も小さい正方形の 1 辺の長さを求めなさい．

（2） n を正の整数とする．$a=n$，$b=3n+1$ の長方形の紙に対して【操作】を行ったとき，正方形は全部で何枚できるか．n を用いて表しなさい．

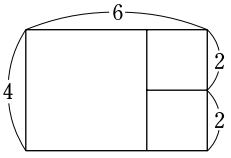
（3） ある長方形の紙に対して【操作】を行ったところ，3 種類の大きさの異なる正方形が全部で 4 枚できた．これらの正方形は，1 辺の長さが長い順に，12cm の正方形が 1 枚，$x$cm の正方形が 1 枚，$y$cm の正方形が 2 枚であった．このとき，x，y の連立方程式をつくり，x，y の値を求めなさい．

（4） $b=56$ の長方形の紙に対して【操作】を行ったところ，3 種類の大きさの異なる正方形が全部で 5 枚できた．このとき，考えられる a の値をすべて求めなさい．

（18　栃木県）

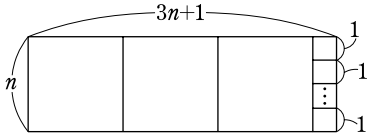
【操作】で紹介されている「長方形から正方形を次々と切り取る」作業は，「ユークリッドの互除法」という有名テーマで最大公約数を求める手法として知られています．高校の教科書に登場するテーマなので「知らない」という受験生の方が多いはず．パズルを解き進める感じで自分で図を描きながら考えればいいのです．

解　（**1**）　図のように，1辺4cmの正方形1枚と1辺2cmの正方形2枚に分けることができる．



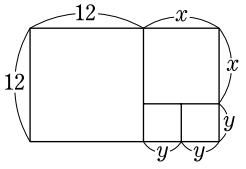
よって，最小の正方形の1辺の長さは**2cm**．

（**2**）　図のように，1辺$n$cmの正方形3枚と，1辺1cmの正方形n枚に分けることができる．



よって，正方形の枚数は$\boldsymbol{3+n}$（**枚**）と表せる．

（**3**）　条件を図で確認すると右のようになる．



したがって，

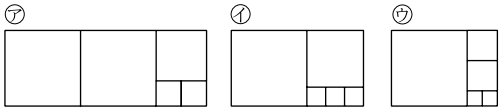
$x=2y$ ……①

$x+y=12$　…②

と立式できるので，これを解いて，

$\boldsymbol{x=8,\ y=4}$

（**4**）　自分でいろいろと図を描いて，条件を満たす形が下の3通りあることを見つける必要があります．



一番小さい正方形の1辺を$z$cmとすると，

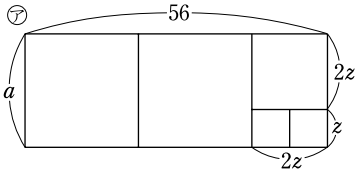
①　図より，

$a=3z$,

$2a+2z$

$=56$

これを解いて，$a=21$



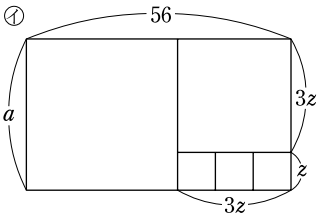
②　図より，

$a=4z$,

$a+3z$

$=56$

これを解いて，$a=32$



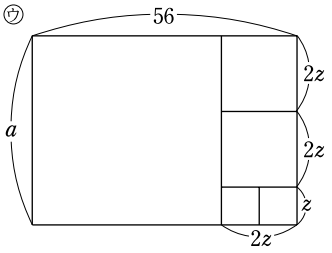
③　図より，

$a=5z$,

$a+2z$

$=56$

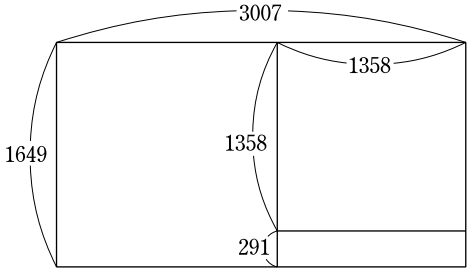
これを解いて，$a=40$



よって，求めるaの値は，$\boldsymbol{a=21,\ 32,\ 40}$

＊　　＊　　＊

小学生の時に，この【操作】によって最後にできた正方形の1辺の長さが「長方形の縦と横の長さの最大公約数」であることを学んだはずです．これを使えば「3007と1649の最大公約数を求めよ」と問われても，縦を1649，横を3007とする長方形を書いて，図を用いて処理することが可能です(私自身これで求めます)．途中までの図を載せますので，以下の手順に従って自分で求めてみましょう．



①　1辺1649の正方形を切り取る．

右には縦が1649，横が3007−1649=1358の長方形が残る．

②　1辺が1358の正方形を切り取る．

下には1649−1358=291の長方形が残る．

③　1358÷291=4余り194より，1辺が291の正方形を4個切り取る．

縦291，横194の長方形が残る．

④　1辺194の正方形を切り取る．

縦が 291－194＝97，横 194 の長方形が残る．

⑤　194÷97＝2

よって，1 辺 97 の正方形が最後に 2 個できるので，1649 と 3007 の最大公約数は 97

是非今後も使ってみてください．

2.「先手必勝」パターンを説明できる？

次は「ゲームの必勝法を見つけて説明しなさい」とう問題です．中学入試や公務員試験ではみかけることがありますが，「そんなこと考えたこともないや」という中学生が大半のはず．すぐに諦めずに，自分で情報を整理しながら数の性質を調べましょう．

例題・2

1 から 6 までの数字が 1 つずつ書かれている 6 つのボタン

　　①　②　③　④　⑤　⑥

があり，A と B の二人が自由に数字を選んでボタンを 1 回 1 つだけ押すことを交互に繰り返していく．ボタンのそばには電光掲示板があり，最初は 0 が表示されているが，A，B がボタンを押すごとに，押されたボタンに書かれている数を加えた数字が電光掲示板に表示される．

たとえば，A が②のボタンを押し，次に B が③，次に A が⑤，次に B が⑤のボタンを押すと，電光掲示板には，2，5，10，15 の数字が順に表示されていく．このとき，次の問いに答えよ．

（1）　6 つのボタンのうち，②，③，④のボタンのみ押すことができるものとする．A と B の二人が，A，B，A，B，… の順にボタンを押していき，ともに 100 回ずつ，合計 200 回ボタンを押した直後に電光掲示板に 587 の数字が表示された．A がボタン④を押した回数は，B がボタン②とボタン④を押した回数の和に等しく，A がボタン②を押した回数は，B がボタン④を押した回数の 3 倍であった．また，A がボタン③を押した回数は 19 回であった．B がボタン②を押した回数を x，B がボタン④を押した回数を y とするとき，x と y の値をそれぞれ求めよ．

（2）　6 つのボタン①～⑥をすべて押してよいものとする．A と B の二人が A，B，A，B，…の順にボタンを押していき，押した直後に電光掲示板に 500 の数字を表示させた方を勝ちとするゲームを行う．B がどのような押し方をしても A がこのゲームに勝つためには，A は最初にどの数字が書かれているボタンを押せばよいか．また，なぜそうすると勝てるのかを説明せよ．

（06　東京都立西，一部略）

解　（1）　二人がそれぞれボタンを押した回数は次のとおり．

	②	③	④	合計
A	$3y$	19	$x+y$	100
B	x	ア	y	100

A の押した回数について立式すると，

$3y+19+x+y=100$　∴　$x+4y=81$　…①

2 人の点数の和が 587 点であることより，

$2(3y+x)+3(19+ア)+4(x+2y)=587$

ここで，ア＝100－$(x+y)$だから，式を整理すると，$3x+11y=230$　……②

よって，①と②を解いて，$\boldsymbol{x=29}$，$\boldsymbol{y=13}$

（2）　二人がそれぞれ 1 ～ 6 までのボタンを押せるとき，A は次表のように，直前に B の押したボタンの数字を見て「二人の数字の合計が 7」になるようにボタンを押し続ければこのゲームをコントロールすることができる．

B	1	2	3	4	5	6
A	6	5	4	3	2	1

つまり，A が必ず勝つための条件は「A が 493 を表示させること」になる．すると B は 1 ～ 6 のどのボタンを押したとしても 500 を表示することができず，A は二人の数字の合計が 7 になるように押すことで 500 を表示させることが可能になる．

ここで，

$493=7\times70+3$，$500=7\times71+3$

より，最初に**③のボタン**を押し，71 回にわたっ

て「二人の数字の合計が 7」になるような押し方を続ければ，必ず A が 500 を表示させることができる．

＊　　＊　　＊

それでは演習問題に進みましょう．ユークリッドの互除法は過去に多くの県で出題があります．問題を通して基本知識を確認しておきましょう．

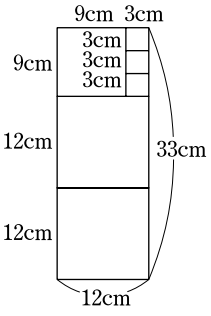
演　習　問　題

1．2 辺の長さが $a$cm と $b$cm（$a<b$，a と b は整数）の長方形の用紙から，以下の手順に従って正方形を切り取っていく．

［手順］　長方形の用紙から，できるだけ大きな正方形を切り取る．切り取った後の残った長方形の用紙から，同様にできるだけ大きな正方形を切り取る．用紙を使い切るまで繰り返し続ける．

このとき，最後に切り取った正方形の 1 辺の長さが $c$cm のとき，$[a,\ b]=c$ と表すことにする．

たとえば，右の図のような 2 辺の長さが，12cm，33cm の長方形の用紙から，上の手順に従って正方形を切り取っていくと以下のようになる．



まず，1 辺の長さが 12cm の正方形を切り取る．同様に，1 辺の長さが 12cm の正方形をもう 1 枚切り取る．

次に，2 辺の長さが 9cm，12cm の長方形から 1 辺の長さが 9cm の正方形を 1 枚切り取る．

さらに，2 辺の長さが 3cm，9cm の長方形から，1 辺の長さが 3cm の正方形を合わせて 3 枚切り取り，用紙をすべて使いきる．

このとき，$[12,\ 33]=3$ となる．

次の問いに答えなさい．

（1）　$[10,\ 14]$ の値を求めなさい．

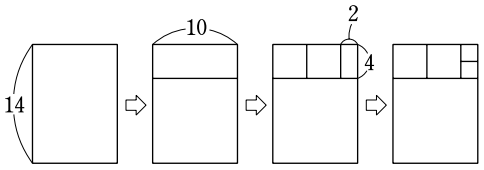
（2）　$[143,\ 187]$ の値を求めなさい．

（3）　$[a,\ 12]=1$ をみたす a の値をすべて求めなさい．

（01　青森県，一部略）

解答・解説

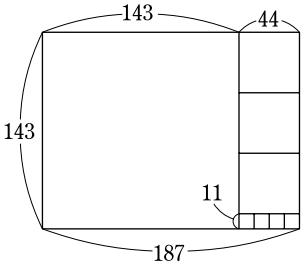
1．解　（1）「10 と 14 の最大公約数を求めよ」と聞かれていることに気がつけば一瞬ですが，【手順】にしたがって作業を進めれば，最後は 1 辺 2cm の正方形が残ります．



よって，$[10,\ 14]=\mathbf{2}$

（2）　右図のように，最後は 1 辺 11cm の正方形が残るので，

$[143,\ 187]=\mathbf{11}$



別解　この正方形を切り取る作業を計算で表すと，

$187\div143=1$ 余り 44

$143\div44=3$ 余り 11

$44\div11=4$

（3）　$[a,\ 12]=1$ ということは，a と 12 の最大公約数が 1．

よって，$\boldsymbol{a=1,\ 5,\ 7,\ 11}$

あとがき

哲学者として有名なデカルトは，

「難問は扱いやすくするため，解決できると思われるところまで，できるだけ多くの部分に分けなさい」

という言葉を遺しているそうです．

まさしく，本書で紹介した問題に挑む際に必要とされる姿勢ではありませんか？自分が知っている知識や経験を使えるように図を描いたり情報を整理したりすること，あるいはそれらを組み合せて新たな気づきを導くこと．

こうした経験が積める，あるいは身につけられるのは難関国私立高校の入試問題だけではなくなりました．近年の公立高校入試の特徴である「調べて，思考し，自ら発見する」問題の正誤(配点が高い)が合否に大きく影響を与えていることを知り，正面から真摯に向き合い，安易に「ちょっと難しいからこの問題は捨てるわ」という逃げの姿勢を取らなければ，きっとあらゆる面で自分の未来にとってプラスとなる経験値を貯めることができるはずです．

いま「大人」と呼ばれる世代の人の中には，自らの経験を基にして公立高校入試(問題)のことを「中学の教科書に登場した公式や解き方を覚えて数値をあてはめれば楽勝！」「定期試験の延長でしょ！」と考えている方々が少なからずいらっしゃることでしょう．中学入試への注目度と反比例して高校入試を軽視する人が増えているかもしれません．

でも，本書を読み終えた皆さんであれば，このような大人の感覚が古くて間違っていることがわかるはずです．これが，2017年から『月刊「高校への数学」公立入試問題ピックアップ』の連載を始めた理由です．月刊「高校への数学」の講義や演習ページでは，紙面の都合もあって充分に「公立高校入試問題の変化」を紹介しきれなくなってしまったからです．

私は，高校入試を目指す皆さんを応援します．どうか高校入試の数学を通して，前述のデカルトの言葉を体感してほしいと思います．高校入試で得られるものは得点や合格だけではありません．21世紀をたくましく生き抜くための土台を数学から吸収し，自分の未来は自分の手で切り拓いてください．

最後になりますが，記事執筆に関して20年弱にわたりご指導いただいております東京出版編集部の皆様，月刊「高校への数学」毎号の整版・印刷に関わっておられる皆様に，改めまして感謝の意をお伝えしたいと思います．(秋田)

高校への数学
公立入試数学
「難化＆新傾向」問題ピックアップ

2021年3月8日　第1刷発行

著　者　秋田洋和
発行者　黒木美左雄
発行所　株式会社　東京出版
〒150-0012　東京都渋谷区広尾3-12-7
電話 03-3407-3387　振替 00160-7-5286
https://www.tokyo-s.jp/

整　版　所　錦美堂整版
印刷・製本　技秀堂

落丁・乱丁の場合は，ご連絡ください．
送料弊社負担にてお取り替えいたします．

©Hirokazu Akita 2021 Printed in Japan
ISBN 978-4-88742-252-0