は　じ　め　に

本書は拙書「難関大学に出る　数学Ⅰ・A・Ⅱ・B　解法の極意」(2012 年旧中経出版，現 KADOKAWA，すでに絶版）をベースに，大幅に加筆修正したものです．質，量ともにかなりグレードアップしたつもりですが，コンセプトは以前と変わりません．それは**「難関大を目指す普通の受験生向けの参考書決定版」**ということです．「難関大を目指すのならこの本をやっておけば大丈夫」と言われることを目指しています．また，受験生だけでなく，難関大志望者を指導される学校の先生や塾・予備校の講師の方も対象にしています．

主な特長を挙げておきます．

❶　受験数学で重要なテーマ，良問を厳選

数学ⅠAⅡBの範囲から，大学入試でよく出題されるテーマを網羅しています．例題 も数多くの入試問題，有名問題から厳選しており，質が高いです．

❷　試験本番で使える解法やテクニックを優先

その問題でしか使えないようなマニアックな解法は極力避け，他の問題にも広く使える汎用性のある解法や，地味だけども点数が取りやすい堅実な解法を優先しました．また，検定教科書の内容，範囲，有名だけれども非効率な手法（いわゆる「負の遺産」）に縛られることなく，入試で役立つ数学の道具や重要テクニックを多くカバーしました．短期間で効率よくさまざまな解法を身に付けるには，まさにうってつけの参考書です．

❸　かつてない丁寧な解説，綺麗で正確な図を掲載

解説は非常に詳しいです．特に 例題 の Point... では，着眼点や解法に至るプロセス，背景にある考え方などを極力フォローしました．1 つのテーマからなるべく多くのテーマに関連付けるため，「意味のある脱線」が多いです．受験生目線を重視しており，私自身の経験をよく紹介しています．「エッセイ風参考書」とでも呼べそうです．

図もふんだんに活用しています．すべての図は私自身がパソコンで作成しており，美しさ，正確さにこだわっています．過去に作成していた図もすべて描き直しました．また，原稿自体は TeX という組版ソフトを使っており，デザインも含めてすべて私 1 人で執筆しました．私が考える参考書執筆の理想形です．

私のような凡人が数学の力を伸ばすためには，コツコツ努力を積み重ねるしかありません．しかし，本書にはその努力がなるべく苦痛にならないような工夫が

散りばめられています．本書を通じて，数学が理解できる楽しさや面白さ，そして難関大合格の喜びを味わってもらえれば幸いです．

【本書の利用法】

本書は，問題編と解説編に分かれており，メインの解説編は，重要テーマの解説，例題，ポイントチェックの３つの部分から構成されています．

❶　重要テーマの解説で知識を身に付けよう

入試で使える重要テーマの解説です．じっくり読んでその内容を理解しましょう．教科書に載っていないことも多く含まれますから，初めて触れる知識も多いはずです．「ふ〜ん」と流すのではなく，大いに感動しましょう．印象に残ったものはなかなか忘れないものです．よく「これは入試で使っていいのですか？」という質問を受けますが，正しければ入試で使っていけない知識などありません．

❷　例題とポイントチェックで実戦的な力を養成しよう

重要テーマの解説で扱った知識が有効な例題です．まずは自分で実際に手を動かして解いてみましょう．その後，**▶解答◀** と □Point... □ を確認してください．**▶解答◀** は答案作成の模範になるようにかなり気を遣って作成しました．また，随所に番号（解答とリンクしているものは ❺ などとし，そうでないのは $\boxed{5}$ などとしました）を付け，解答に表れない重要な補足を □Point... □ で詳しく解説しています．「なぜこう解くのか」が納得できるまで熟読してください．

一般に，参考書というものはすべて完璧に理解する必要はありません．まずは軽い気持ちで興味がある部分から読み始めましょう．「すべて読まないといけない」ではなく，「読んだ分だけ力がつく」とポジティブにとらえることです．

【謝辞】

さまざまな経験をさせていただいた予備校関係者の方々や教え子たちに感謝します．現場での講師経験がなければとても書ける内容ではありませんでした．知的な刺激を与えてくださった同僚講師の方々にも感謝します．また，予備校講師の仕事を理解し支えてくれている家族に感謝します．

今回の原稿を作成するにあたり，emath という TEX のマクロを一部使わせていただいております．作成者の大熊一弘氏に感謝します．また，東京出版の飯島康之氏と坪田三千雄氏には，大変鋭いご指摘や貴重なご意見を数多くいただきました．ありがとうございました．最後に，私の原稿はすべて安田亨先生のご指導あってのものです．この場を借りてお礼申し上げます．

目　次

例 題 **1−1**．m，n は自然数で，$m < n$ をみたすものとする．$m^n + 1$，$n^m + 1$ がともに 10 の倍数となる m，n を 1 組与えよ．（京都大）

▷▷▷▷ 解説は 40 ページ

例 題 **1−2**．4 次関数 $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ のグラフが，y 軸に平行なある直線に関して対称になるための係数 a，b，c，d の間の関係式を求めよ．（名古屋大）

▷▷▷▷ 解説は 46 ページ

例 題 **1−3**．xy 平面の 2 つの曲線 $C_1 : y = x^2 + a$，$C_2 : x = y^2 + a$ がちょうど 2 つの共有点をもつための a の条件を求めよ．

（お茶の水女子大・改）

▷▷▷▷ 解説は 49 ページ

例 題 **1−4**．どのような実数 x に対しても，不等式

$$|x^3 + ax^2 + bx + c| \leqq |x^3|$$

が成り立つように，実数 a，b，c を定めよ．（大阪大）

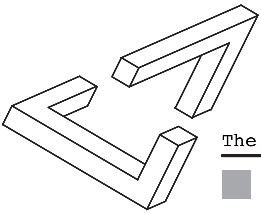
▷▷▷▷ 解説は 57 ページ

例 題 **1−5**．数列 $\{a_n\}$ に対し，数列 $\{b_n\}$ を $b_n = 3a_{n+1} - 2a_n$ で定義する．数列 $\{b_n\}$ が初項 $b\ (\neq 0)$，公比 r の等比数列であるとき，次の問いに答えよ．

（1） $b = r = 2$ で $a_1 = \dfrac{1}{2}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

（2） 数列 $\{a_n\}$ が等比数列であるための必要十分条件を，b，r，a_1 を用いて表せ．（旭川医科大）

▷▷▷▷ 解説は 62 ページ



第❶章 論理

The logic

真・解法への道！ NEO ROAD TO SOLUTION

第１節　必要条件・十分条件の意味

論理　　The logic

以前，ある予備校の高卒生向けのテキスト会議で，必要条件・十分条件の解説をいつ頃入れるべきかという議論がなされました．

「大半の生徒は理解できないのだから，最後でよい．最悪やらなくてもよい．」

「いや，数学の基礎になる重要事項だから最初に入れるべきだ．」

といった具合に意見が二分されました．結局，声の大きい講師陣の意見が尊重されることになり，あるテキストでは最後に回され，またあるテキストでは省略されました．その後，授業の現場は大混乱．全国の校舎からクレームが殺到し，次の年からはテキストの前半に回されました．あ，これはフィクションですよ 😅

私自身は，必要条件・十分条件の話は，学期の最初の授業ですべきだと思っています．数学の答案を書く上で必須の知識だからです．「大半の生徒は理解できない」というのは教える側の怠慢でしょう．きちんと説明すれば，そんなに難しい話ではありません．しかし，予備校の生徒を見ていると，確かに必要条件・十分条件という言葉に拒絶反応を示す人が多いです．今この本を読んでいるあなたも「最初から必要・十分の話はちょっと…」とたじろいでいるかもしれません．

でも大丈夫です．少し我慢して読み進めてください．必ず理解できます．「なんだ，これだけのことか」と思えるはずです．

そもそもなぜこんなにも必要条件・十分条件に対して印象が悪いのでしょうか．私は教科書に原因があると考えています．

ある教科書には「$p \Longrightarrow q$ が成り立つとき，p は q であるための十分条件，q は p であるための必要条件という．」とだけ書いてあります．丸暗記して使うのならともかく，意味を納得して使うにはこれでは厳しいです．そもそも「～であるため」の部分の「目標」となる条件が q になったり p になったりする表現がよくありません．数学の問題を解いていく中で，目標が変化することはまれだからです．**目標を固定して説明する**べきです．

では，必要条件・十分条件の説明に入ります．条件 p，q について考えます．

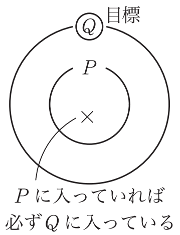
数学では本来目標とする条件があります．例えば「方程式 $x^2-5x+6=0$ を解け．」という問題であれば「方程式 $x^2-5x+6=0$ を満たす」が目標です．「関数 $f(x)=x^3+ax$ が極値をもつような a の範囲を求めよ．」という問題なら「関数 $f(x)=x^3+ax$ が極値をもつ」が目標です．ここでは q を目標とします．

また，必要条件・十分条件は**集合の包含関係に着目する**と意味がとらえやすいです．p，q に対応する集合（正確には真理集合といいます）をそれぞれ P，Q とします．例えば，条件 $p: x < 0$，$q: x < 1$ に対して，真理集合はそれぞれ

$$P = \{x \mid x < 0\},\ Q = \{x \mid x < 1\}$$

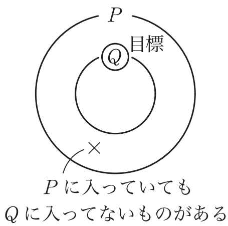
です．

$p \Longrightarrow q$ が成り立つとき，p は q であるための**十分条件**といいます．$p \Longrightarrow q$ は，「p であれば必ず q だ」ということですから，真理集合では「P に入っていれば必ず Q に入っている」と解釈できます．つまり，「$P \subset Q$」ということです．この包含関係を踏まえて，目標を先にもってきます．



Q に入っているという目標は，P に入っていれば必ず達成されますから，「Q に入っているためには，P に入っていれば**もう十分**」となり，「p は q であるための**十分**条件」です．

$p \Longleftarrow q$ が成り立つとき，p は q であるための**必要条件**といいます．今度は，「Q に入っていれば必ず P に入っている」と解釈できます．そのため，Q に入っているためには，たとえ P に入っていたとしてもまだ十分とは言えません．P に入っていても Q に入っていないものがあるからです．一方，P に入っていないと話になりませんから，「Q に入っているためには，P に入っていることが**必ず要る**」となり，「p は q であるための**必要**条件」です．



$p \Longrightarrow q$ かつ $p \Longleftarrow q$ が成り立つとき，$p \Longleftrightarrow q$ と書いて，p は q であるための**必要十分条件**，p と q は**同値**であるといいます．p が成り立つことと q が成り立つことは全く同じ意味ということを表しています．

「必要」，「十分」という言葉は，日常で使っている日本語の意味と同じです．この言葉は非常に分かりやすいにもかかわらず，不当に嫌われている印象があり，不憫に思います．理解できたら，ぜひ好きになってあげてください😊

少し話はそれますが，例えば今，サッカーのワールドカップの予選リーグ（計3試合）が行われているとします．2試合終わった時点で，日本が残念ながら2敗しているとします．するとテレビの解説者はたいていこう言うでしょう．

「日本が予選突破するためには，第３戦の勝利が**絶対条件**です！」
私はこの言葉を聞くたびにイラっとして，心の中でこう叫んでいます．
「絶対条件ではなく，**必要条件**だろ！」
影響力の大きいマスコミの方々には正しい言葉を使っていただきたいものです．

必要条件・十分条件というと，センター試験でよく出題されていた必要条件・十分条件の判定問題があります．受験生の中には判定問題が解ければよいと勘違いしている人がいますが，私に言わせればあんなのはカス問です．どうでもいいのです．…いや，どうでもよくはありません．言い過ぎました 😅　ただ，判定問題ができることは，あくまで「必要」なだけで，それで「十分」ではありません．必要条件・十分条件の知識が本当の意味で生きるのは論述の答案を書くときです．詳しくは **第３節** （☞ P.55）で解説します．

必要・十分に関連して，答案作成での注意です．
「〜となるためには〜であればよい」という表現をよく見ますが，これは適切ではありません．**十分性しか保証していない**と受け取れる表現だからです．
身近な例で言うと，「東大に受かるためには新テストと２次試験で満点を取ればよい」というのは，内容は正しいです．ただし「東大に受かるための必要十分条件を求めよ」と言われたときに，「満点を取ること」と答えたらおかしいでしょう．満点を取らなくても東大には受かるからです．満点を取ることは東大に受かるための十分条件ではありますが，必要十分条件ではありません．
数学の例にしましょう．「$x^2-5x+6=0$ となるためには $x=2$ であればよい」という表現は，内容は間違っていません．

$$x^2-5x+6=0 \Longleftarrow x=2$$

が成り立つからです．ただし「$x=2$ は $x^2-5x+6=0$ であるための**十分条件**である」ことを表しているだけです．もちろん

$$x^2-5x+6=0 \underset{\bigcirc}{\overset{\times}{\rightleftarrows}} x=2$$

ですから，$x^2-5x+6=0$ を解く問題で $x=2$ とだけ答えるのは間違いです．数学の問題では，「１つ見つけよ」といった言葉が書かれていない限りは，**必要十分条件を求めるのが基本**ですから，$x=2, 3$ と答えなければなりません．
十分性しか保証しない表現は避けるべきです．「〜となるためには〜が条件である」，「〜となる条件は〜である」などの表現が適切です．単に「条件」と書いた場合は通常「必要十分条件」を表します．

なお，似た表現で「〜を示せばよい」，「〜を求めればよい」という表現は問題ありません．「〜を示せば（求めれば）問題を解いたことになる」ということですから，**題意の言い換えに相当**し，普通に使えます．また，「〜を１つ見つけよ」であれば，「〜であればよい」という表現は使えます．

もう１点です．単なる式変形に同値記号を使う人がいます．

$$x^2-5x+6=0 \iff (x-2)(x-3)=0 \iff x=2,\,3$$

のようにです．同値記号には不思議な魅力があり，いかにも数学をやっているなという気分になります．使っている自分に惚れるくらいです😅　しかし，これは伝統的な書き方ではありませんし，**変形した結果より同値性がメイン**になります．まして，同値変形でもないのに同値記号を使ってしまうと致命的です．

$$x=\sqrt{x+2} \iff x^2=x+2$$

のようにです．当然左向きの矢印は正しくないのですが，残念ながら，平気でこんなことを書く受験生がいます．結局，単に式を並べて

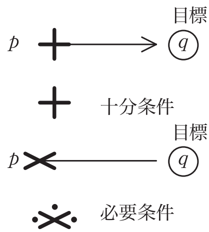
$$x^2-5x+6=0$$

$$(x-2)(x-3)=0 \qquad \therefore \quad x=2,\,3$$

と書けばよいのです．同値記号を使うのは**「命題の言い換えをするとき」**や**「証明すべき式を変形するとき」**，**「同値性を強調したいとき」**にしましょう．

最後に，「必要条件・十分条件」の究極の覚え方を紹介しておきます．昔の教え子から聞いた覚え方を自分なりにアレンジしたものです．

右の図をご覧ください．ほぼお分かりですね．



上は「p は十分条件」の覚え方です．矢印を一本線で描き，**主語の p の側**に細工をします．縦棒を１本加えます．するとあら不思議．十分条件の「十」の字が浮かんできますね．よって，「十分条件」です😅

下は「p は必要条件」の覚え方です．やはり主語の p の側に細工をします．矢印の先を伸ばしてバッテンを作ります．それに，テン，テン，テンっと点を３つ付けると，あら不思議．必要条件の「必」の字が浮かんできますね．よって，「必要条件」です😅

〈論理のまとめ１〉

Check ▷▷▷▷　「必要」，「十分」は普段使っている言葉と同じ意味

〈条件をみたす自然数の組の例〉

例題 **1−1.** m，n は自然数で，$m<n$ をみたすものとする．m^n+1，n^m+1 がともに 10 の倍数となる m，n を 1 組与えよ．（京都大）

考え方　「すべて求めよ」ではなく，「1 組与えよ」という問題ですから，必要十分条件は不要です．都合のいい組（十分条件）を見つけます．

▶解答◀　m，n が奇数のとき，因数分解の公式を用いて （▷▷▷▷ ❶）

$$m^n+1=(m+1)(m^{n-1}-m^{n-2}+\cdots-m+1)$$

$$n^m+1=(n+1)(n^{m-1}-n^{m-2}+\cdots-n+1)$$

よって，m^n+1，n^m+1 がともに 10 の倍数となるためには，$m+1$，$n+1$ がともに 10 の倍数であればよく，（▷▷▷▷ ❷）m と n の 1 の位の数が 9 であればよい．よって，m，n の 1 つは

◀ 今回は十分条件を求めればよいのですから，「〜であればよい」は正しい表現です．

$$\boldsymbol{m=9,\ n=19}$$

参考　m，n をすべて求める．

◀ 敢えて必要十分条件を求めてみます．

m^n+1，n^m+1 が 10 の倍数のとき，m^n，n^m の 1 の位の数はともに 9 であるから，m，n はともに奇数である．m の 1 の位の数を k とすると，$k=1, 3, 5, 7, 9$ であり

$$(m^n\ の\ 1\ の位の数)=(k^n\ の\ 1\ の位の数)$$

であることに注意する．（▷▷▷▷ ❸）

（ア）　$k=1$ のとき

$k^n=1^n$ の 1 の位の数は 1 であり不適．

（イ）　$k=3$ のとき

$k^n=3^n$ の 1 の位の数は 3，9，7，1 を繰り返すが，（▷▷▷▷ ❹）n が奇数のときは 3，7 のいずれかで不適．

◀ n が奇数であることに注意しましょう．

（ウ）　$k=5$ のとき

$k^n=5^n$ の 1 の位の数は 5 であり不適．

（エ）　$k=7$ のとき

$k^n=7^n$ の１の位の数は７，９，３，１を繰り返すが，n が奇数のときは７，３のいずれかで不適．

（オ）　$k=9$ のとき

$k^n=9^n$ の１の位の数は９，１を繰り返し，n が奇数のときは９で適する．

以上より，m の１の位の数は９であり，同様に n の１の位の数も９である．よって，題意を満たす m，n をすべて求めると

$m, n\ (m<n)$ は１の位の数が９の自然数

である．（▷▷▷▶**5**）

Point　The logic NEO ROAD TO SOLUTION　1−1　Check!

1　整数問題でよく使われる因数分解の公式を用いています．

公 式　n が自然数のとき

$$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)\ \cdots\cdots Ⓐ$$

n が**正の奇数**のとき

$$x^n+1=(x+1)(x^{n-1}-x^{n-2}+\cdots-x+1)\ \cdots\cdots Ⓑ$$

$n=3$ のときの

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$$

は有名です．これを一般の n に拡張したものです．Ⓑ は n が奇数限定でもあるせいか，知らない受験生が多いです．使用頻度は Ⓐ の方が高いですが，２つセットで覚えるとよいでしょう．

x^n-1 は $x=1$ を代入すると０になりますから，因数定理により $x-1$ で割り切れます．また，n が奇数のとき，x^n+1 に $x=-1$ を代入すると０になりますから，$x+1$ で割り切れます．実際に割り算をしてみると Ⓐ，Ⓑ ともに納得できるはずです．証明するだけであれば，右辺を展開して左辺になることを示せばよいです．

2　もちろん，因数分解しただけでは

$$m^n+1,\ n^m+1 \text{ が } 10 \text{ の倍数} \iff m+1,\ n+1 \text{ が } 10 \text{ の倍数} \quad \cdots\cdots \text{Ⓒ}$$

は言えません．

$$m^n+1=(m+1)(m^{n-1}-m^{n-2}+\cdots-m+1)$$

において，例えば

$$m+1=2,\ \ m^{n-1}-m^{n-2}+\cdots-m+1=5$$

のように，それぞれが 10 の倍数でなくても 2 つが協力して 10 を作る可能性は残っているからです．実は **5** で述べるように，結果的には Ⓒ は正しいのですが，何の説明もなしに同値とするのはまずいでしょう．あくまで

$$m^n+1,\ n^m+1 \text{ が } 10 \text{ の倍数} \Longleftarrow m+1,\ n+1 \text{ が } 10 \text{ の倍数}$$

が言えるだけで，$m+1$，$n+1$ が 10 の倍数であることは，m^n+1，n^m+1 が 10 の倍数であるための**十分条件**にすぎません．しかしながら今回は 1 組求めればよいですから，十分条件でいいのです．

3　m^n の 1 の位の数は，m の 1 の位の数のみを繰り返しかければ計算できます．実際にかけ算することを想像すれば明らかでしょう．合同式（☞ P.104）を用いてもよいです．法を 10 とすると，$m \equiv k$ より

$$m^n \equiv k^n$$

です．よって，k^n の 1 の位の数を調べます．

4　$n=1, 2, \cdots$ として，3^n の 1 の位を調べます．**前の 1 の位に 3 をかけて 1 の位をとればよい**ですから，表のようになります．この後は同じことを繰り返すはずです．これは単なる予想ではありません．3^n の 1 の位は前の 1 の位で決まりますから，3 の次は 9 に決まっています．9 の次も 7 に決まっています．同様に次は 1 ですから，3，9，7，1 を繰り返すのです．

n	1	2	3	4	5	$\cdots$
3^n の 1 の位	3	9	7	1	3	$\cdots$

5　この結果から

$$m^n+1,\ n^m+1 \text{ が } 10 \text{ の倍数} \iff m,\ n \text{ の } 1 \text{ の位の数が } 9$$

が言えますから，Ⓒ が正しいことが分かります．

問題編
論理
整数
論証
方程式
不等式
関数
座標
ベクトル
空間図形
図形総合
数列
数学的帰納法
場合の数
確率
微積分
出典・テーマ

第２節　同値変形の利用

論理　The logic

受験生の答案を採点していると，なんとなく式を立てて，なんとなく変形し，答えらしき形が得られた時点で終了，という解答によく出くわします．もちろん，たまたま答えは合うかもしれませんが，通常の問題は必要十分条件を求めるのが目的ですから，同値性が破綻するような怪しい変形をした場合や，複数の式を適当に組み合わせた場合には，**得られた条件が元の条件と同値かどうかを検証する**ことが重要です．代表的な同値変形を覚えておくことで，その確認はしやすくなります．

また，同値変形というのは元の条件と全く同じ情報をもった条件に言い換えることですから，元の条件にさかのぼって考える必要がなくなります．**考えにくい条件があれば，同値変形をして考えやすい条件に変えてしまえばよい**のです．

そこで今回は，有名な同値変形を２つ紹介しておきます．

１つ目は**「たして，ひいて」**です．例えば，$A=B$ かつ $C=D$ という連立方程式があるとき，辺ごとにたした式と引いた式を作ると

$$\begin{cases} A=B \\ C=D \end{cases} \iff \begin{cases} A+C=B+D \\ A-C=B-D \end{cases}$$

が成り立ちます．

右向きの矢印が成り立つのは問題ないでしょう．$A=B$ かつ $C=D$ が成り立つとき，辺ごとにたしても引いてもいいからです．

では左向きの矢印はどうでしょうか．こちらもほとんど同じです．

$$A+C=B+D \text{ かつ } A-C=B-D$$

が成り立つとき，辺ごとにたして２で割れば $A=B$ が得られますし，辺ごとに引いて２で割れば $C=D$ が得られるからです．

結局，辺ごとにたした式と引いた式を作れば同値変形になるわけです．もちろん，一方だけでは元に戻れませんから同値変形にはなりません．

この「たして，ひいて」の同値変形は，**対称性がある式**を扱う際によく用いられます．元の式よりも「たして，ひいて」の変形で得られる式の方が扱いやすい場合に有効です．

２つ目は**「代入した式を残す」**です．例えば，$y=f(x)$ かつ $z=g(y)$ とい

う連立方程式があるとき

$$\begin{cases} y=f(x) \\ z=g(y) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{y=f(x)} \\ z=g(f(x)) \end{cases}$$

が成り立ちます．これらが同値なのはほぼ自明です．どちらの矢印も上の式を下の式に代入することで確かめられます．

なお，この変形は「文字を減らす」のではありません．文字を減らすと同値性が崩れます．$y=f(x)$ を $z=g(y)$ に代入して y を消去すると

$$\begin{cases} y=f(x) \\ z=g(y) \end{cases} \underset{\times}{\overset{\bigcirc}{\rightleftarrows}} z=g(f(x))$$

となり，元に戻れません．$z=g(f(x))$ から y の式は作れませんから当然です．そこで，代入した式 $y=f(x)$ を残すのです．

実はこの「代入した式を残す」同値変形は，連立方程式を解くときに無意識に使っているはずです．簡単な例を挙げましょう．

直線 $y=x+1$ …… ① と円 $x^2+y^2=5$ …… ② の交点を求めたいとき，① を ② に代入し

$$x^2+(x+1)^2=5$$
$$2x^2+2x-4=0$$
$$2(x-1)(x+2)=0 \qquad \therefore \quad x=1,\,-2$$

これらの x の値を ① に代入して，$(x,\,y)=(1,\,2),\,(-2,\,-1)$ が得られます．よって，交点は $(1,\,2)$ と $(-2,\,-1)$ となります．「こんなの当たり前でしょ．」と言われるかもしれません．もちろん，通常は当たり前で構わないのですが，この背景に同値変形があります．

最後に ② ではなく ① に代入したところがポイントです．「代入した式を残す」変形をすると

$$\begin{cases} y=x+1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=x+1 \\ x^2+(x+1)^2=5 \end{cases}$$

となりますから，$x^2+(x+1)^2=5$ から得られた x の値を ① に代入するのです．一方，② に代入してしまうと，不適な y の値も現れます．当然

$$\begin{cases} y=x+1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \underset{\times}{\overset{\bigcirc}{\rightleftarrows}} \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2+(x+1)^2=5 \end{cases}$$

となるからです．普通，わざわざ ② に代入することはないでしょうが….

「代入した式を残す」同値変形の応用です．少し文字を変えて，$t = f(x)$ かつ $y = g(t)$ という連立方程式があるとき，**t が存在するための (x, y) の条件**を考えましょう．

$$\begin{cases} t = f(x) \\ y = g(t) \end{cases} \iff \begin{cases} t = f(x) \\ y = g(f(x)) \end{cases}$$

が成り立つのは先程と同じです．よって

$$\begin{cases} t = f(x) \\ y = g(t) \end{cases} \text{を満たす } t \text{ が存在する}$$

$$\iff \begin{cases} t = f(x) \\ y = g(f(x)) \end{cases} \cdots\cdots ③ \text{ を満たす } t \text{ が存在する}$$

となりますが，これはもっとシンプルになります．

③ において，t を含む式は $t = f(x)$ のみです．これは t について解かれていますから，**x が存在すれば t は存在する**ということです．よって，もう一方の式である $y = g(f(x))$ が成り立つことが条件です．式が成り立てば x が存在し，t も存在するからです．まとめると

$$\begin{cases} t = f(x) \\ y = g(t) \end{cases} \text{を満たす } t \text{ が存在する}$$

$$\iff y = g(f(x)) \text{ が成り立つ}$$

となります．表面的には文字が減っていますが，その背景には「代入した式を残す」変形があります．t について解いて代入すれば，t が存在するための (x, y) の条件が得られるのです．この考え方は座標の章（☞ P.263）で扱う「軌跡」の解法につながります．

〈論理のまとめ２〉

Check ▷▷▷▷ 有名な同値変形

（ i ）「たして，ひいて」

（ ii ）「代入した式を残す」

真・解法への道！ 数学ⅠAⅡB NEO ROAD TO SOLUTION **出典・テーマ 一覧**

第１章 論理

第２章 整数

第３章 論証

第４章 方程式

▶あとがき◀

以前に他社から「解法の極意」を出版した年に生まれた我が子も，すでに小学生になりました．時が経つのは早いものです．子どもは親の想像を超えて成長していくものですが，それと反比例するように「解法の極意」はどんどん色あせていきました．当時は自分の100% を出して執筆したつもりでしたが，出版後，出講する予備校が増え，素晴らしい同僚講師に出会い，新たな経験を重ねたことで，多くの改善すべき点が目につくようになりました．幸いにも（？）書店で見かけることもほぼなくなっていました．

そこで「解法の極意」を絶版にしていただき，1 年近くかけて大幅に書き直し，ダメ元で東京出版に持ち込んでみたところ，意外にも結果は出版 OK とのことでした．高校 3 年のときに偶然，月刊「大学への数学」に出会い，6 月号と 7 月号のみ購入して挫折した，あの「東京出版」から参考書を出版できる機会をいただけるとは…．非常に光栄に思うとともに，感謝の気持ちでいっぱいでした．

編集者の方々には非常に細かくチェックしていただき，様々なご指摘，ご提案をいただきました．まさに「さすがは東京出版」でした．そのおかげでさらに改善を重ね，ようやく完成しました．書き直しを始めてからすでに 2 年が過ぎており，想像以上に時間がかかりましたが，最初に考えていた以上のものに仕上がりました．我が家にもう一人子供が生まれたような気分です．本書を手に取っていただいた方に可愛がられることを望んでやみません．

難関大学受験対策　真・解法への道！　数学ＩＡⅡＢ

令和 2 年 3 月27日　第 1 刷発行

著　者　箕輪　浩嗣
発行者　黒木美左雄
発行所　株式会社 東京出版
〒150-0012 東京都渋谷区広尾3-12-7
電話：03-3407-3387　振替：00160-7-5286
https://www.tokyo-s.jp/

印刷所　株式会社 光陽メディア
製本所　株式会社 技秀堂

落丁・乱丁本がございましたら，送料弊社負担にてお取り替えいたします．

　（定価はカバーに表示してあります）
ISBN978-4-88742-248-3