輝き続ける

名作・傑作問題

目　次

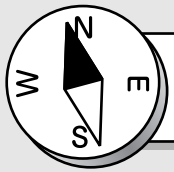
第1部　数式編

第1章　整数 …… 6
第2章　文章題 …… 22
第3章　場合の数・確率 … 30
第4章　関数・座標 …… 50

第2部　図形編

第5章　直線図形 …… 70
第6章　円 …… 86
第7章　立体（1） …… 106
第8章　立体（2） …… 132

類題の解答…… 154



本書の読み方

［1］ 本書の成り立ち

本書は，これまでに行われてきた膨大な数の高校入試で出題された問題の中から，‘名作・傑作’と呼ばれるにふさわしい問題を厳選して編集されたものです．

問題を選ぶにあたっては，スタートの年度をどこにおくかが考え所でした．新しすぎると選ばれる問題が少なくなってしまうでしょうし，逆に古すぎると(数は揃うでしょうが)今の読者たちにとってはなじみの薄いピントのずれたものにもなりかねません．そこで(主な問題選定の時期がたまたま‘平成 31 年／令和元年…㋐’であったこともあり)，1 つの区切りとして，平成元年から㋐までの高校入試問題を対象にすることにしました．

この 31 年分の「高校への数学」誌上に載った問題の中から，まずは，年度も分野も気にせずに‘これは…！’という問題をピック・アップするという作業が開始されました．迷った問題は取りあえず候補として残し…，31 年分が一通り終わった時点で分野ごとに分類し…，その中で採用 or 不採用を判断していく…，という，本書を編集する過程での一番大切な，神経を使う時間が続きました．

その結果選ばれたのが，平成 30 年度分までで，数式の問題が 34 題，図形の問題が 41 題の，計 75 題でした．そこで，平成 31 年度分の中から 5 題を加え，計 80 題の‘名作’を並べることになりました．

［分野ごとに見ると，若干の片寄りはありますが(当然の結果でしょうが，図形分野，特に立体の問題が多数を占めています)，概(おおむ)ね妥当な構成になり，更に，年度別に見てみると，**平成元年度から平成 31 年度まで，モレなく揃っている**というオマケまでつきました．］

［2］ 本書の構成

本書は，大きく 2 部に分かれており，

第 1 部 … 数式編，第 2 部 … 図形編

から成っています．さらに各部は，それぞれ 4 章ずつに分かれています(詳しくは，☞目次)．

問題・解答は，読み易さを考慮して，原則として**1 問ごとに 2 頁の見開きの形**になっています(一部，1 頁で完結している問題もあります)．

また，80 題の‘名作’の問題・解答以外にも，そこで使われているやや高度な(必ずしも教科書等には載っていない)定理や公式について解説するページもあり，更にはその問題の‘類題’も，80 題中の 16 題について付けられています(その解答は，巻末にまとめられています)．

［3］ 本書の利用法

以上で述べてきたような性格の本書をどのように読んでいくかは，勿論いま本書を手に取っている読者の皆さんの自由です．ただ，普通の問題集のように，最初から順番に解いていく，あるいは，苦手な分野の問題をこなしていく，というよりは，パラパラとページをめくっていって，興味をそそられた問題について深く考えてみる…という方が，本書の読み方としてよりふさわしいようにも思われます．

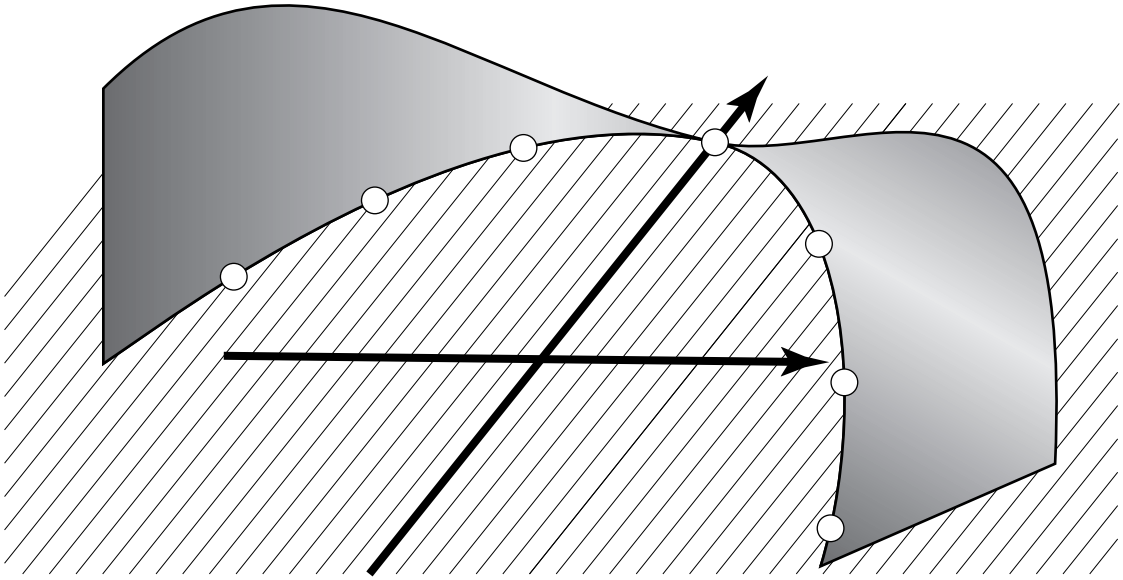
とにかく，‘名作’ゆえに難問が多いので，挑戦しがいのあるものがほとんどです．‘全問解いてやる！’という意気込みも貴重ですが，‘面白そうだな…解いてみるか…’といった心構えで臨んでもらえたら良いような気がしています．

［4］ 本書で使われている記号など

- 問題文の横に太字で書かれているのは，その問題の主なテーマを示しています．
- 問題番号の右肩に付いている★マークは，その問題が，難問の多い本書の中でも特に難しい‘超難問’であることを表しています．
- 問題文と解答の間にある‘前書き’は，問題に対する着眼点や，解答への大まかな道筋などを示しています．
- **解**は，その問題の本解です．
- **別解**は，本解とは異なる解法による解答です．
- **➡注**は，本解や別解の内容についての注意事項や補足事項を解説しています(また，本書では更に，解答の右横(or 左横)に，短い(ワン・ポイントの)‘注’も付けています)．
- **■研究**は，発展事項やその問題の背景などを示しています．
- 更に，解答中では，答えや重要事項については，「太字にする・網目をかける・波線のアンダー・ラインを引く」などの，目立たせるための工夫をしています．

第1部　数式編

第1章　整数 …… 6
第2章　文章題…… 22
第3章　場合の数・確率 …… 30
第4章　関数・座標 …… 50



方程式の整数解

問題 1★ （1） $(x+y+3)^2+(y+1)^2=5$ を満たす整数の組$(x,\ y)$は□個ある．

（2） a は整数とは限らない定数とし，x，y の連立方程式

$$\begin{cases} ax+y+1=0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots① \\ x-(2a+2)y-2a-6=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

を考える．

（i） ①，②より，a を消去して，x と y の関係式を求めよ．

（ii） 連立方程式①，②を満たす整数の組 $(x,\ y)$ があるような a の値と，そのときの整数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

（2010［平成22］年　灘）

（2）（i） （1）のヒントを活かせるように，「□^{2}+□^{2}=□」の形に整理しましょう．

（ii） 不適な場合が出てくることに注意！

解 **（1）** 与式を満たすのは，

$$(x+y+3,\ y+1)=(\pm2,\ \pm1),\ (\pm1,\ \pm2)\ \text{（複号は自由）}$$

の場合であるから，全部で，$2^2\times2=\mathbf{8}$（個）

➡注 これらから得られる$(x,\ y)$の組は，

$(-1,\ 0)$，$(1,\ -2)$，$(-5,\ 0)$，$(-3,\ -2)$；

$(-3,\ 1)$，$(1,\ -3)$，$(-5,\ 1)$，$(-1,\ -3)$

で，（もちろん）すべて異なっています．

（2） **（i）** ②を展開して，a について整理すると，

$$-2(y+1)a+x-2y-6=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②'$$

②′$\times x$+①$\times2(y+1)$ より，

$$x(x-2y-6)+2(y+1)^2=0$$

$$\therefore\quad x^2-2xy-6x+2y^2+4y+2=0$$

これを，（1）と同様の形に整理すると，

$$\boldsymbol{(x-y-3)^2+(y-1)^2=8} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots③$$

➡注 x の絡んだ~~~部を□^{2} の形にすると，$(x-y-3)^2$ となって，すると残りは y だけの2次式なので，‘平方完成’すればうまくいきます．

（ii） ③を満たすのは，$(x-y-3,\ y-1)=(\pm2,\ \pm2)$（複号は自由）

の場合，すなわち，

$$\boldsymbol{(x,\ y)=(8,\ 3),\ (4,\ -1),\ (4,\ 3),\ (0,\ -1)}$$

これらのうち，~~~の場合は不適（☞注）であり，他の場合は，①に代入して，

$$\boldsymbol{a=-\frac{1}{2},\ 0,\ -1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots④$$

➡**注**　$(x,\ y)=(0,\ -1)$を①に代入すると，「$0=0$」となって，a によらず成り立ちますが，②に代入すると，「$-4=0$」となって，a によらず成り立たなくなります．

なお，$(x,\ y)=(8,\ 3)$，$(4,\ 3)$を②′に代入すると，④と同じ a の値が得られ，$(4,\ -1)$を代入すると，②′は「$0=0$」となって，a によらず成り立つことになります．

■**研究**　上記の注の内容を，図形的に解きほぐしてみます．

＊　　＊

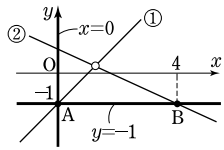
連立方程式①，②は，それぞれ‘座標平面上の直線の式’と見ることができます．

①$(y=-ax-1)$は，**点 A$(0,\ -1)$を通る直線**；②(＝左ページの②′)は，$y=-1$，$x=4$ を代入すると a の値によらず成り立つので，**点 B$(4,\ -1)$を通る直線**を表します．そして，連立方程式①，②の解$(x,\ y)$は，‘2 直線①，②の交点(下図の ○)の座標’を表すことになります．

ポイントは，次の事実です．

①，②とも，表せない直線が 1 本ずつあって，
①では $x=0$（y 軸），②では $y=-1$ である．
（a にどんな値を代入しても，①では $x=0$ という形，②では $y=-1$ という形は作れない！）

この事実から，「直線②は，$y=-1$ にはなれないから，A を通ることはできない(A$(0,\ -1)$が①と②の交点となることはない)，よって，$(0,\ -1)$は不適」ということになるわけです．



なお，B$(4,\ -1)$の方は適する解に含まれていますが，これは，「①は $y=-1$ になれるので，B は①と②の交点となることができ，適する」ということですね．

素数の約数の和

問題 2★ x，y，z を素数とします．ただし，$2 \leqq x \leqq y \leqq z < 20$ とします．
$【x】$は x の約数の和を表します．
（1）$【xy】=36$ となる整数 x，y の組$(x,\ y)$を全て求めなさい．
（2）$【xyz】$の値を，x，y，z を用いて表しなさい．ただし，表した結果は因数分解した形で答えること．
（3）$【x】+【y】+【z】=36$ のとき，$【xyz】$の値がもっとも 1500 に近づく x，y，z の値を求めなさい．　（2008［平成 20］年　広尾学園）

素数 x の約数は 1 と x だけですから，$【x】=1+x$ です．
（3）　まず，$(x,\ y,\ z)$の候補を列挙します．

解　**（1）**　$x<y$ のとき，

$$【xy】=1+x+y+xy=(1+x)(1+y)=36$$

これを満たす素数 x，y $(2 \leqq x<y<20)$は，

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=(\mathbf{2},\ \mathbf{11})$$

$x=y$ のとき，

$$【xy】=【x^2】=1+x+x^2=36$$

これを満たす$(x,\ y)$は存在しない．

（2）　$\boldsymbol{x<y<z}$ **のとき，**$【xyz】=(\mathbf{1}+\boldsymbol{x})(\mathbf{1}+\boldsymbol{y})(\mathbf{1}+\boldsymbol{z})$ ……①

$\boldsymbol{x=y<z}$ **のとき，**$【xyz】=【x^2z】=(\mathbf{1}+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x^2})(\mathbf{1}+\boldsymbol{z})$ ……②

$\boldsymbol{x<y=z}$ **のとき，**$【xyz】=【xy^2】=(\mathbf{1}+\boldsymbol{x})(\mathbf{1}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y^2})$ ……③

$\boldsymbol{x=y=z}$ **のとき，**$【xyz】=【x^3】=1+x+x^2+x^3$

$$=(\mathbf{1}+\boldsymbol{x})(\mathbf{1}+\boldsymbol{x^2})$$ ……④

（3）　$【x】+【y】+【z】=(1+x)+(1+y)+(1+z)$

$$=3+x+y+z=36$$

のとき，$x+y+z=33$

これを満たす素数 x，y，z $(2 \leqq x \leqq y \leqq z<20)$は，

$(x,\ y,\ z)=(3,\ 11,\ 19)$…㋐，$(3,\ 13,\ 17)$…㋑，$(5,\ 11,\ 17)$…㋒，
$(7,\ 7,\ 19)$…㋓，$(7,\ 13,\ 13)$…㋔，$(11,\ 11,\ 11)$…㋕

㋐のとき，①$=4\times12\times20=960$

㋑のとき，①$=4\times14\times18=1008$

㋒のとき，①$=6\times12\times18=1296$

㋓のとき，②$=(1+7+7^2)\times(1+19)=57\times20=1140$

㋔のとき，③$=(1+7)\times(1+13+13^2)=8\times183=1464$

㋕のとき，④$=(1+11)\times(1+11^2)=12\times122=1464$

よって答えは，$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z})=(\mathbf{7},\ \mathbf{13},\ \mathbf{13})$，$(\mathbf{11},\ \mathbf{11},\ \mathbf{11})$

整数の約数の和については，☞ p.15.

問題 3. n は自然数とする．

$$S_n=1!+2!+3!+\cdots\cdots+n!$$

とおき，S_n の一の位の数を f_n とする．ただし，

$$n!=1\times2\times3\times\cdots\cdots\times(n-1)\times n$$

である．

（1） $5!$ と f_{10} の値を求めよ．

（2） S_n がある自然数の平方となるような n をすべて求めよ．

（1998［平成 10］年　甲陽学院）

（2）だけだと，超難問．そのためのヒントが（1）なのですが，うまく結び付けられるかどうか…．

解　**（1）**　$5!=1\times2\times3\times4\times5=\mathbf{120}$

よって，$n\geqq5$ のとき，$n!$ の一の位は 0 であるから，

$f_{10}=f_4=(1!+2!+3!+4!\text{ の一の位})=(1+2+6+24\text{ の一の位})=\mathbf{3}$

（2）　（1）より，$n\geqq4$ のとき，$f_n=3$ ……①

ところで，ある自然数 a と a^2 の一の位をそれぞれ p，q とすると，右の表のようになり，‘$q=3$ になることはない’ことが分かる．

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
q	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

よって，$n\geqq4$ のとき，$S_n=a^2$ となることはなく，

$$S_1=1,\ S_2=1+2=3,\ S_3=1+2+6=9$$

であるから，答えは，$\boldsymbol{n=1,\ 3}$

➡**注**　本問の困難さは，‘n の上限を，どうやって押さえるのか？’にあります．
結局，①に気が付くかどうかがポイントになり，これによって，最終的に，たった 3 つ（$S_1\sim S_3$）を調べればよいことになりました．

何回割り切れるか

問題 4★ 1から100までの整数の積

$$1\times2\times3\times\cdots\cdots\times99\times100$$

をPとします．数Pをn（nは2以上100以下の整数）で何回割り切ることができるか，その最大の回数を記号$\{n\}$で表すことにします．

Pを素因数分解すると

$$P=2^a\times3^b\times5^c\times\cdots\cdots\times97$$

となります．このとき，$\{2\}=a$，$\{3\}=b$，また，$6=2\times3$で$a>b$であるから，$\{6\}=b$ということになります．

次の問いに答えなさい．

（1） a，b，cの値をそれぞれ求めなさい．

（2） $\{4\}$の値を求めなさい．

（3） nを7以上100以下の整数とするとき，$\{n\}$の最大の値を求めなさい．また，その最大値をとるnの値を求めなさい．

（2005［平成17］年　大阪桐蔭）

（2）まではともかく，（3）が難問．nに含まれる素因数に着目しましょう．

解 （**1**） 数xの整数部分を$[x]$と表すと，

$$\boldsymbol{a}=\left[\frac{100}{2}\right]+\left[\frac{100}{2^2}\right]+\left[\frac{100}{2^3}\right]+\left[\frac{100}{2^4}\right]+\left[\frac{100}{2^5}\right]+\left[\frac{100}{2^6}\right]$$

$$=50+25+12+6+3+1=\boldsymbol{97}$$

要するに，
$100\div2^n$（$1\leqq n\leqq6$）
の商を加えているだけ．

同様にして，$\boldsymbol{b}=33+11+3+1=\boldsymbol{48}$，$\boldsymbol{c}=20+4=\boldsymbol{24}$

$b=(100\div3^n$の商の和），
$c=(100\div5^n$の商の和）

（**2**） $4=2^2$より，$\{4\}=\left[\frac{a}{2}\right]=\boldsymbol{48}$

（**3**） 以上より，右表のようになる．

n	2	3	4	5	6	7
$\{n\}$	97	48	48	24	48	

7以上の素数pについては，$\{p\}<\{5\}=24$

よって，$n\geqq7$のとき，$\{n\}$の最大値は**48**で，

そのときのnの値は，$2^2\times3=\boldsymbol{12}$

➡**注** $n\geqq7$のとき，$\{n\}=48$となるnは，5以上の素因数をもってはならず，また，2の素因数は2個まで，3の素因数は1個しかもてませんから，$n=12$に限ります．

なお，$n\geqq7$のとき，$\{n\}$の2番目に大きい値は$\{n\}=32$で，そのときのnの値は，$n=8$，24です．

意欲のある人は，理由を考えてみよう（解答は，☞右ページ）．

［左ページの注にある問題の解答］

n が 5 以上の素因数をもつとき，$\{n\} \leqq 24$

一方，$n=2^x \times 3^y$ の形のとき，右表のようになるから（$y \geqq 2$ のとき，$\{n\} \leqq 24$），$n \geqq 7$ のとき，$\{n\}$ の 2 番目に大きい値は $\{\boldsymbol{n}\}=\mathbf{32}$ で，そのときの n の値は，

$\boldsymbol{n=8,\ 24}$

x	y	$\{n\}$
3	0	$32\left(=\left[\frac{97}{3}\right]\right)$
3	1	32
4	0	$24\left(=\left[\frac{97}{4}\right]\right)$

定理・公式集（数式編（1））

第 1 章　整数

1．約数の個数と総和

自然数 N が，$N=a^p\times b^q\times\cdots\times c^r$（$a$，$b$，…，$c$ は相異なる素数）と素因数分解されるとき，N の約数の個数は，

$$(p+1)\times(q+1)\times\cdots\times(r+1)\text{（個）}$$

また，N の約数の総和は，

$$(1+a+a^2+\cdots+a^p)\times(1+b+\cdots+b^q)\times\cdots\times(1+c+\cdots+c^r)$$

となる．

第 2 章　文章題

2．速さの公式

$$\text{速さ}=\frac{\text{距離}}{\text{時間}}$$

$$\left(\text{時間}=\frac{\text{距離}}{\text{速さ}},\ \text{距離}=\text{速さ}\times\text{時間}\right)$$

が成り立つ．

3．利益・割引き

a %増し … $\square\times\left(1+\dfrac{a}{100}\right)$

b 割引き … $\square\times\left(1-\dfrac{b}{10}\right)$

となる．

第 3 章　場合の数・確率

4．順列の数

異なる n 個のものの中から r 個を選んで順番に並べる場合の数は，

$$\underbrace{n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times\{n-(r-1)\}}_{r\text{ 個}}\quad\cdots\cdots\cdots\text{㋐}$$

となる．

（㋐を，${}_n\mathrm{P}_r$ という記号で表すことがある．）

5．組合せの数

異なる n 個のものの中から r 個を選ぶ（順番は考えない）場合の数は，

$$\frac{\text{㋐}}{r\times(r-1)\times\cdots\times2\times1}\quad\cdots\cdots\cdots\text{㋑}$$

となる．

（㋑を，${}_n\mathrm{C}_r$ という記号で表すことがある．）

高校への数学　**輝き続ける名作・傑作問題**

令和元年12月25日　第1刷発行　　定価はカバーに表示してあります.

編　者　東京出版編集部
発行者　黒木美左雄
発行所　**株式会社　東京出版**
〒150-0012　東京都渋谷区広尾3-12-7
電話 03-3407-3387　振替 00160-7-5286
https://www.tokyo-s.jp/
整　版　所　錦美堂整版株式会社
印刷・製本　株式会社技秀堂
落丁・乱丁本がございましたら，送料小社負担にてお取替えいたします.

©Tokyo shuppan 2019 Printed in Japan　ISBN978-4-88742-247-6