まえがき

これからの数学で重要になるキーワードは？

「活用」である．

数学が，定量的なものから定性的なものに変わる，とも言えるかも知れない．厳密な論証による正しい数学が不要になるわけではないが，実用面では納得できる説明ができれば十分であることも多い．

本質的な数学理解に基づく定性的なアプローチ．

本書で最も重視している視点である．特に，グラフについては丁寧に扱っている．

「解法を定着させる」というこれまでの数学参考書・問題集とはまったく違う思想に基づいて本書は作られている．網羅的な勉強をするのには全く向かないから，他の参考書・問題集を使用していただきたい．「活用」をキーワードに，「難しくはないが答えにくい問題」を取り上げている．表面的な問題ではなく，数学を深く理解し，正しくイメージできていないと考えられない問題ばかりである．人によっては，すごく難しく (または，易しく) 感じるかも知れない．

正しいイメージとは何だろう．
数学を表現するのには「数式」「日本語」「図」という 3 つの形態がある．それらを自由に行き来しながら概念を正確にイメージでき，言語化できることが必要になる．また，一般的な解法のみに頼るのではなく，個別の問題に対して最適な解法を選択することも必要になる．問題の個性を感じ取り，必要な情報のみを抽出するのである．

問題と解答を１対１対応させるような「知識・技能」重視の数学教育は終わりを迎える．また，数学的厳密性を重視し過ぎて生徒を置き去りにすることも許されない．生きていくための「思考力・判断力・表現力」の育成を意識しなければならない．その流れは

【題意を明確化，論点を抽出】

↓

【議論に必要な情報収集】

↓

【正しい推論，論証】

である．「基本解法の中から使えるものを探す」というこれまでの数学とは頭の使い方が違う．道具頼りのこれまでの数学ではなく，工夫することが必要になるような数学である．ずる賢さも求められる．問題を型にはめるのではなく，問題に合う型を自ら作り出す．

新しい時代に向けて，そんな問題集を作りたい．

それが本書に込めた思いである．

既存問題集にあるような問題は掲載していない．数学 II の知識で思考できる範囲で問題を作っているが，一部，数学 B や数学 III などの内容も含まれることを注意しておく．

各章は，基本概念の列挙，問題，解答解説からなる．問題は１人で考えても良いし, 仲間と一緒に考えても良い．解答解説を見る前に, あぁだこぉだと考えてもらいたい．解答解説に先立って問題を考えるためのヒントを挙げているものもあるので，そちらも参照しながら考えてもらいたい．そうして確認のために解答解説を読んでもらいたい．

「答えを見て丸暗記」という使い方はしないでもらいたい.「どうしてこんな風に考えるのか？」「自分はどうやったらこう考えられるか？」と自問自答してもらいたい．そのヒントとなるように，解説は思考部分を重視している.

数学を道具として，また現象として，正しくイメージできるようになってもらいたい．身に付けてもらいたいイメージについてもできるだけ詳しく解説する.

高校生にとって新しい数学は，定期テストでさえ暗記で乗り切れないから，既存の感覚では苦しいものになるかも知れない．しかし，自分で考える自由度が増し，楽しさを感じることができるものになる.

勉強はつらい反復だけではなく，問題を自分で解決する楽しいものでもある．本書を通じてそれを感じてくれる人がいたら，この上ない喜びである.

数学を通じて「思考力・判断力・表現力」を磨いていこう！

研伸館数学科

吉田　信夫

目　次

1 数学II－①：いろいろな式

数学Ⅱ－①：「いろいろな式」で扱う概念は

□式

・展開，因数分解　・二項定理　・整式の割り算　・分数式

□等式，不等式の証明

・恒等式　・等式の証明　・不等式の証明　・相加相乗平均の関係

□複素数と2次方程式

・解の公式，判別式　・解と係数の関係

□高次方程式

・剰余の定理，因数定理　・解と係数の関係

である．

数学をやる上で基本的な概念ばかりである．特に等式，不等式の証明は論理性強化のために重要である．解と係数の関係や恒等式は，後の章でも繰り返し登場する．

問題

問題 1-1

等式，不等式を証明するとき，2 数を式に代入して等号や大小関係が成り立つかどうかを考えることがある．以下の各関数 $f(x)$ について，

① $f(a)=f(b)$ ならば $a=b$

② $a<b$ ならば $f(a)<f(b)$

は成り立つだろうか？次のそれぞれの関数を与えられた範囲で考えるときにどうなるか答えよ．

(1) $f(x)=x^2$（x は実数）

(2) $f(x)=x^2$（$x\geqq 0$）

(3) $f(x)=\sin x$（$0^\circ\leqq x\leqq 180^\circ$）

(4) $f(x)=\cos x$（$0^\circ\leqq x\leqq 180^\circ$）

(5) $f(x)=\log_p x$（$x>0$） ただし，p は 1 ではない正の定数

問題 1-2

『a，b が正の実数であるとき，$\left(2a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{2}{a}\right)\geqq 9$ を示せ』という問題を次のように解いた．次の証明は正しいか？間違っているなら，おかしい所を指摘し，正しい論証に直せ．

> a，b ともに正だから，相加相乗平均の関係より
>
> $$2a+\frac{1}{b}\geqq 2\sqrt{2a\cdot\frac{1}{b}}=2\sqrt{\frac{2a}{b}}$$
>
> $$b+\frac{2}{a}\geqq 2\sqrt{b\cdot\frac{2}{a}}=2\sqrt{\frac{2b}{a}}$$
>
> が成り立つ．いずれも正だから，積を考えて
>
> $$\left(2a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{2}{a}\right)\geqq 2\sqrt{\frac{2a}{b}}\cdot 2\sqrt{\frac{2b}{a}}=8$$
>
> が成り立つ．9 ＞8 であるから，
>
> $$\left(2a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{2}{a}\right)\geqq 9$$
>
> が成り立つ．

問題 1-3

相加相乗平均の関係は，個数が多いバージョンもある．

a，b，c が正のとき，$\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$ が成り立つ．　……　①

①の証明と等号成立条件の考察を完成させるように，$\boxed{}$部分を埋めよ．

$\sqrt[3]{a}=A$，$\sqrt[3]{b}=B$，$\sqrt[3]{c}=C$ とおく．$a=\boxed{1}$，$b=\boxed{2}$，$c=\boxed{3}$ であるから，証明すべき式は

$$A^3+B^3+C^3 \geqq 3ABC \quad \cdots\cdots \quad (*)$$

となる．

$$A^3+B^3+C^3-3ABC=(A+B+C)\times\boxed{4}$$

と因数分解できる．次の $\boxed{5}$ のように $\boxed{4} \geqq 0$ である．

$$\boxed{\qquad\qquad 5 \qquad\qquad}$$

さらに，$A+B+C>0$ であるから，$(*)$ が成り立つ．

$(*)$ で等号が成り立つのは，A，B，C が $\boxed{6}$ を満たすときで，それは $a=b=c$ ということである．

解答・解説

問題 1-1

等式，不等式を証明するとき，2 数を式に代入して等号や大小関係が成り立つかどうかを考えることがある．以下の各関数 $f(x)$ について，

① $f(a)=f(b)$ ならば $a=b$

② $a<b$ ならば $f(a)<f(b)$

は成り立つだろうか？次のそれぞれの関数を与えられた範囲で考えるときにどうなるか答えよ．

(1) $f(x)=x^2$（x は実数）

(2) $f(x)=x^2$（$x \geqq 0$）

(3) $f(x)=\sin x$（$0° \leqq x \leqq 180°$）

(4) $f(x)=\cos x$（$0° \leqq x \leqq 180°$）

(5) $f(x)=\log_p x$（$x>0$） ただし，p は 1 ではない正の定数

【解答・解説】

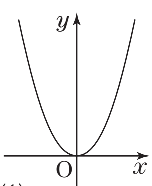
各関数について $y=f(x)$ のグラフを描いてみよう．

①は「1 つの y の値をとる x が 1 つしかない」という意味である．「どんな y の値でも，その y に対応する x は 1 つであるか？」という見方をしよう．

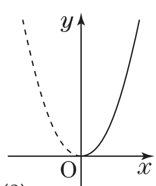
②は「代入する x の値が大きいと，y の値は必ず大きくなる」という意味である．単調増加ということである．

この観点がなかった人は，改めて考えてみよう！

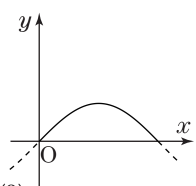
【解答・解説】



(1)



(2)



(3)

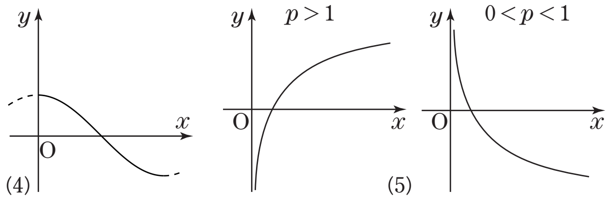
(1)　①は成り立たない．例えば，$f(x)=4$ となる x は $x=2$，-2 の 2 つがある．

②は成り立たない．例えば，$-2<1$ であるが，$f(-2)=4$，$f(1)=1$ で，$f(-2)>f(1)$ である．

(2)　①，②ともに成り立つ．単調増加だからである．

(3)　①は成り立たない．例えば，$f(x)=0$ となる x は $x=0°$，$180°$ の 2 つがある．

②は成り立たない．例えば，$90°<180°$ だが，$f(90°)=1$，$f(180°)=0$ で，$f(90°)>f(180°)$ である．



(4)　①は成り立つが，②は成り立たない．単調減少だからである．「$a<b$ ならば $f(a)>f(b)$」は成り立つ．

(5)　$p>1$ なら単調増加であるが，$0<p<1$ なら単調減少である．

①は，p の値によらず成り立つ．

②は，$p>1$ なら成り立ち，$0<p<1$ なら成り立たない．

■

※　本書の最初の問題ということで，全編を通じて大事になる観点を 1 つ述べておきたい．等式の種類についてである．

x，y は実数とする．次のように，いくつかの種類がある．

①　$x^2=1$ のように，特定の数値を代入すると成り立つもの

②　$x^2-1=(x-1)(x+1)$ のように，どんな数値を代入しても成り立つもの

③　$x^2+1=0$ のように，どんな数値を代入しても成り立たないもの

④　$y=x^2+1$ のように，図形の方程式で，すべての x，y で成り立つわけではないが，無数の x，y で成り立つもの

などである．

①は方程式である．②は x についての恒等式である．④は放物線の方程式である．

$$ax=b \quad \text{ただし，} a, b \text{ は実数の定数}$$

は，どのタイプだろう？方程式として解くと，

1)　$a \fallingdotseq 0$ のとき，$x=\dfrac{b}{a}$ である．この x でのみ成り立つ等式であるから，①のタイプである．

2)　$a=0$ のとき，$0x=b$ である．

・$b \fallingdotseq 0$ のとき，どんな x でも成り立たないから，③のタイプである．

・$b=0$ のとき，どんな x でも成り立つから，恒等式である．つまり，②である．

しかし，1) の $x=\dfrac{b}{a}$ も，xy 平面における直線の方程式と見ることも可能である．つまり，④のタイプである．

このように，前後の文脈がないと，どのタイプであるかを確定させるのは難しい．しかし，“恒等式”と“方程式”は区別しておきたい．

例えば，$x^2-1=0$ を解くときに，

$$x^2-1=(x-1)(x+1)=0 \quad \therefore \quad x=1, -1$$

と書くと，

$$x^2-1=(x-1)(x+1) \quad \cdots \text{②のタイプ}$$

$$(x-1)(x+1)=0 \quad \cdots \text{①のタイプ}$$

となり，ひとつながりの式の中で①と②の“＝”が混在してしまう．こういう状態は避ける方が良い．

他には，２次関数のグラフを考えるのに平方完成するとき，

$$y=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$$

とすると，

$$y=x^2-2x+3 \quad \cdots \text{④のタイプ}$$

$$x^2-2x+3=(x-1)^2+2 \quad \cdots \text{②のタイプ}$$

となってしまう．意識せず混在させていることはないだろうか？

方程式と恒等式の混在を避けるためには

$$x^2-1=0$$

$$(x-1)(x+1)=0$$

$$\therefore \quad x=1,\ -1$$

と並記する．または，

$$x^2-2x+3=(x-1)^2+2$$

$$\therefore \quad y=(x-1)^2+2$$

と式変形 (恒等式) は別にする．

ミスを減らすためにも，「方程式」と「恒等式」を分けることは心がけておくと良い．

問題 1-2

『a，b が正の実数であるとき，$\left(2a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{2}{a}\right) \geqq 9$ を示せ』という問題を次のように解いた．次の証明は正しいか？間違っているなら，おかしい所を指摘し，正しい論証に直せ．

> a，b ともに正だから，相加相乗平均の関係より
>
> $$2a+\frac{1}{b} \geqq 2\sqrt{2a \cdot \frac{1}{b}} = 2\sqrt{\frac{2a}{b}}$$
>
> $$b+\frac{2}{a} \geqq 2\sqrt{b \cdot \frac{2}{a}} = 2\sqrt{\frac{2b}{a}}$$
>
> が成り立つ．いずれも正だから，積を考えて
>
> $$\left(2a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{2}{a}\right) \geqq 2\sqrt{\frac{2a}{b}} \cdot 2\sqrt{\frac{2b}{a}} = 8$$
>
> が成り立つ．$9 > 8$ であるから，
>
> $$\left(2a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{2}{a}\right) \geqq 9$$
>
> が成り立つ．

【ヒント】

8 以上であることから，9 以上であることは分かるだろうか？ 9 以上であることが分かれば，8 以上であるが…．

相加相乗平均の関係での論証を精密にするには，等号成立条件を考えておくことが重要である．

この観点がなかった人は，改めて考えてみよう！

【解答】

間違っている．$\left(2a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{2}{a}\right) \geqq 8$ から $\left(2a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{2}{a}\right) \geqq 9$ を導くことはできないからである．

以下で証明を修正する．

$$\left(2a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{2}{a}\right)=2ab+\frac{2}{ab}+5$$

である．$ab>0$ であるから，相加相乗平均の関係より

$$2ab+\frac{2}{ab}+5=2\left(ab+\frac{1}{ab}\right)+5\geqq 2\cdot 2\sqrt{ab\cdot\frac{1}{ab}}+5=9$$

が成り立つ．よって，

$$\left(2a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{2}{a}\right)\geqq 9$$

が成り立つ．

■

※　相加相乗平均の関係を用いた

$$2a+\frac{1}{b}\geqq 2\sqrt{2a\cdot\frac{1}{b}}=2\sqrt{\frac{2a}{b}}$$
$$b+\frac{2}{a}\geqq 2\sqrt{b\cdot\frac{2}{a}}=2\sqrt{\frac{2b}{a}}$$

において，等号が成立する条件は順に

$$2a=\frac{1}{b}\quad\therefore\quad ab=\frac{1}{2}$$
$$b=\frac{2}{a}\quad\therefore\quad ab=2$$

である．これらを両立する a，b は存在しない．だから，

$$\left(2a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{2}{a}\right)\geqq 8$$

は，とりうる値の範囲を表す不等式ではない（$9\geqq 8$ のように大小を表す不等式としては正しい）.「右辺を 8 より大きい数に変える方法があるはずだ」と考えることができる．相加相乗平均の関係を 2 回使うことが等号不成立の原因だから, 1 回使うだけにするよう, まず展開するのである.

相加相乗平均の関係を使わずに

$$\left(2a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{2}{a}\right)-9=2ab+\frac{2}{ab}-4=2\left(\sqrt{ab}-\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)^2\geqq 0$$

としても構わない. 相加相乗平均の関係を証明しているのと同じである. 中途半端な理解で公式を使うよりはずっと良い.

※　前問の解説部分では等号について考えた.

ここでは，不等式の種類について考えてみたい.

x，y は実数とする．不等式にもいくつか種類がある．大まかには

$\boxed{1}$　特定の値を代入すると成立するもの (等式での方程式に対応)

$\boxed{2}$　常に成り立つもの (等式での恒等式に対応)

である.

少し細かく見ると $\boxed{1}$ の仲間としては,

・$x^2<-1$ のように，どんな数値を代入しても成り立たないもの

・関数 $f(x)$ の定義域としての $x \geqq 0$ のようなもの

・$y \geqq x^2$ のように，領域を表すもの (すべての x，y で成り立つわけではないが，無数の x，y で成り立つ)

がある．$\boxed{2}$ は,

・$x^2 \geqq 0$ のように，とりうる値の範囲を表すもの (どんな数値を代入しても成り立ち，その範囲のすべての値をとる)

・$x^2 \geqq -1$ のように，どんな数値を代入しても成り立つが，とりうる値の範囲ではないもの

がある.

キッチリと分類するのは難しいが，意識はしておきたい.

例えば, $2^x \geqq 0$ が必ず成り立つが, とりうる値の範囲は, $2^x>0$ である.

不等式の証明では,「変域」であることを示すのではない．本問では

$$\left(2a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{2}{a}\right) \geqq 9$$

を示した．そこで「等号成立条件」に関する言及が無かったことに気付いただろうか？「常に成り立つ不等式」であることを示せば良く,「変域」であるかどうかを調べるのではないから，等号が成り立つことがあるかどうかは気にしなくても良い．実際には，$ab=1$ のときに等号が成り立つから，9 は最小値になっている.

一方,

$$\left(2a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{2}{a}\right) \geqq 8$$

は,「常に成り立つ不等式」ではあるが,「変域」を表す不等式ではない. 等号成立する a，b が存在しないのである．そして, 正しい不等式である

が，示したいものではなかった．

答案において，等号成立条件について言及する必要があるのはどういうときだろう？

証明した不等式を，最大値や最小値を求めるのに使いたいときには，等号成立条件を確認する．

本問のように，相加相乗平均の関係を利用するときには特に注意を要する．本問では

$$\left(2a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{2}{a}\right) \geqq 9$$

が必ず成り立ち，$ab=1$ のときに等号成立するから，$\left(2a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{2}{a}\right)$ の最小値は 9 である．

しかし，$\left(2a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{2}{a}\right) \geqq 9$ は「変域」だろうか？とりうる値の範囲とは，$\left(2a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{2}{a}\right)$ が「常に 9 以上で，しかも，9 以上のすべての実数値をとる」という意味である．例えば，

$$\left(2a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{2}{a}\right) = 1000$$

となることはあるのだろうか？ a，b はどこまでも大きな値をとれるから，$\left(2a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{2}{a}\right)$ もどこまでも大きな値をとることはできる．だから，$\left(2a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{2}{a}\right) \geqq 9$ はとりうる値の範囲を表す不等式である．

このように,「常に成り立つ不等式」であることと「変域を表す不等式」であることの間には，とても大きな違いがある．

問題 1-3

相加相乗平均の関係は，個数が多いバージョンもある．

a，b，c が正のとき，$\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$ が成り立つ．　……　①

①の証明と等号成立条件の考察を完成させるように，$\boxed{}$部分を埋めよ．

> $\sqrt[3]{a}=A$，$\sqrt[3]{b}=B$，$\sqrt[3]{c}=C$ とおく．$a=\boxed{1}$，$b=\boxed{2}$，$c=\boxed{3}$ であるから，証明すべき式は
>
> $$A^3+B^3+C^3 \geqq 3ABC \quad \cdots\cdots \quad (*)$$
>
> となる．
>
> $$A^3+B^3+C^3-3ABC=(A+B+C)\times\boxed{4}$$
>
> と因数分解できる．次の $\boxed{5}$ のように $\boxed{4}\geqq 0$ である．
>
> $$\boxed{\qquad\qquad 5 \qquad\qquad}$$
>
> さらに，$A+B+C>0$ であるから，$(*)$ が成り立つ．
>
> $(*)$ で等号が成り立つのは，A，B，C が $\boxed{6}$ を満たすときで，それは $a=b=c$ ということである．

【ヒント】

3 乗根の定義を思い出そう．$x^3=a$ の実数解が，a の 3 乗根 $\sqrt[3]{a}$ である．

$\boxed{5}$ がこの証明の要となる．等号成立条件は，最後に書かれているように $a=b=c$，つまり，$A=B=C$ のときである．ここから逆算できると良い．

問題文は最後まで読んでおくと，だいたいの流れを把握することができるし，重要な情報が得られることもある．

この観点がなかった人は，改めて考えてみよう！

【解答・解説】

3 乗して，

$$a=A^3,\ b=B^3,\ c=C^3 \quad \cdots\cdots \quad \boxed{1},\ \boxed{2},\ \boxed{3}$$

であるから，証明すべき式は

$$\frac{A^3+B^3+C^3}{3} \geqq ABC \quad \therefore \quad A^3+B^3+C^3 \geqq 3ABC \quad \cdots\cdots \quad (*)$$

である．因数分解すると

$$\begin{aligned} & A^3+B^3+C^3-3ABC \\ &=(A+B+C)(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA) \quad \cdots\cdots \quad \boxed{4} \end{aligned}$$

である．後半部分 $\boxed{4}$ について，0 以上であることを示す ($\boxed{5}$).

$$\begin{aligned} & A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA \\ &=\frac{2A^2+2B^2+2C^2-2AB-2BC-2CA}{2} \\ &=\frac{(A-B)^2+(B-C)^2+(C-A)^2}{2} \geqq 0 \end{aligned}$$

が成り立つ．$A+B+C>0$ であるから，

$$(A+B+C)(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA) \geqq 0$$

$$\therefore \quad A^3+B^3+C^3 \geqq 3ABC \quad \cdots\cdots \quad (*)$$

が成り立つ．等号が成立するのは

$$(A-B)^2=(B-C)^2=(C-A)^2=0$$

$$\therefore \quad A=B=C \quad \cdots\cdots \quad \boxed{6}$$

のときである．以上から，

$$\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$$

が成り立ち，等号が成り立つのは

$$a=b=c$$

のときである．

■

あとがき

これまでの数学とこれからの数学は大きく異なる.

数学が苦手な人にとって，基本知識の定着，繰り返し学習と，苦行でしかなかった数学の勉強．正しいイメージ付けを重視し，現象として定性的に数学を捉えられることが，これからの数学学習で重視されなければならない．これが数学嫌いを減らすチャンスになるかも知れない.

本書は，そのことを伝える問題集として作成した.

頭を使わないと答えられないよう，引っかけ問題を作ったり，嫌がらせの要素もふんだんに盛り込んだ. また, 数学概念のイメージを身をもって実感してもらうような問題も入れた.

何度も繰り返し解いて定着させるような問題集ではないが，嫌がらせ対応モードで数学に接する機会は少ないので，忘れたころに解き直してもらえるのは良いことだ．その際も，できるだけ記憶を頼りにせず，よく問題を読んで，慎重に判断し，正しく推論してもらいたい.

本書が新時代の高校数学の1つの基準となれば, 筆者として嬉しく思う.

本書の作成にあたり，東京出版の飯島康之さん，坪田三千雄さんには企画から内容の吟味までお世話になりました．また，問題 3-16 では，亀井喜久男先生が描かれていた図を参考にしました．問題 3-17 では竹内英人先生が出題された問題を参考にしました.

これまで関わったすべての方々に感謝申し上げ，本書を捧げます．ありがとうございました.

研伸館（けんしんかん）

1978 年，株式会社アップ (http://www.up–edu.com) の大学受験予備校部門として発足 (兵庫県西宮市).

東大・京大・阪大・神戸大などの難関国公立大学や早慶関関同立などの難関私立へ毎年多くの合格者を輩出する現役高校生対象の予備校として，関西地区で圧倒的な支持を得ている．

http://www.kenshinkan.net

著者紹介：

吉田　信夫（よしだ・のぶお）

1977 年　広島で生まれる

1999 年　大阪大学理学部数学科卒業

2001 年　大阪大学大学院理学研究科数学専攻修士課程修了

2001 年より，研伸館にて，主に東大・京大・医学部などを志望する中高生への大学受験数学を担当し，灘校の生徒を多数指導する．そのかたわら,「大学への数学」などの雑誌での執筆活動も精力的に行う．

著書『複素解析の神秘性』(現代数学社 2011),『ユークリッド原論を読み解く』(技術評論社 2014),『超有名進学校生の数学的発想力』(技術評論社 2018),『ほぼ計算不要の思考力･判断力･表現力トレーニング　数学 IA』(東京出版 2018) など多数.

ちょっと計算も必要な

思考力・判断力・表現力トレーニング 数学Ⅱ

令和元年12月18日　第１刷発行

著　者　吉田　信夫
発行者　黒木美左雄
発行所　株式会社 東京出版
〒150-0012 東京都渋谷区広尾3-12-7
電話：03-3407-3387　振替：00160-7-5286
https://www.tokyo-s.jp/

印刷所　株式会社 光陽メディア
製本所　株式会社 技秀堂
落丁・乱丁本がございましたら，送料弊社負担にてお取り替えいたします.

ISBN978-4-88742-246-9

(定価はカバーに表示してあります)