はじめに

月刊「大学への数学」の増刊号として，2002 年から

『合否を分けたこの 1 題』

を刊行して来ました．

その増刊号の特徴は，

・大学（学部）ごとに，その年の「合否を分けたこの 1 題」を厳選
・入試突破に必要なレベルが分かり，今後の勉強の指針となる
・問題ごとに，それを解くのに必要な手法や定理などを詳しく説明．問題によってはその背景や周辺の話題，類題も解説

です．

その過去 3 年分の増刊号で取り上げた問題をまとめて書籍にしたものが本書「この問題が合否を決める！2016～2018 年入試」です．過去 3 年分について同じようなテーマの重複をなくし，68 題を精選しました．

本書の特徴は，

・最近の入試傾向に沿った“重要問題”に一通りあたることができる
・どの問題からも始められる
・1 題 1 題詳しい解説がしてある

とまとめることができるでしょう．

（なお，原則として，本書の解説は，増刊号をそのまま転載しています．「なぜこの 1 題か」も出題当時に書かれたものです．出題年度を表示するなどはしています．）

本書で取り上げる問題は，やや程度の高い，入試の

典型問題，融合問題，総合問題

です．

この本では，次のような使い方を想定しています．

入試の標準問題にほぼ一通りあたった人，

たとえば，

「1 対 1 対応の演習」シリーズや，
「新数学スタンダード演習」
「数学Ⅲスタンダード演習」

をほぼ終えた人が，

さらなるレベルアップを図る

あるいは

総仕上げのために用いる

などです．

また，本書の問題編は，原則として

見た目の分野で分類
（複数の分野にまたがるときは主要な 1 つ）

したので，分類のタイトルがヒントになることはなく，実戦的な演習をするのに最適です．

見た目だけで分類したので，たとえば「座標」の問題を解くにも，場合によっては，数Ⅲの知識が必要になることもあります．数Ⅲが必要でない問題を解きたいという場合もあるでしょうから，p.4 に文系範囲（数ⅠAⅡB）の問題を一覧表にしてまとめておきました．

いろいろな使い方に配慮した本書で，より実戦力をつけていって下さい．また，今年の増刊号『合否を分けたこの 1 題』（7 月末日発売予定）とは問題が重複していない（入試年度が違う）ので，併せて活用すると，より効果的でしょう．

本書の構成と利用法

本書の対象者などは，前ページで述べました．次に，本書の構成などを説明しましょう．本書は大きく問題編（p.5〜28）と解説編（p.29〜231）に分かれています．

○問題編

見た目の分野で分類しました．その分類のタイトルが解く上でのヒントとなることはほとんどありませんので，実戦的な演習をするのに最適です．文系範囲の問題の一覧が p.4 にあります．

○解説編

問題文の右上に，その年のセットがどのようなものであったか分かるように，各問の難易，目標時間，分野をまとめたものを掲載しました．また，取り上げた問題の番号を❸，それ以外を①のように表しました．

＊　　＊

「なぜこの１題か」：その問題が合否を分けた１題となっている理由を書いています．入試傾向の分析などについての情報を盛り込んでいる場合もあります．最後に，その問題について，何分くらいで解いたらよいのかなどの［目標］をコメントしています．

「解答」：実際の答案ではこの程度で十分と思われる詳しさで書いていますが，その行間等を補うために解答の右側に傍注として，なぜそのような解法をとったのか，あるいは使った定理，公式などの補足，また，どんな計算や工夫をしているのか，などの説明を加えました．

「解説」：その問題を解くのに必要な手法や定理をここで詳しく説明しました．また，問題によってはその背景や周辺の話題，類題にも踏み込みました．

「受験報告」：これは，実際に入試を受けてこられた「大学への数学」の読者のみなさんから届いた手紙などからこの１題として取り上げた問題を中心に紹介したものです．試験においてどう解いたのか，またどのくらいの時間がかかったのか，出来具合はどのようであったのかなどが書かれています．大半が試験当日，あるいは翌日に書かれた生々しいものであり，非常に参考になることが多いはずです．

○本書で学習するにあたって

普段の学習での問題演習においては，その分野の理解が目標であるので，解答にかかった時間をあまり気にすることはありません．しかし，本書で，合否を分けたかどうかをテーマにして学習する場合は，実際の試験を想定して，とりあえず 30 分でできるだけ多く得点できるような解き方をして下さい．さらに，完答するのにどれだけかかったかをメモしておきましょう．なお，「なぜこの１題か」の［目標］のところに時間についてコメントのある場合もあります．時間を意識して演習することで，より志望大学のレベルが分かり，今後の勉強の指針となるでしょう．

＊　　＊

以上の方法を入試直前期に行えば，かなり実戦的で，効果的な演習となることでしょう．

◇解説編の記号について

・問題文の右上で使っている記号（C＊＊など）

問題の難易は，入試問題を 10 段階に分けたとして，

A(基本)…5 以下，B(標準)…6，7，
C(発展)…8，9，D(難問)…10

目標時間は＊1 つにつき 10 分，○は 5 分である．平均的な難関校志望者が入試直前期において，自分の力を出しきれた場合を基準にしている．

分野は，出題時点のもので，Ⅰ…数Ⅰ，Ⅱ…数Ⅱ，Ⅲ…数Ⅲ，**A**…数 A，**B**…数 B である．

例えば，「①　B＊＊　**B**/ベクトル」とあれば，標準問題で目標時間は 20 分，数学 B のベクトルの問題であることを意味する．

・解答・解説で現れる記号

解答の 別解 などにつけた☆，★について．

☆　巧妙であるが，ぜひ身につけて欲しい解法
★　相当に巧妙で，思いつかなくても心配のいらない解法

次に，主に解答の最後にある注意事項について．

⇨**注**　すべての人のためのもの
➡**注**　意欲的な人のためのもの

また，▨■はコメントを意味するマークで，

▨　すべての人のためのもの
■　意欲的な人のためのもの

◇受験報告の出来具合について

○……完答（のつもり）
△……半答（のつもり）
×……誤答・手つかず・ほぼダメ

大学への数学

この問題が合否を決める！

2016～2018年入試

CONTENTS

掲載校一覧（解説編）

表紙写真提供：amanaimages

問題編の説明

◇問題の右側の枠囲みについて

一番上に，解説編の頁（太字が解答の頁）を，その下に小社の刊行物に掲載されている類題・参考問題を紹介した（2019 年に発売されている本の頁を紹介）.

なお，書名は以下のように略称した.

「入試数学の基礎徹底」……………………基礎徹
「数学Ⅲの入試基礎／講義と演習」………Ⅲ基礎
「新数学スタンダード演習」………………新スタ
「数学Ⅲスタンダード演習」………………Ⅲスタ
「新数学演習」………………………………新数演
「入試の軌跡」シリーズ………………………軌跡
「解法の探求・微積分」…………………解探微積
「解法の探求・確率」……………………解探確率
「センター必勝マニュアル数学ⅠA」…必マニⅠ
「センター必勝マニュアル数学ⅡB」…必マニⅡ
「1 対 1 対応の演習（新訂版）」シリーズ…1 対 1
「プレ 1 対 1 対応の演習」シリーズ…プレ 1 対 1
「教科書 Next ベクトルの集中講義」…ベクトル
「教科書 Next 数列の集中講義」……………数列
「教科書 Next 図形と方程式の集中講義」
………図形と方程式
「教科書 Next 三角比と図形の集中講義」
………………三角比
「マスター・オブ・整数」……………………整数
「マスター・オブ・場合の数」…………場合の数
「微積分・基礎の極意」………………………極意
「数学を決める論証力」……………………論証力
「ハッとめざめる確率」……………………ハッ確
「解法の突破口［第 3 版］」…………………突破
「数学ショートプログラム」…………… ショート
「入試のツボを押さえる重点学習－数学ⅠAⅡB」
……入試のツボ
「難関大入試数学・解決へのアプローチ」
……アプローチ
「難関大入試数学・方針をどう立てるか」…方針
「難関大入試数学・発展していく三角関数」
………三角関数
「思考力を鍛える不等式」…………………不等式
「ちょっと差がつくうまい解法」…………うまい
「ほぼ計算不要の思考力・判断力・表現力
トレーニング数学ⅠA」
………トレⅠA
「東大数学で 1 点でも多く取る方法
理系編 ［第 4 版］」…… 東大理系
「東大数学で 1 点でも多く取る方法
文系編 ［第 4 版］」…… 東大文系
「考え抜く数学～学コンに挑戦～」………学コン
「考え抜く数学理系編～学コンに挑戦～」
……学コン理系編
「もっと考え抜く数学～学コンの発展問題に挑戦～」
……もっと学コン

文系範囲（数ⅠAⅡB）の問題一覧

問題編の頁を紹介する.

問題編

場合の数・確率

○ 16　近畿大学・医学部

正 n 面体の各面に 1 から n の数字を 1 つずつ書き，n 面のさいころ（n 面ダイス）を作る．ただし回転させて一致するものは同じ n 面ダイスとみなす．

p.188
1 対 1 A p.19
1 対 1 A p.37

（1）　n は 5 つの値をとる．それらの和は $\boxed{\text{ア}}$ である．

（2）　数字の書き方は $n=4$ のとき $\boxed{\text{イ}}$ 通り，$n=6$ のとき $\boxed{\text{ウ}}$ 通り，$n=8$ のとき $\boxed{\text{エ}}$ 通り存在する．

（3）　n 面ダイスのそれぞれの目の出る確率は $\dfrac{1}{n}$ とする．

（i）　4 面ダイスと 8 面ダイスを投げて，出た目の積が 4 の倍数となる確率は $\boxed{\text{オ}}$ である．

（ii）　4 面ダイスと 6 面ダイスと 8 面ダイスを投げて，出た目の積が 100 以上となる確率は $\boxed{\text{カ}}$ である．

○ 18　京都薬科大学

次の $\boxed{}$ にあてはまる数を解答欄に記入せよ．

p.164
新スタ 7･9
1 対 1 A p.37

（1）　袋の中に，1 から 3 までの数が 1 つずつ書かれた赤玉が 3 個，1 から 3 までの数が 1 つずつ書かれた白玉が 3 個入っている．この袋の中から同時に 4 個の玉を取り出す．このとき，赤玉 2 個，白玉 2 個を取り出す確率は $\boxed{\text{ア}}$ であり，赤玉 3 個，白玉 1 個を取り出す確率は $\boxed{\text{イ}}$ である．また，取り出した赤玉に書かれた数の合計と取り出した白玉に書かれた数の合計が同じになる確率は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

（2）　袋の中に，1 から 3 までの数が 1 つずつ書かれた赤玉が 3 個，1 から 3 までの数が 1 つずつ書かれた白玉が 3 個入っている．この袋の中から玉を 1 個取り出しては元の袋に戻す作業を 4 回繰り返す．このとき，赤玉 2 個，白玉 2 個を取り出す確率は $\boxed{\text{エ}}$ であり，赤玉 3 個，白玉 1 個を取り出す確率は $\boxed{\text{オ}}$ である．また，取り出した赤玉に書かれた数の合計と取り出した白玉に書かれた数の合計が同じになる確率は $\boxed{\text{カ}}$ である．

（3）　袋の中に，1 から 4 までの数が 1 つずつ書かれた赤玉が 4 個，1 から 4 までの数が 1 つずつ書かれた白玉が 4 個入っている．この袋の中から同時に 4 個の玉を取り出すとき，取り出した赤玉に書かれた数の合計と取り出した白玉に書かれた数の合計が同じになる確率は $\boxed{\text{キ}}$ である．

（4）　袋の中に，1 から 6 までの数が 1 つずつ書かれた赤玉が 6 個，1 から 6 までの数が 1 つずつ書かれた白玉が 6 個入っている．この袋の中から同時に 4 個の玉を取り出すとき，取り出した赤玉に書かれた数の合計と取り出した白玉に書かれた数の合計が同じになる確率は $\boxed{\text{ク}}$ である．

解説編

右京一美（予備校講師）　小川　功（編集部外部スタッフ）　奥山智彦（塾講師）
高橋和正（予備校講師）　中里仁謙（編集部外部スタッフ）　平島邦彦（塾講師）
古川昭夫（数理専門塾主宰）　安田　亨（予備校講師）　米村明芳（予備校講師）
東京出版編集部

京都薬科大学

18年のセット
90分

①	BABAB ***○	ⅠⅡⅡAⅡ/数と式, 2次方程式, 対数, 図形(内接四角形), 3次関数(面積)
②	B **○	B/数列(連立漸化式)
③	B *○	B/ベクトル(空間座標, 球, 円)
❹	C ****	A/確率

次の $\boxed{}$ にあてはまる数を解答欄に記入せよ．

（1） 袋の中に，1から3までの数が1つずつ書かれた赤玉が3個，1から3までの数が1つずつ書かれた白玉が3個入っている．この袋の中から同時に4個の玉を取り出す．このとき，赤玉2個，白玉2個を取り出す確率は $\boxed{ア}$ であり，赤玉3個，白玉1個を取り出す確率は $\boxed{イ}$ である．また，取り出した赤玉に書かれた数の合計と取り出した白玉に書かれた数の合計が同じになる確率は $\boxed{ウ}$ である．

（2） 袋の中に，1から3までの数が1つずつ書かれた赤玉が3個，1から3までの数が1つずつ書かれた白玉が3個入っている．この袋の中から玉を1個取り出しては元の袋に戻す作業を4回繰り返す．このとき，赤玉2個，白玉2個を取り出す確率は $\boxed{エ}$ であり，赤玉3個，白玉1個を取り出す確率は $\boxed{オ}$ である．また，取り出した赤玉に書かれた数の合計と取り出した白玉に書かれた数の合計が同じになる確率は $\boxed{カ}$ である．

（3） 袋の中に，1から4までの数が1つずつ書かれた赤玉が4個，1から4までの数が1つずつ書かれた白玉が4個入っている．この袋の中から同時に4個の玉を取り出すとき，取り出した赤玉に書かれた数の合計と取り出した白玉に書かれた数の合計が同じになる確率は $\boxed{キ}$ である．

（4） 袋の中に，1から6までの数が1つずつ書かれた赤玉が6個，1から6までの数が1つずつ書かれた白玉が6個入っている．この袋の中から同時に4個の玉を取り出すとき，取り出した赤玉に書かれた数の合計と取り出した白玉に書かれた数の合計が同じになる確率は $\boxed{ク}$ である．

なぜこの1題か

出題形式が安定したのか，例年と変わらず小問集合1題（小問が5問のセット），大問3題である．今年は関数のグラフが小問に移行し，代わりに数列が復活した．全体的にはここ数年比較的穏やかである．小問集合では1題5分と考えてもそれなりに時間を食うため，全体的な難易度を保っているのかもしれない．

今年のセットを見ていこう．①(小問集合）は，1つの小問内で複数の設問が設けられている問題が多い．これもここ数年で固まってきた1つの特徴だろう．90分という試験時間であるため，ここは確実に，かつ手早く片付けたい．②(数列）は漸化式を解くだけ．誘導が丁寧だが，見た目には余計な文字が現れる．定数を消去するという意図に気付いて，どれだけ時間をかけずに答えを求められるかがポイントになる．③(空間座標）は直線 l 上の点をベクトルで捉える，と考えれば手を動かしやすいだろう．(1)は(2)の誘導なのかもしれないが使いにくい．Hは l 上の点でOからの距離が最小と考えると2次関数になるが，$\overrightarrow{OH}\perp l$ を「(内積)＝0」で捉え，$|\overrightarrow{OH}|$ を計算する方が手早いだろう．(3)は球面と yz 平面の交わりを求めるだけ．いずれも方針は立てやすく，計算も軽い．この点から見ても③を落とすことは合格ラインから離れていくことを意味している．❹(確率）は，長い問題文を一つ一つしっかり読み，そのポイントに目を向けられるかどうかが重要になってくる．そこに気づいても，その後も幾つかの場合分けに追われるなど，多少やっかいな部分が見られる．

以上から，今年のセットでは，落とせない設問が多い①③で，とにかく失点が少なくなるように慎重に，②も誘導と導かれた式の意味を考えながら手早く処理したい．また，❹では，時間内にミスなく完答は難しいかもしれないが，ある程度親切な誘導があるので，その中でどれだけ得点を伸ばせるか？ということがポイントになってくる．

以上から，得点差が出やすいのは①，❹ではないだろうか．ここでは❹を解説する．

【目標】 本学の試験時間を考えると，❹で満点はほとんど取れないだろう．空欄ア，イと空欄エ，オはできるだけ20分程度を目標に得点していきたい．30分以内に(3)までをミスなく解ければ十分だろう．

解　答

（1）（2）　前半の空欄ア，イおよびエ，オは基本的な確率計算．玉に書かれた数の意味はない．後半の空欄ウおよびカでようやく玉の数が意味を持つ．ここでは赤玉の数の合計を k などとして，各 k の値と玉の数の合計の関係を調べていくことになる．幾つかの和として k の値を表すとき，玉の個数の少なさがポイントということに気付いておきたい．

（3）（4）　4つの玉という制約の下で，数の和の表し方を考えていくことは（1）（2）までと同じ．玉の個数が少し増えたことで，同じ k にも複数通りの表現ができる場合もあることに気付けることがポイントである．"合計和" だけでなく，全部で4つの玉を使うことを忘れないことも肝要．

⇦（1）（2）の明確な違いは，取り出した玉を「元に戻していない」（非復元抽出）か，「元に戻している」（復元抽出）かである．
　同時に取り出す問題は，1個1個元に戻さずに取り出し，その順番は考えないと考えられる．

⇦気付いてしまえば，後は丁寧に数え上げるだけ．

*　　　　　　　　　　　*

　以下，赤玉を●，白玉を○で表す．

（1）　全ての取り出し方は ${}_6C_4={}_6C_2=15$ 通り ……①　あり，これらは同様に確からしい．

⇦ ${}_6C_2=\dfrac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$

　ア：「赤玉3個から2個，および，白玉3個から2個」の取り出し方は，赤，白それぞれどの1個を取り出さないかを考えて3通りずつあるので，●●○○となる取り出し方は，3×3 通り

⇦白玉の取り出し方は赤玉の取り出し方に依らないので，積の法則が使える．

　よって，求める確率は①より，$\dfrac{3\cdot3}{15}=\mathbf{\dfrac{3}{5}}$

　イ：「赤玉3個から3個，白玉3個から1個」の取り出し方は，それぞれ1通り，3通りあるので，●●●○となる取り出し方は，1×3 通り

⇦赤玉は全部取り出されているが，白玉はどれが取り出されているか考えなければならない．

　よって，求める確率は①より，$\dfrac{1\cdot3}{15}=\mathbf{\dfrac{1}{5}}$

　ウ：（●の数の合計）＝（○の数の合計）のとき，合計を k とおく．
（以下も k は，この意味で用いることにする）

⇦以下の空欄カ，キ，クも同じ設定である．問題は，k の値や，和がこの k の値になる各色の玉の数の組合せ．
（1）では，取り出した同じ色の玉の数はすべて異なるので，赤3個，白1個となるとき，赤3個の数の和は6となり，白1個と等しくなることはない．

　このとき，$1+2+3=6>3$ であることを考えると，赤玉と白玉を2個ずつ取り出すケースしかあり得ず，$k=3$，4，5のいずれかである．和がこれらになる1〜3の異なる2数の組合せ（分割の仕方）は，

　　　$k=3$ のとき $3=1+2$ により $\{1,\ 2\}$，
　　　$k=4$ のとき $\{1,\ 3\}$，$k=5$ のとき $\{2,\ 3\}$

に限るから，求める確率は　$\dfrac{1+1+1}{①}=\dfrac{3}{15}=\mathbf{\dfrac{1}{5}}$

（2）　全ての取り出し方は 6^4 通り ……②　あり，これらは同様に確からしい．

　エ：赤玉2個，白玉2個となる取り出し方は，例えば赤赤白白と出たとして，$3^2\cdot3^2$ 通りある．

⇦"復元抽出法" は結局は反復試行の確率であり，空欄エ，オはそのように解くこともできる．（☞解説）

　●，●，○，○の出る順番を考えると，${}_4C_2$ 通りあるので，求める確率は②より，$\dfrac{3^2\cdot3^2\times{}_4C_2}{6^4}=\mathbf{\dfrac{3}{8}}$

　オ：「赤玉3個，白玉1個」となる取り出し方は，例えば赤赤赤白と出たとして，3^4 通りあり，いつ○が出るかを考えて，全部で $3^4\times4$ 通り

　よって，求める確率は②より，$\dfrac{3^4\times4}{6^4}=\mathbf{\dfrac{1}{4}}$

　カ：空欄ウで定めた k に対し，k として取れる値は，$k=2$，3，4，5，6．
$k=2$ のとき $2=1+1$ より，2個の●の数が共に1，2個の○の数が共に1になるから，これを $(1+1,\ 1+1)$ と表す（以下もこのように表記する）．

（2）は，同じ数の●や○を何度も取れるので，例えば，$k=2$ とは「1の赤玉と1の赤玉，1の白玉と1の白玉」
⇦と出ている状態．取り出された順も問題になる（同じものを含む順列）．

$(1+1,\ 1+1)$ のとき，●と○の出る順番も考えて ${}_4C_2=6$ 通り．

$k=3$ のとき $3=1+2=1+1+1$ より，$(3,\ 1+1+1)$ のときは，出る順と赤と白の入れ替え $(1+1+1,\ 3)$ を考えて，合わせて ${}_4C_1\cdot2=8$ 通り．

$(1+2,\ 1+2)$ のときは，出る順を考えて $4!=24$ 通り．

$k=4$ のとき $4=1+3=2+2$ より，$(1+3,\ 2+2)$ のときは，出る順と赤と白の入れ替えを考えて $\dfrac{4!}{2!}\cdot2=24$ 通り．

$(2+2,\ 2+2)$ のときは，出る順を考えて ${}_4C_2=6$ 通り．

$(1+3,\ 1+3)$ のときは，出る順を考えて $4!=24$ 通り．

$k=5$ のとき $5=2+3$ より，$(2+3,\ 2+3)$．出る順を考えて $4!=24$ 通り．

$k=6$ のとき $6=3+3$ より，$(3+3,\ 3+3)$．出る順を考えて，${}_4C_2=6$ 通り．

以上より，求める確率は，$\dfrac{6+8+24+24+6+24+24+6}{②}=\mathbf{\dfrac{61}{648}}$

⇦ 1 の赤が何番目に出るかで ${}_4C_2$ 通り．

⇦ 今度は 3 個と 1 個に分けられる $k=3$ のときが 1 つ目の Point．
- 3 の赤玉 1 回，1 の白玉が 3 回（出る順は ${}_4C_1$ 通り）
- 1 と 2 の赤玉，1 と 2 の白玉（出る順は $4!$ 通り）

の 2 パターンの考察になる．

⇦ もう一つの Point が $k=4$ のとき．(3)(4)でもこのような考察をしていくことになるが，“**分割の仕方が複数通りある**”は，「赤玉と白玉それぞれに，パターンの可能性が複数通りある」ということである．

(3)　全ての取り出し方は ${}_8C_4=70$ 通り ……③　あり，これらは同様に確からしい．

k として取れる値は，1 個と 3 個に分割できないことを考えると，$k=3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$ のみ．このとき玉の取り出し方は

$k=3,\ 4,\ 6,\ 7$ のときは順に $(1+2,\ 1+2)$，$(1+3,\ 1+3)$，$(2+4,\ 2+4)$，$(3+4,\ 3+4)$ の 1 通りずつ．

$k=5$ のとき $5=1+4=2+3$ より，

$(1+4,\ 1+4)$，$(1+4,\ 2+3)$，$(2+3,\ 1+4)$，$(2+3,\ 2+3)$

の 4 通りだから，以上より求める確率は，$\dfrac{1+1+1+1+4}{③}=\mathbf{\dfrac{4}{35}}$ (**キ**)

⇦ ${}_8C_4=\dfrac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=70$

(2)の流れを考えると，まず 1 個と 3

⇦ 個の分割が可能かどうかを考えたい．

⇦ $1+2\sim3+4$

⇦ ここでの考察の基準は，k の値を 2 個の数に分割するとき，1 種類の分割しかないものである．

当然，赤玉側，白玉側の書かれた数の組の可能性は 1 通りである．

一方，$k=5$ のときは，2 通りあることに注意．

(4)　全ての取り出し方は ${}_{12}C_4=495$ 通り ……④　あり，これらは同様に確からしい．

k として取れる値は，$k=3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11$．

1 個と 3 個に分割できるのは，$6=1+2+3$ の場合だけなので，どちらの色の玉が 1 個かを考えて 2 通り．

その他は，赤玉と白玉は 2 個ずつになる．このとき，

$k=3,\ 4,\ 10,\ 11$ のときは，

$3=1+2$，$4=1+3$，$10=4+6$，$11=5+6$

の 1 通りの分け方に限るので，1 通りずつ．

$k=5,\ 6,\ 8,\ 9$ のときは，

$5=1+4=2+3$，$6=1+5=2+4$，$8=2+6=3+5$，$9=3+6=4+5$

より，1 色に対し 2 通りずつのとり方があるので，$2^2=4$ 通りずつある．

$k=7$ のときは，$7=1+6=2+5=3+4$ より，1 色に対し 3 通りずつのとり方があるので，$3^2=9$ 通り．

以上より求める確率は，$\dfrac{2+1\times4+4\times4+9}{④}=\mathbf{\dfrac{31}{495}}$ (**ク**)

⇦ ${}_{12}C_4=\dfrac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=11\cdot5\cdot9=495$

⇦ $1+2\sim5+6$

⇦ ここでもまずは，1 個と 3 個に分けられるか否かをチェック．今回は玉に書かれた最大の数が 6 なので，実現可能になる．

⇦ この場合分けの基準も(3)と同様．$k=3,\ 4,\ 10,\ 11$ は赤玉側，白玉側の数の組の可能性は 1 通りずつ．

⇦ k の値がこれらのときは，赤玉側，白玉側の数の組の可能性は 2 通りずつあることを示している．つまり，例えば $k=5$ のとき，(1 と 4 の●，1 と 4 の○) の組の他に，(2 と 3 の●，1 と 4 の○) など，計 2^2 通り出てくる．

同様に，$k=7$ は 3 通りずつの可能性になる．

解　説

(受験報告は p.105)

【問題の流れと類題】

本問は，(1)では同時に取り出す組について，

(●の数の合計)＝(○の数の合計) となる確率 …★

を考えたが，反復試行にするとどうなるか？が(2)で問われ，同時に取り出すが玉の個数を増やしていくとどうなるか？が(3)(4)で問われている．

玉の個数が合計 6 個((1))，8 個((3))，12 個((4))と調べたので，次の問題で理解を深めてみよう．

類題　袋の中に，1 から 5 までの数が 1 つずつ書かれた赤玉が 5 個，1 から 5 までの数が 1 つずつ書かれた白玉が 5 個入っている．この袋の中から同時に 4 個の玉を取り出すとき，★の確率を求めよ．

（☞答えは最後）

【組（組合せ）と並び（順列）】

複雑な場合の数の問題では，まず計算しやすいパターンで分類すること（大雑把な分類）を試みることが大切であるが，(2)のように，組と順列が複雑に絡まる問題は要注意である．

例えば，空欄エでは，●2 個，○2 個となる場合の数を求める際に，

- (1)につられ，赤白の順番を考えていない
- ${}_4C_2$ でなく，4! をかけてしまう

といったミスが多い．

取り出す順によって玉の出方が違う，ということを実際に具体的に書いてみれば前者のミスは防ぐことができるだろうし，

- 取り出してから並べる
- 並ぶ位置（並ぶ位置の選択）を決めて並べる

などキチンと手順を分けて考えれば後者の混乱も防ぐことができるだろう．

そもそも，場合の数などでこのようなミスが多いのは，自分で計算したその手順で実際に幾つかの例を使って実験していない場合が多いのである．

【(1)と(2)の違い】

本問は(2)だけが復元抽出法（元に戻す）の問題である．確率の問題としては，

- 場合の数がベースとなる問題
- 基本となる確率から，確率計算で求める問題

の 2 タイプあるが，解答例では“場合の数”で通した．

(2)は傍注でも述べたように“復元抽出法”であるが，要するに毎回はじめと同じ状況になるので“**反復試行の確率**”である．

反復試行と見ると，玉に書かれた数の意味を考えなければ，毎回 $\frac{1}{2}$ の確率で赤玉が，$\frac{1}{2}$ の確率で白玉が出されるので，(2)の空欄エ，オは次のように解答できる．

別解　1 回の試行で，

●が出る確率は $\frac{1}{2}$，○が出る確率は $\frac{1}{2}$

エ：赤玉 2 個，白玉 2 個となる確率は，●，●，○，○の出る順番を考えると，${}_4C_2$ 通りあるので，

$${}_4C_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\mathbf{\frac{3}{8}}$$

オ：赤玉 3 個，白玉 1 個となる確率は，どの 1 回に○が出るかを考えて，4 通り．

よって，求める確率は $4\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\mathbf{\frac{1}{4}}$

*　　　　*　　　　*

一方，同じ(2)でも，空欄カは各玉を個々に見る必要があるので，単純に反復試行の確率の公式を使うことはできず，結局場合の数がベースの確率の問題になる．

場合の数の問題と判断した後，本問のように複雑さがある問題では，まずパターンで分けていくことが肝要だろう．

(●の数の合計)＝(○の数の合計）のときに，その等しい値を k として

k の値で場合分けをし，その値を各玉の数に分割する，という話が空欄ウ，カ，キ，クである．

(1)空欄ウで 3 個と 1 個に分かれないのは，玉に書かれた数が小さいことと，同時に取り出すために 3 個の和が $1+2+3=6$ となるからである．

ここに気付くと，(2)空欄カの意味も自ずと分かるだろう．つまり，反復試行にすることで，$k=3$ のとき
$3=1+1+1$ から

赤玉 1 個と白玉 3 個（or　赤玉 3 個と白玉 1 個）
の分割が実現できるのである．

【類題の解答例】

全ての取り出し方は

$${}_{10}C_4=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=210\text{ 通り}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots⑤$$

あり，これらは同様に確からしい．

k として取れる値は，$k=3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$
1 個と 3 個に分割はできないので，赤玉と白玉は 2 個ずつになる．

このとき，

$k=3,\ 4,\ 8,\ 9$ のときは，

$3=1+2,\ 4=1+3,\ 8=3+5,\ 9=4+5$

の 1 通りの分け方に限るので，1 通りずつ．

$k=5,\ 6,\ 7$ のときは，

$5=1+4=2+3,\ 6=1+5=2+4,\ 7=2+5=3+4$

より，1 色に対し 2 通りずつのとり方があるので，$2^2=4$ 通りずつある．

以上より求める確率は，$\dfrac{1\times4+2^2\times3}{⑤}=\mathbf{\dfrac{8}{105}}$　（中里）

近畿大学・医学部

16 年のセット			
60 分	❶	C ***	A/図形, 場合の数, 確率
	②	A **○	ⅡⅠA/方程式, 三角比, 図形
	③	B **	Ⅱ/微分(接線), 積分(面積)

　正 n 面体の各面に 1 から n の数字を 1 つずつ書き，n 面のさいころ（n 面ダイス）を作る．ただし回転させて一致するものは同じ n 面ダイスとみなす．

（1）　n は 5 つの値をとる．それらの和は $\boxed{\text{ア}}$ である．

（2）　数字の書き方は $n=4$ のとき $\boxed{\text{イ}}$ 通り，$n=6$ のとき $\boxed{\text{ウ}}$ 通り，$n=8$ のとき $\boxed{\text{エ}}$ 通り存在する．

（3）　n 面ダイスのそれぞれの目の出る確率は $\dfrac{1}{n}$ とする．

（i）　4 面ダイスと 8 面ダイスを投げて，出た目の積が 4 の倍数となる確率は $\boxed{\text{オ}}$ である．

（ii）　4 面ダイスと 6 面ダイスと 8 面ダイスを投げて，出た目の積が 100 以上となる確率は $\boxed{\text{カ}}$ である．

なぜこの 1 題か

　試験時間は 60 分と短いがその割りにはボリュームがある．3 問中に C レベルが 1 問あるのは例年通りだが，それも小問の一部だったので，標準レベルの問題をてきぱきと着実に解いていくことが要求されている．昨年よりやや易化した．❶が穴埋め，②③が記述式という形式は例年通りだが，②が小問セットになった．

　その②は，方程式，三角比，平面図形の小問 3 つで，どれも易し目なので落としたくない．

　③は放物線の面積に関する有名テーマの典型問題で，これも確保しておきたい．

　一方❶は場合の数と確率がメインテーマの問題．空欄アは正多面体の知識が必要．エは難しい．確率はミスなどしやすいので，ここで差がついただろう．

【目標】　エは後回し．他が押さえられれば御の字．

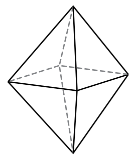
解　答

（1）　正 n 面体は 5 種類しかなく，$n=4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 20$ であることは数 A の教科書に載っている．

（2）　回転して一致するものは同じとみなすので，円順列と同様「固定」する．相手が立体なので，1 つの面を固定するだけでは不十分である．正八面体のときは難しいが，この場合も，正八面体をテーブルに置いたときの真上から見た図を考えるとうまく求められる．

⇦ 例えば，正四面体で底面を固定しても，側面はまだ“回転できる”．

⇦ ここが難しい．よく描く見取り図は右図だが，この図ではなく，ある面に垂直な方向から見た図を考えよう．



（3）（i）　余事象を考えた方が少し楽である．

（ii）　出た目の積が 100 以上になる各サイコロの目の組を書き出そう．

＊　　　　　　＊

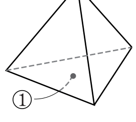
（1）　正 n 面体は，$n=4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 20$ のいずれかであるから，

$$4+6+8+12+20=\mathbf{50}$$

（2）　各面に書く数字を①などと表すことにする．

イ：　底面を①として，底面を固定して考えればよい．側面は，②，③，④の円順列で $(3-1)!$ 通り．

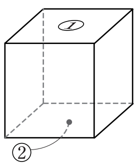
　よって，答えは **2** 通りである．



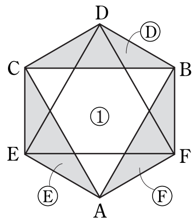
⇦ ②を固定して，$(3-1)!=2$ 通り．
あるいは，回転のしかたが，②⇨③，②⇨④ と元の配置の 3 通りあるから，$\dfrac{3!}{3}=2$ 通りとしてもよい．

②
③　④

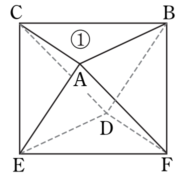
ウ：　上面を①として，上面を固定して考えればよい．このとき下面の数字の書き方は 5 通り．例えば下面が②の場合，側面は，③，④，⑤，⑥の円順列で $(4-1)!$ 通り．下面が他の場合も同様であるから，答えは，　$5\times3!=\mathbf{30}$ 通り



エ：　正八面体をテーブルの上に置き，上面を①として固定する．右図は真上から見た図（△ABC が上面，△DEF が下面）である．上面以外の数字の書き方は 7! 通りある．上面を①に固定したまま回転させると，回転のしかたは（Ⓓ⇨Ⓔ，Ⓓ⇨Ⓕ と元の配置の）3 通りある．したがって，7! 通りの中に 3 通りずつ同じ書き方があり，答えは $\frac{7!}{3}=\mathbf{1680}$ **通り**．



⇦ 見取り図は下図．☞解説．



▨ 結局，正八面体の 1 つの面を①に固定して 7! 通りと数えたとき，①の面を固定したまま回転させると，面が正三角形なので回転のしかたが 3 通りあるから，$\frac{7!}{3}$ 通りということ．

なお，ウを，左のエと同様に考えて，

$$\frac{5!}{4}=30 \text{ 通り}$$

とすることもできる．

（**3**）（**ⅰ**）　余事象は，出た目の積が奇数か 4 の倍数でない偶数である．

・出た目の積が奇数となるとき，ともに奇数の目が出るときであるから，こうなる確率は，$\frac{2}{4}\times\frac{4}{8}=\frac{1}{4}$

・出た目の積が 4 の倍数でない偶数となるとき，一方が奇数，他方が 4 の倍数でない偶数（2 or 6）となるときであるから，こうなる確率は，

$$\frac{2}{4}\times\frac{2}{8}+\frac{1}{4}\times\frac{4}{8}=\frac{1}{4}$$

よって，求める確率は，$1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

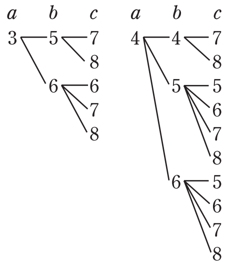
▨（3）を直接求める場合は，4 面ダイスの目（1〜4）で場合分けして，

$$\frac{1}{4}\times\frac{2}{8}+\frac{1}{4}\times\frac{4}{8}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{8}+\frac{1}{4}\times\frac{8}{8}$$
$$=\frac{2+4+2+8}{32}=\frac{1}{2}$$

（**ⅱ**）　4 面ダイスの目を a，6 面ダイスの目を b，8 面ダイスの目を c とする．（a，b，c）の組は 4×6×8 通りあり，これらは同様に確からしい．$abc \geqq 100$ を満たす組をすべて書き出すと右のようになる．

　したがって，求める確率は，

$$\frac{2+3+2+4+4}{4\times6\times8}=\frac{15}{4\times6\times8}=\boldsymbol{\frac{5}{64}}$$



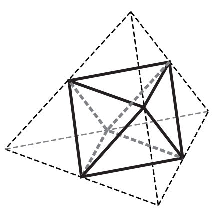
⇦ $a \leqq 2$ のとき，
　$abc \leqq 2\cdot6\cdot8=96<100$
であるから，不適．

解　説

【正八面体をテーブルに置いた見取り図などについて】

　正八面体をテーブルに置いたときの見取り図は，上の傍注に描いたが，これは次の事実とともに理解しておくのがよいだろう．

　『正四面体の各辺の中点を結ぶと正八面体が現れる』



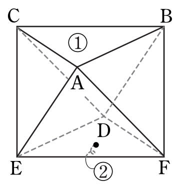
　右図の太線の正八面体を真上から見ると，解答の図のようになることが理解しやすいだろう．

【エについてやりそうな誤答】

　正八面体の平行な 2 面に着目し，正六面体の場合と同様に他の 6 面を円順列とするのは誤りである．

［誤答］　解答と同様に，上面を①として固定する（次図）．このとき，下面の数字の書き方は 7 通り．例えば下面が②の場合，残りの 6 面は③〜⑧の円順列で (6−1)! 通り．他の場合も同様であるから，答えは，

　7×5!＝840 通り



＊　　　　＊

「残りの 6 面は③〜⑧の円順列」としたところが誤り．右図で △ABF を回転させても，△AEF に重ねることはできないからである．上面と下面以外の面は，辺を上面と共有するか，下面と共有するかで 2 パターンあるのである．

　そこで，［誤答］の 3 行目の「②の場合，」以降を次のようにすれば，正答になる．

　残りの 6 面は③〜⑧で，③は △ABF か △AEF に書くとしてよい．③をどちらの面に固定しても（もう回転させることはできず）残り 5 面の数字の書き方は 5! 通り．下面が他の場合も同様であるから，答えは，

　7×2×5!＝1680 通り

（坪田）

あとがき

毎年の入試から,「合否を分けたこの1題」を集めて刊行してきました.集めてきた問題は良問ばかりで,しかも1題1題じっくり解説してあります.

その 2016〜2018 年で取り上げた問題から,さらに問題を選りすぐり,ほぼ全分野をカバーするように 68 題を精選しました.

詳しく解説しているので,例えば,問題のテーマは違いますが,p.46 の筑波大と p.86 の横浜市大の問題は,どちらもチェビシェフの多項式を背景に持つといったことが分かります.

また,類題や関連問題も充実しています.例えば p.106 の慶大・薬の問題は,巴戦がテーマです.同じ年に出された東大の問題や京大の過去問が類題として紹介してあります.

このように関連事項を詳しく解説してありますから,1問1問をより深く理解できるはずです.

みなさんの実力 up に役立てて頂ければ幸いです.　　　　　(坪田)

この問題が合否を決める！ 2016〜2018 年入試

令和元年6月20日　第1刷発行
定価：本体 1,800 円＋税
編　者　東京出版編集部
発行者　黒 木 美 左 雄
発行所　**東 京 出 版**
〒150-0012　東京都渋谷区広尾 3-12-7
電　話 (03)-3407-3387
振　替　00160-7-5286
URL　http://www.tokyo-s.jp/

整版所　錦美堂整版
印刷所　光陽メディア
製本所　技秀堂
落丁・乱丁の場合はご連絡下さい.送料弊社負担にてお取替えいたします.

ISBN　978-4-88742-243-8