

## はじめに

本書は2012年度に私が雑誌「大学への数学」に連載した雑誌記事をもとに、若干の加筆を施してまとめた参考書です。

本書を手にとっていただいた方のために、初めにいくつかの特徴と、私が想定している利用対象層を箇条書きの形でまとめてみます。

### 【本書の特徴】

1. 大学受験の数学分野の中で、三角比・三角関数という一つの分野を掘り下げた本です。全12章+補遺で、各章は4~5問の問題と、それらの問題を関連させ、つなぎ合わせながら、語る口調の解説とからなります。
2. 教科書では細切れに扱われている、三角比・三角関数のいろいろな話題を、初歩から上級者用まで一筋にまとめたところに最大の特徴があります。
3. 各章は独立しても読めるものですが、初めから読んでいくと、三角比が図形を分析するという用途から始まって、だんだんと関数概念に発展し、さらには多項式や微積の素材として高度に「進化」していく様子が分かるかと思います。
4. 予備知識としては、教科書的な事項や公式、定型的な問題がある程度わかっていることが前提となります。

### 【利用対象者】

レベルはかなり高いですので、あと1年で大学受験を控えているが、まだあまり数学をやっていないというような受験生には向かないと思います。

むしろ次のような方にお勧めです。

1. 地力は自分でもあると思うが、教科書でやる三角比の授業やドリルはいま一つパターン学習で面白くない。もっと突っ込んだ解説が知りたいという高1~高2くらいの数学上級者。
2. 三角関数はある程度学習したわりにじっくりこず、一貫性のある背景知識を得て数学上級者になり、受験にも役立てたいという難関大学の受験生。
3. とかく公式偏重になりがちなこの分野を教えるのに、面白い工夫や背景知識も交えて教える必要を感じている、あるいは融合問題への対処の仕方を教えたい教師の方も歓迎します。

書物というものはいろいろな利用の仕方があるものです。難関大学受験生が、最後のワンポイントとしてこの書物の最後の方の章を眺めるのも有効な活用かとも思います。

## 本書の利用法

いったん書物を手にしたら、利用の仕方は実に人さまざまなのです。初めからじっくりと読む人もいれば、必要なところだけを参照する人もいます。

ただ、それでは無責任だという人もいそうですから、最低限のことを次に書きます。

### 1. 余裕と実力ある高1高2生のみ最初からやるとよい。

要するに、時間のない受験生が、ある分野だけを全部やる時間はないのです。ただ、本格的な理解のためには、一応高校の教科書くらいの知識を得たうえで、初めからじっくりと読んでいくと、三角関数という分野の深さに目覚めるかもしれません。

その意味では、本書は「数学の面白さ」を見つけるための本という性格も持ち合わせます。

問題は難しいものが多いので一応は取り組んでもらいたいものの、全部を解き切るのは難しいでしょう。しばらく考えた後は解説を読んで全く構いません。

### 2. つまみ食いの人のためのガイド

全部やるのが大変なら、必要な部分をつまみ食いすることになります。

① 実力はあるが三角比の意味がじっくりこない人のために、

初めの数章がおすすです。図形を扱う道具として、三角比がよいのか、それとも座標平面や初等幾何がよいのか、など手法選択の迷いは意味を分らず図形問題を解いていると起こりがちです。また、公式がなかなか覚えられない人は、やはりこのあたりをじっくりと読むと感覚がつかめるでしょう。

### ② 難関大学を受ける人には

難関大学理科系の受験生が、入試問題の背景をワンポイントで知りたいこともあるでしょう。

そうした人には、後半の数章、特に多項式や3次方程式と三角関数の関係や、 $\pi$ の値を微積と三角関数からみて追求した章、チェビシェフの多項式あたりがおすすです。

難関大学は、三角比を単発で出すことは少なく、背景のある融合問題の形式で出題してきます。そうした時にこれらの章を活用してください。

いろいろな工夫と仕掛け、また面白い問題を盛り込んでありますから**教える側の方は**、興味をひかれた部分をパラパラとみて利用するのも手かもしれません。

### 本書で用いる記号について：

=…= 単純計算の省略

⇨注 初心者のための注意事項。

⇨注 すべての人のための注意事項。

➡注 意欲的な人のための注意事項。

# 大学への数学

## 難関大入試数学・発展していく三角関数

▶ 栗田 哲也 著 ◀

### CONTENTS

はじめに .....	1
本書の利用法 .....	2
§ 1 三角比事始め ～名付けるということ～ .....	4
§ 2 三角比の諸公式 ～遊んで慣れる三角比～ .....	14
§ 3 三角比の眺め方 ～単位ベクトル, 単位円周上の等分点～ .....	24
§ 4 三角形の五心など .....	34
§ 5 幾何の難問 .....	44
§ 6 複素数と三角比 .....	54
§ 7 三角比の不等式 .....	64
§ 8 重要・頻出問題を眺める .....	74
§ 9 隠れている三角関数 .....	84
§ 10 チェビシエフの多項式 .....	94
§ 11 $\pi$ への道 .....	104
§ 12 直交する関数とフーリエ級数の入口 .....	114
§ 13 補遺 .....	124
あとがき .....	128

# §1 三角比事始め

～名付けるということ～

「三角比・三角関数」には、初心者から上級者まで、面白い話題が沢山ある。各セクションについて、“お役立ち系のもの”から、“華麗な数学の世界的なもの”まで幅広く紹介できる。そんな奥の深さをこの分野は持っている。

一方、この分野は学生諸君には今一つつかみきれない分野でもある。高1で習う三角比は、まずは「図形を扱う道具」である。ところが、高2になるとそれが“関数”となって単なる道具としての扱いから主役におどり出る。

さらに高3になると、解析（微積分）の素材として、大変に重宝するが、この頃になると、もはや“可愛かった”昔懐かしい三角比としての面影は薄い。

一体この変身ぶりは何なのだろうか？

そんな興味から、三角比・三角関数の話題をだんだん発展させながら理解していこうというのが本書の意図だ。

ともあれ、まずは入門（事始め）からはじめよう。

## 1. 三角比って何？

私は過激な主義だから、「東大が次のような問題を出してくれないかなあ…」といつも思っている。

[設問]

三角比とは何か、それはどのような意味で便利なのか。図形を扱う道具として、ベクトルと較べた場合どのような特性を持つか。君の考えを100行以内で述べよ。

\* \* \*

実際の入試でこんな問題が出たら、たいていの諸君は「ギャー」というだろう。だからこれは悪い冗談だ。だが日頃の勉強においては上の設問のようなことを考えないでよいわけがない。

たとえば、列挙すると、次のようなポイントは外せない。

- ① 三角比は今まで名前を与えることができなかった長さや角度に名前を与えることができる。
- ② 三角比はいわば、中学校で習った「三平方の定理」の拡張バージョンである。
- ③ 今までの幾何が「補助線」などを引くアイデアを必要としたのに対し、三角比を導入すると、システムティックな (sin, cos の) 計算で、そこを代用できる。
- ④ ベクトルが、「移動」「位置」「座標」などの概念と仲がよく、いわば (直交) 座標を拡張した道具としての側面をもつのに対し、三角比は角度、長さといった量を扱う。

このうち、何はともあれ目を留めてもらいたいのは①の部分だ。

右図を見てほしい。

$\triangle ABC$  の 2 角夾辺の値がわかっている。だから、この三角形は、他の辺や角の量も決定できるはずだ。

しかし、中学数学段階では、「では AC の長さを表せ」という問題には答えようがなかった。

ところが、三角比を用いると、たとえば右図のようにするだけで、

$$AC = \frac{AH}{\sin 46^\circ} = \frac{2 \sin 72^\circ}{\sin 46^\circ}$$

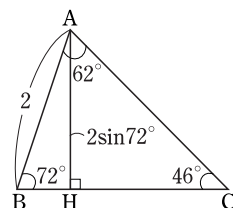
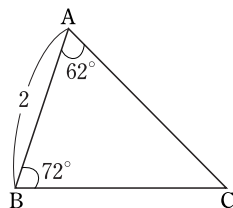
のように、ともかくも AC に名前をつけることができる。

はじめに光ありきか言葉ありきなのかは知らないが、「名前を与える」というのは、物事を扱っていく上で最も大切な初期の作業だ。そうした意味で、三角比はまず図形の様々な要素に名前を与え、言葉の世界の中に無数の“かつての名無しの権兵衛たち”を引き入れたのだ。

## 2. 三角形の決定

では、実際にこの「名付ける」という行為がどのように行われるのかを見ていこう。

その際手がかりとなるのが、中学校で習った「三角形の合同条件」だ。



△ABC は一般に 3つの辺と 3つの角をもつが、そのうち（例外はあるが）1つ以上の辺を含む 3つの量が決定されれば、三角形は形も大きさもたいていは 1つに（例外では 2つに）決まる。それは

- ① 3辺 （3つの辺の長さが既知）
- ② 2辺夾角 （2つの辺の長さとの夾角の大きさが既知）
- ③ 2角夾辺 （2つの角をそれをはさむ辺が既知）

という、3つの合同条件にまとめられている。

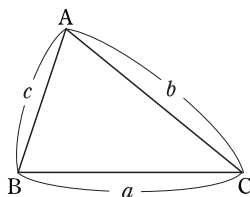
そこで上記①～③の各場合について、他の辺や角度の名付け方を見ていこう。

① 3辺

たとえば角 A の余弦は

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

のように、余弦定理を用いて与えられる。  
 （角そのものには  $\circ\circ^\circ$  という名付け方はできないから、 $\cos A$  を名付けたことで角 A を名付ける代用とする）



② 2辺夾角

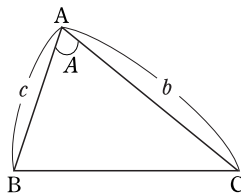
この場合、最もはやい名付け方は、まず余弦定理で、

$$BC = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$$

と名付け、次に正弦定理で、

$$\sin B = \frac{b}{BC} \sin A = \frac{b \sin A}{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}}$$

とする方法だろう。



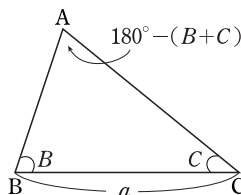
③ 2角夾辺

この場合、角 A は  $180^\circ (\pi)$  から  $(B+C)$  を引けば出る。

辺の長さは正弦定理で、

$$\begin{aligned} AC &= \frac{\sin B \cdot a}{\sin(180^\circ - (B+C))} \\ &= \frac{a \sin B}{\sin(B+C)} \end{aligned}$$

のように出すのがはやいだろう。



\* \* \*

上のように三角形の合同（決定）条件がわかれば、他の辺や角の大きさも表現可能である。表現のツールは、①の場合は余弦定理、③は正弦定理、②は場合によって併用ということになる。では、基本を押えた上で、かつての月刊「大学への数学」（以下、「大数」と略す）の日日の演習のコーナーにあった2題（Cランク…発展）に取りくんでもらおう。

**問題 1**

△ABCについて、AB=2、AC=3、角A=60°である。A、Cから対辺に下した垂線の交点をHとすると、CHの長さを求めよ。

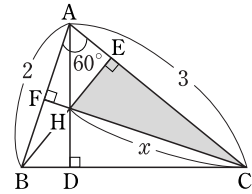
実はこの問題については、私はなぜこれがCランクなのだか当時はわかりかねたのだが、確かに基本を押さえずにやみくもに定理、公式のあてはめをすると、式がふくれあがる危険性はある。

**【解説】**

要するに図を描いて、未知の長さを  $x$  とおき、 $x$  を含む三角形を考えればよい。

Hは明らかに垂心だから、右図のようになり、

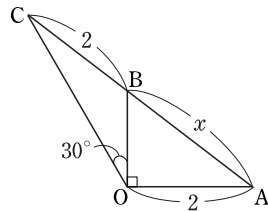
$$\begin{aligned} x &= \frac{CE}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}(AC - AE) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}(3 - 2\cos 60^\circ) = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \quad // \end{aligned}$$



まあ、このくらいは大数読者なら2、3分で片づけてほしいところだ。次は、ほんの少しだけ手強くなる。

**問題 2**

右図において、  
 $\angle BOC = 30^\circ$   
 $OA = BC = 2$   
 であるとき、 $AB^3$  を求めよ。



AB を  $x$  とおいて、 $x$  を含む等式（方程式）を立てれば何とかなるだろうというのが第一感だ。

$$\text{図で、} OB = \sqrt{x^2 - 4}, \sin \angle OBC = \sin(180^\circ - \angle OBA) = \sin \angle OBA = \frac{2}{x}$$

がわかれば（すぐ気づけば）、 $\triangle OBC$  の 3 辺 3 角のうち 2 辺、2 角の情報が集まったことになる。

三角形は原則として 6 つの「辺、角」のうち 3 つで決定されるから、4 つの情報だと 1 つ余っている。しかし、その分、「 $x$ 」という未知数があるから、この三角形で式を立てればよさそうだ。とりあえず、やってみよう。

**【解説(?) 1】**

$\triangle OBC$  に正弦定理を用いれば、

$$\frac{OC}{\sin \angle OBC} = \frac{2}{\sin 30^\circ} \text{ より、} OC = \frac{8}{x}$$

ここで、 $\triangle OBC$  に余弦定理を用いれば、

$$BC^2 = OB^2 + OC^2 - 2OB \cdot OC \cdot \cos 30^\circ$$

$$\therefore 4 = (\sqrt{x^2 - 4})^2 + \left(\frac{8}{x}\right)^2 - 2\sqrt{x^2 - 4} \cdot \frac{8}{x} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

.....

実は、ここから分母を払って、 $\sqrt{\quad}$  を 2 乗しだしたりすると、式が大変にふくれあがる（かなりの諸君の手に負えないだろうし私もやりたくない）。

原因は、 $OB = \sqrt{x^2 - 4}$  を計算（立式）の中に入れてしまったことにある。

そこで  $OB$  を含まない「決定される三角形」をさがしてみよう。すると、 $\triangle OAC$  全体が適していそうなことがわかる。そこで改めて解説だ。

**【解説 2】**

$OC = \frac{8}{x}$  としたあと  $\triangle OAC$  に余弦定理を用いる。

$$AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2OA \cdot OC \cos 120^\circ$$

$$\therefore (x+2)^2 = 4 + \frac{64}{x^2} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{8}{x} \cdot \frac{1}{2}$$

これを整理すると（両辺に  $x^2$  をかけて移項）

$$x^4 + 4x^3 - 16x - 64 = 0$$

$$\therefore x^3(x+4) - 16(x+4) = 0 \quad \therefore (x^3 - 16)(x+4) = 0$$

ここで  $x+4 > 0$  だから、 $x^3 = 16$

\*                     \*                     \*



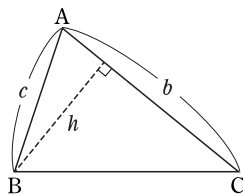
難しいもので、「正しいことをしている」からスッと答えが出るとは限らないのだ。解法にまちがいはないのに式変形の迷路にはまる危険性を、この1題もまたよく表しているといえるだろう。

### 3. 面積の表現

三角形には、「辺の長さ」「角の大きさ」以外にもう1つ重要な量がある。それは面積だ。

右図で  $\triangle ABC$  の面積を  $S$  と表すことにすると、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}b(c\sin A) \\ &= \frac{1}{2}bc\sin A \end{aligned}$$



となる。図は  $\triangle ABC$  が鋭角三角形の場合だが、もちろん角  $A$  が鈍角の場合にもこの式は通用する。

つまり、2辺夾角が与えられたとき、その三角形の面積はあっさり表現できる（名付け得る）わけだ。

このように、「面積にも名前を与えた」ことがどのような効果をもたらすのだろうか？

そこで、有名な「ヘロンの公式」を導いてみよう。

#### 問題 3

三角形  $ABC$  について、

$$BC=a, CA=b, AB=c, s = \frac{a+b+c}{2}, \text{ 三角形 } ABC \text{ の面積を } S$$

とおくことにする。

このとき、

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

であることを示せ。

この公式はきれいだ。周の長さを  $2s$  とするとき、面積が  $s$  と、それから3辺各々を引いた数、合計4つの積のルートになっているなんて、これほど自明でなく、しかも覚えやすいシンプルな公式があるだろうか？

ところが、「形がシンプルなのだからシンプルな証明があるはず」と思って初等幾何（中学生までの方法）だけでこれを証明しようとするの大変だ。補助線、補助円を用いたテクニカルな方法になってしまう。

しかるに、これを三角比で扱えば計算は多少ゴツいものの一本道で解決する（実はもっとスゴいやり方もある… §6 問題3 参照）。

**【解説】**

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

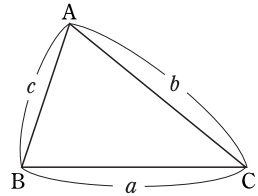
余弦定理より、

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\text{よって } \sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2}$$

これを①に代入して、 $bc = \sqrt{b^2c^2}$  とすれば

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{\{2bc + (b^2 + c^2 - a^2)\} \{2bc - (b^2 + c^2 - a^2)\}}{16}} \\ &= \sqrt{\frac{\{(b+c)^2 - a^2\} \{a^2 - (b-c)^2\}}{16}} \\ &= \sqrt{\frac{b+c+a}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{a+c-b}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}} \\ &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \end{aligned}$$



このように、因数分解による多少の式変形だけで、ヘロンの公式が導かれてしまう。これが、三角比を導入して、“名無しの権兵衛”たちに名前をつけてあげた効用なのだ。

**4. 面積についての立式**

問題を作る立場から言えば、実は三角比オンリーで難しい問題を作るのはなかなか難しい。

なぜなら、一旦“名無しの権兵衛さん”たちが名前を与えられて活躍し出すと、初等幾何では難問だったような問題も、「立式したあとは単なる計算問題」に変わってしまうことが多いからだ。

## あとがき

三角比や三角関数は、ともかく「面白い」分野だ。だが、「面白い」と私が言うのと、大抵の受験生は辟易し「この人、何か特殊なんじゃないの？」とさえ思うようだ(笑)。

真面目に言うところ、一般の受験生が数学に面白さを感じない理由はいろいろあるが、なかでも三角関数には次のような理由で親しみを感じない人が多い。

(その1) やたら公式が多く、意味が分からん。

(その2) 教科書では細切れの扱いなのに、入試になると途端に高度な融合問題になる、いったいこれは何なの？何かあるの？

いやいや、細かく語りだせば、深い話になります(苦笑)。でも、やりだせば

本当に面白い分野なんです…

と言いつけておいて…

いきなり一般論に飛ぶが、面白さを感じないことには、だれも熱中なんてしないものだ。

でも面白さを感じるには、それなりの素養がいる。また教える側の工夫もいる。面白さを感じている人と、「数学なんてつまらない」と義務感でやっている人では、おそらく、見えている数学の「景色」はまったく違うものなのだ。

それでは、多少難しくとも皆さんが「よい景色」を眺めることができるようになる手助けをする参考書になりますように。

こういう願いを込めて私は本書を執筆した。

最後になるが、本書を出版してくださった東京出版の黒木社長と、編集を担当してくださった坪田様、飯島様にこの場を借りて感謝したいと思います。

## 難関大入試数学・発展していく三角関数

平成31年3月25日 第1版第1刷発行

定価はカバーに表示してあります。

著者 栗田哲也

発行者 黒木美左雄

発行所 株式会社 東京出版

〒150-0012 東京都渋谷区広尾3-12-7

電話 03-3407-3387 振替 00160-7-5286

<http://www.tokyo-s.jp/>

整版所 錦美堂整版株式会社

印刷所 株式会社光陽メディア

製本所 株式会社技秀堂製本所

落丁・乱丁本がございましたら、送料小社負担にてお取替えいたします。