まえがき

これからの数学で重要になるキーワードは？

「活用」である．

数学が，定量的なものから定性的なものに変わる，とも言えるかも知れない．厳密な論証による正しい数学が不要になるわけではないが，実用面では正確な数値は必要なく近似で十分事足りることが多い．円周率を“およそ3”とするのは極端であるが，「評価」という感覚は必要になろう．

また，一般的な解法のみに頼るのではなく，個別の問題に対して最適な解法を選択することも必要になる．問題の個性を感じ取り，必要な情報のみを抽出するのである．

一方で，数学概念の深い理解も求められる．数学を表現するのには「数式」「日本語」「図」という３つの形態がある．それらを自由に行き来しながら概念を正確にイメージでき，言語化できることが必要になる．

問題と解答を１対１対応させるような「知識・技能」重視の数学教育は終わりを迎える．また，数学的厳密性を重視し過ぎて生徒を置き去りにすることも許されない．生きていくための「思考力・判断力・表現力」の育成を意識しなければならない．

本書は，「解法を定着させる」というこれまでの数学参考書・問題集とはまったく違う思想に基づいている．「活用」をキーワードに，「難しくはないが答えにくい問題」を取り上げている．表面的な問題ではなく，数学を深く理解し，正しくイメージできていないと考えられない問題ばかりである．

「思考力・判断力・表現力」を発揮するための流れは

【題意を明確化，論点を抽出】
↓
【議論に必要な情報収集】
↓
【正しい推論，論証】

である.「基本解法の中から使えるものを探す」というこれまでの数学とは頭の使い方が違う．道具頼りのこれまでの数学ではなく，工夫することが必要になるような数学である．ずる賢さも求められる．問題を型にはめるのではなく，問題に合う型を自ら作り出す.

新しい時代に向けて，そんな問題集を作りたい.

それが本書に込めた思いである.

既存問題集にあるような問題は掲載していない．数学 IA の知識で思考できる範囲で問題を作っているが，一部，数学 IIB の内容も含まれることを注意しておく.

各章は，基本概念の列挙，問題，解答解説からなる．問題は 1 人で考えても良いし, 仲間と一緒に考えても良い．解答解説を見る前に, あぁだこぉだと考えてもらいたい．解答解説に先立って問題を考えるためのヒントを挙げているものもあるので，そちらも参照しながら考えてもらいたい．そうして確認のために解答解説を読んでもらいたい.

「答えを見て丸暗記」という使い方はしないでもらいたい．「どうしてこんな風に考えるのか？」「自分はどうやったらこう考えられるか？」と自問自答してもらいたい．そのヒントとなるように，解説は思考部分を重視している．

数学を道具として，また現象として，正しくイメージできるようになってもらいたい．身に付けてもらいたいイメージについてもできるだけ詳しく解説する．

高校生にとって新しい数学は，定期テストでさえ暗記で乗り切れないから，既存の感覚では苦しいものになるかも知れない．しかし，自分で考える自由度が増し，楽しさを感じることができるものになる．

勉強はつらい反復だけではなく，問題を自分で解決する楽しいものである．本書を通じてそれを感じてくれる人がいたら，この上ない喜びである．

数学を通じて「思考力・判断力・表現力」を磨いていこう！

研伸館数学科
吉田　信夫

目　次

1 数学Ⅰ－①: 数と式・集合と命題

数学Ⅰ－①:「数と式・集合と命題」で扱う概念は

□式の計算

・計算法則　・指数法則　・展開，因数分解

□実数

・有理数，無理数　・絶対値　・根号

□1次不等式

□集合

・ド・モルガンの法則

□命題と条件

・否定　・必要，十分条件

□命題と証明

・逆，対偶，裏　・背理法

である．

数学をやる上で基本的な概念ばかりである．特に命題，集合，背理法などは，論理性強化のために重要である．本書では特にこの部分を扱っていきたい．

問題

問題 1-1

次の計算は正しいか？次の ① ～ ③ から正しいものを選べ.

① 必ず正しい

② 必ず正しくない

③ 正しいときと正しくないときがある

さらに，② の場合は必ず正しくなるように書き改めよ．③ の場合はどういう a のときに正しいかを答えよ.

ただし，a としては左辺が定義されるもののみを考える.

(1) $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$　　　(2) $\sqrt{(a)^2} = a$

問題 1-2

A，B，C の三人が互いの身長について話している．A は「最も背が高いのは B ではない」と言うと，B は「最も背が高いのは C である」と言い返し，C は「私が最も背が高い」と主張した.

ところで，最も背が高い人はただ一人であり，その人だけが真実を言うと仮定しよう．このとき，最も背が高い人は誰か答えよ.

問題 1-3

U を全体集合とする．2 つの集合 P，Q において，通常は

$$\overline{P \cup Q} = \overline{P} \cup \overline{Q}$$

は成り立たない．これが成り立つような集合 P，Q の例を挙げよ.

問題 1-4

「矛盾」とは,「p であり, かつ, p でない」が成り立つことをいう.

$\boxed{}$ に入れると矛盾になるものを, 選択肢の中からすべて選べ.

① x は実数　② x は無理数　③ x は整数

④ $x \leqq 0$　⑤ x は負の数　⑥ $x < 2$

⑦ $x = 3$　⑧ $x = \sqrt{2}$　⑨ $x = -2$

(1) x は有理数であり, かつ, $\boxed{}$ である.

(2) x は正であり, かつ, $\boxed{}$ である.

問題 1-5

「背理法」とはどのような証明方法か. 自分の言葉で, 簡潔に説明せよ.

問題 1-6

整数 n に関する命題「n が 4 の倍数であるならば, n は偶数である」を証明したいとする. そのために次の各証明方法において, 何を示せば良いかを説明せよ.

(1) 対偶との真偽が一致することを利用して証明する.

(2) 背理法で証明する.

解答・解説

問題 1-1

次の計算は正しいか？次の ① ～ ③ から正しいものを選べ.

① 必ず正しい

② 必ず正しくない

③ 正しいときと正しくないときがある

さらに，② の場合は必ず正しくなるように書き改めよ．③ の場合はどういう a のときに正しいかを答えよ.

ただし，a としては左辺が定義されるもののみを考える.

(1) $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$　　　(2) $\sqrt{(a)^2} = a$

【解答・解説】

平方根とは何であるかを思い出そう.

実数の範囲で平方根を考えることができるのは，0 以上の数だけである．つまり，$\sqrt{a}$ が定義されるのは $a \geqq 0$ のときだけである．$a < 0$ のときは $\sqrt{a}$ は考えない (数学Ⅱで虚数を考えるときも，$\sqrt{-1}$ でなく i と書く).

平方根は $x^2 = a$ を満たす x のことで，そのうち 0 以上の数が $\sqrt{a}$ である．負の平方根もあって，それが $-\sqrt{a}$ である．ただし，$a = 0$ の場合は少し違う．もちろん，$x^2 = 0$ を満たすのは $x = 0$ のみだから，

$$\sqrt{0} = 0 \quad \therefore \quad -\sqrt{0} = 0$$

$\sqrt{\ }$ の中身は，(1) では a であり，(2) では a^2 である．$\sqrt{\ }$ が定義される条件は，(1) では $a \geqq 0$ であるが，(2) では「a はすべての実数」である.

(1) を考えよう．そもそもの $\sqrt{\ }$ の定義から，$\sqrt{a}$ は「$x^2 = a$ を満たす x のうち 0 以上の数」であるから，(1) の式は必ず成り立つ（①).

一方，(2) の $\sqrt{(a)^2}$ は「$x^2 = a^2$ を満たす x のうち 0 以上の数」である．a^2 は 0 以上であるが，a は 0 以上とは限らない．$\sqrt{(a)^2} \geqq 0$ だから，a が 0 以上のときは

$$\sqrt{(a)^2} = a$$

となるが，a が負 $(a<0)$ のときは

$$\sqrt{(a)^2}=-a$$

となる．場合分けしなければ答えられないので，(2) の式は成り立つときと成り立たないときがある（③）．③ になったので，(2) の式が成り立つのがどういうときか考えると，それは「$a \geqq 0$」である．

以上から，以下のようにまとめることができる．

$$\sqrt{(a)^2}=\begin{cases} a & (a \geqq 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$$

■

※ $$\sqrt{(a)^2}=|a| \quad \left(例えば \sqrt{(-2)^2}=\sqrt{4}=2=|-2|\right)$$

である．ここで，1 つ追加問題．

$$|a|=\begin{cases} a & (a \geqq 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$$

であるが，これを $|a|=\pm a$ と書く人がいる．これは許されるだろうか？

結論としては，解釈が分かれる可能性があるから「このように書くべきではない」である．

$x^2=4$ を解くと $x=\pm 2$ である．2 も -2 も解である．「x は 2 または -2」であるが，どちらの値も x になりうる．

一方，$|2|=2$ であって，$|2|=-2$ ではないから，「または」であっても「どちらも $|2|$ になりうる」ではない．

$$|-2|=2=-(-2)$$

は $|a|=-a$ となる a の例であるが，$|-2|=\pm(-2)$ ではない．

ということで，$|a|=\pm a$ とは書くべきではない．「場合分けを省略」のような使い方で $|a|=\pm a$ と書かないこと．

※　本問の解答解説では，「数式と日本語」を意識した．「a は正」と書かれた場合と「$a>0$」と書かれた場合で感じ方は違うだろうか？数学的な読み取りが苦手な人は，「数式と日本語」の変換を心がけよう．そこに「図」の状態も合わせて，3 つの状態を行き来することが重要である．

問題 1-2

A，B，C の三人が互いの身長について話している．A は「最も背が高いのは B ではない」と言うと，B は「最も背が高いのは C である」と言い返し，C は「私が最も背が高い」と主張した．

ところで，最も背が高い人はただ一人であり，その人だけが真実を言うと仮定しよう．このとき，最も背が高い人は誰か答えよ．

【ヒント】

「最も背が高い」=「真実を述べる」である．パッとは分からないので，一人ずつ考えていこう．「●が最も背が高いと仮定すると…」を 3 回繰り返せば特定できるはずである．

この観点がなかった人は，改めて考えてみよう！

【解答・解説】

A が最も背が高いと仮定すると，A だけが真実を言う．実際，A は真実を言っており，B と C は嘘を言っているので，条件を満たす．

B が最も背が高いと仮定すると，B だけが真実を言う．しかし，B が嘘を言っていることになり，条件に矛盾する．

C が最も背が高いと仮定すると，C だけが真実を言う．しかし，B が真実を言っているから，条件に矛盾する．

よって，最も背が高いのは A である．

■

※ 「A が最も背が高いと仮定すると，A だけが真実を言う．実際，A は真実を言っており，B と C は嘘を言っているので，条件を満たす．」で終わってはならない．他の場合も矛盾が起きなかったら，問題が不成立となるからである．そうではないことを確認して完結となる．

「問題は正しいもの」というのが暗黙の了解ではあるが，出題ミスも存在するので，可能な場合は，しっかり確認する方が良い．

問題 1-3

U を全体集合とする．2 つの集合 P，Q において，通常は

$$\overline{P\cup Q}=\overline{P}\cup\overline{Q}$$

は成り立たない．これが成り立つような集合 P，Q の例を挙げよ．

【ヒント】

普通でない状況を考えるには，「普通ならどうなるか？」を考えて，それとの違いを考察すると良い．具体的に例を 1 つ挙げるだけで良いので，難しく考えすぎないこと！

この観点がなかった人は，改めて考えてみよう！

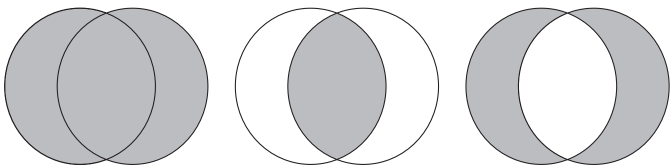
【解答・解説】

必ず成り立つのは「$\overline{P \cup Q}=\overline{P} \cap \overline{Q}$」であるから，ここでは

$$\overline{P} \cap \overline{Q}=\overline{P} \cup \overline{Q}$$

となる集合を考える．直感的には，$\overline{P}=\overline{Q}$ である．一般論で確認しよう．

$$A \cup B \quad = \quad (A \cap B) \quad \cup \quad (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$$



が成り立つので，$A \cap B=A \cup B$ となるのは

$$A \cap \overline{B} = \varnothing \quad \text{かつ} \quad \overline{A} \cap B=\varnothing$$

$$\therefore \quad A \subset B \quad \text{かつ} \quad B \subset A \quad \text{つまり}\ A=B$$

となるときである．これで確認できた．

$\overline{P}=\overline{Q}$ は $P=Q$ ということなので，P と Q と同じ集合にすれば良い．

■

【解答例】

$P=Q=\{1,\ 2,\ 3\}$

問題 1-4

「矛盾」とは，「p であり，かつ，p でない」が成り立つことをいう．

$\boxed{}$ に入れると矛盾になるものを，選択肢の中からすべて選べ．

① x は実数	② x は無理数	③ x は整数
④ $x \leqq 0$	⑤ x は負の数	⑥ $x < 2$
⑦ $x = 3$	⑧ $x = -\sqrt{2}$	⑨ $x = 0$

(1)　x は有理数であり，かつ，$\boxed{}$ である．

(2)　x は正であり，かつ，$\boxed{}$ である．

【ヒント】

矛盾の定義に従うと，□の前にある言葉の否定を選べば良いが，他にも考えられる．前に書かれた条件と両立しないものなら何でも良い．

この観点がなかった人は，改めて考えてみよう！

【解答】

(1)　②，⑧　　　　(2)　④，⑤，⑧，⑨

■

※　例えば，

$$x = 1 \quad \text{かつ} \quad x = 2$$

は，「$x = 2 \Rightarrow x \neq 1$」より，

$$x = 1 \quad \text{かつ} \quad x \neq 1$$

を導くことができる．よって，「$x = 1$　かつ　$x = 2$」でも矛盾になっている．

(1) は「x は無理数」を導ける条件を選べば良い．(2) は「x は 0 以下」でも良いし，それを導ける条件を選んでも良い．

問題 1-5
「背理法」とはどのような証明方法か．自分の言葉で，簡潔に説明せよ．

【解答例】

命題を否定すると矛盾が起こることを導いて，間接的にその命題が真であることを示す証明方法．

■

※ 数学的な概念は，数式で覚えるのではなく，言語化できていると忘れたときにも思い出しやすい．色々な概念を日本語で説明できるようになると，数学は得意になる．普段から心がけよう．

※ 「$\sqrt{2}$ が無理数である」を示すには…

「$\sqrt{2}$ が無理数でない」つまり，有理数であると仮定して矛盾を導く．
有理数は既約分数で表すことができる．つまり，

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad (p \text{ と } q \text{ は互いに素な自然数})$$

とおける．すると $q\sqrt{2} = p$ で，両辺を 2 乗すると

$$2q^2 = p^2 \quad \cdots\cdots \quad (*)$$

となる．p^2 は偶数であることが分かるので，p は偶数である．

すると，$p = 2P$ (P は自然数) とおけて，これを $(*)$ に代入すると

$$2q^2 = 4P^2 \quad \therefore \quad q^2 = 2P^2$$

である．q^2 は偶数であることが分かるので，q は偶数である．

これで，p も q も偶数であることが分かった．

p と q は互いに素と仮定していたので，矛盾である．

よって，「$\sqrt{2}$ が無理数でない」というのが誤りで，「$\sqrt{2}$ が無理数である」ことが証明できた．

問題 1-6

整数 n に関する命題「n が 4 の倍数であるならば，n は偶数である」を証明したいとする．そのために次の各証明方法において，何を示せば良いかを説明せよ．

(1) 対偶との真偽が一致することを利用して証明する．

(2) 背理法で証明する．

【ヒント】

「$p \Rightarrow q$」を証明するとき，「対偶を利用する」と「背理法」は違いが分かりにくい．違いを明確にせずに両者をごっちゃにしたような証明をしてしまうと，0 点になってしまうから注意しなければならない．

対偶で考える場合は，元の命題「$p \Rightarrow q$」と対偶命題「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$」の真偽が一致することを利用する．

背理法では，“「$p \Rightarrow q$」が偽”と仮定して矛盾を導く．“「$p \Rightarrow q$」が偽”はどういう意味だっただろうか？「反例が存在する」であった．反例とは何だったか？

この観点がなかった人は，改めて考えてみよう！

【解答例】

(1) 対偶命題：「n が奇数であるならば，n は 4 の倍数ではない」を証明する．

(2) 「n が 4 の倍数であるならば，n は偶数である」が偽であると仮定，つまり，「4 の倍数であり，かつ，偶数でないものが存在する」と仮定して，矛盾を導く．

■

※ 「n が 4 の倍数であるならば，n は偶数である」とは，「4 の倍数は例外無くすべて偶数である」ということ．否定したら，「反例が存在する」である．

あとがき

これまでの数学とこれからの数学は大きく異なる.

数学が苦手な人にとって，基本知識の定着，繰り返し学習と，苦行でしかなかった数学の勉強．正しいイメージ付けを重視し，現象として定性的に数学を捉えられることが，これからの数学学習で重視されなければならない.

本書は，そのことを伝える問題集として作成した.

頭を使わないと答えられないよう，引っかけ問題を作ったり，嫌がらせの要素もふんだんに盛り込んだ.

また，数学概念のイメージを身をもって実感してもらうような問題も入れた.

何度も繰り返し解いて定着させるような問題集ではないが，嫌がらせ対応モードで数学に接する機会は少ないので，忘れたころに解き直してもらえるのは良いことだ．その際も，できるだけ記憶を頼りにせず，よく問題を読んで，慎重に判断し，正しく推論してもらいたい.

本書が新時代の高校数学の 1 つの基準となれば，筆者として嬉しく思う.

本書の作成にあたり，東京出版の飯島康之さん，坪田三千雄さんには企画から内容の吟味までお世話になりました．また，(株)アップの新井直也先生，今村朗先生には貴重なアドバイスをいただきました．研伸館中学生課程・高校生課程数学科の原田政明先生，三本聖先生には原稿段階から詳しくみていただき，感謝しております．これまで関わったすべての方々に感謝申し上げ, 本書を捧げます．ありがとうございました.

研伸館（けんしんかん）

1978 年，株式会社アップ (http://www.up−edu.com) の大学受験予備校部門として発足 (兵庫県西宮市).

東大・京大・阪大・神戸大などの難関国公立大学や早慶関関同立などの難関私立へ毎年多くの合格者を輩出する現役高校生対象の予備校として，関西地区で圧倒的な支持を得ている.

http://www.kenshinkan.net

著者紹介：

吉田　信夫（よしだ・のぶお）

1977 年　広島で生まれる

1999 年　大阪大学理学部数学科卒業

2001 年　大阪大学大学院理学研究科数学専攻修士課程修了

2001 年より，研伸館にて，主に東大・京大・医学部などを志望する中高生への大学受験数学を担当し，灘校の生徒を多数指導する．そのかたわら,「大学への数学」などの雑誌での執筆活動も精力的に行う.

著書『複素解析の神秘性』(現代数学社 2011),『ユークリッド原論を読み解く』(技術評論社 2014),『超有名進学校生の数学的発想力』(技術評論社 2018) など多数.

ほぼ計算不要の

思考力・判断力・表現力トレーニング 数学ⅠＡ

平成30年11月10日　第１刷発行

著　者　吉田　信夫
発行者　黒木美左雄
発行所　株式会社 東京出版
〒150-0012 東京都渋谷区広尾3-12-7
電話：03-3407-3387　振替：00160-7-5286
http://www.tokyo-s.jp/

印刷所　株式会社 光陽メディア
製本所　株式会社 技秀堂
落丁・乱丁本がございましたら，送料弊社負担にてお取り替えいたします．

(定価はカバーに表示してあります)
ISBN978-4-88742-239-1