はじめに

本書は 2011 年度に私が「大学への数学」に連載した雑誌記事「方針の立て方」に，若干の変更を加えてまとめたものです．

この本を手に取っていただいた方のために，本書の性格について，説明しておきましょう．

1. 大切なのは問題を見てから初めの 5 分

まず最初にたとえ話をしましょう．体力のある人が，東京から関西に歩いて旅をしたいと思ったとする．その時に一番大切なことは何か．

まあ，ギャグと思って聞いてもらうと，それは北や南に向かって驀進しないことです．それをしたら，いくら体力自慢でも，目的地にはたどり着けません．

ところが，数学の問題を解く際は沢山いるんだな，こういう人が．

多分この解法だろうと見当をつけたあとは，確かめもしないでやみくもに式をいじりまわしたりして沈没する．それも結構できる人にもそういう人は多いようです．

つまり，数学でもまず最初にどちらの方向に走り出すか，つまり方針の立て方を学ぶことが大切です．

2. 本書の性格

では，問題を見てあらぬ方向に走り出したり，うーんとうなったきり坐りこまないようにするにはどうしたらよいか．

もちろんある程度の「知識」はないといけません．でも数学は「応用」の教科ですから，それだけではだめです．

やみくもに問題を解いている人を観察すると，その人たちは「基本的な手筋に問題を帰着する」つまり，「この問題の本質（正体）は何だろう？」と考え，問題を解きやすい形に言い換える習慣がないように思います．だから基本的な操作をすればよい問題でも，味付けを施されると，わけのわからない難問に見えてしまう．

本書はそういうちょっと難し目の問題（難関校の味付けの濃い問題）に悩んでいる人たちに文字通り「方針の立て方」「言いかえの方法」「目のつけ所」などちょっとしたコツを具体例に即して講義しますといったタイプの本です．

本書の利用法

「はじめに」にも書いたように本書は，「方針の立て方」に特化して書いた本です．問題の方針だけ示したり，計算を（難しいものは途中も示してありますが）＝…＝，という具合に，…で飛ばしたりしている箇所もあります．

逆になぜそのような解法を取るのか，とか「発想」の部分については他書より詳しいのではないかと思います．

したがって，次のような使い方が考えられる使い方の例です．列挙しましょう．

1．難関大学（数学で思考力・発想力をかなり要求する大学）を受験する高校 3 年生，浪人生（つまり一通りの分野別学習が終わった受験生）が，夏休みあたりに取り組む．

その際は，まず問題を読んで，読み終わった後に 5 分ほどあれこれ考えて，どのような方針を予想したか，その後の展開をどのように予測したか，それを自分で意識した後で，解説を読んでください．

2．難関校を受ける受験生で，「整数」「空間図形」や，難関校によく使われる「ネタ」をいくつか学習したい人が必要に応じた時期に取り組む．

その際は，問題を制限時間 15 分から 20 分くらいでやってみて，どこまで自分の実力で通用したかを確認してから解説を読んでください．

いずれにせよ，本書は「基本は知識としてはわかっているはず」「公式を，単にあてはめただけでは応用問題は解けないなあ」「解説を読むと何だかあっけないのに，なぜ自分には発想ができないのだろう」「東大や京大の問題は背景を知らないと解けないんじゃないの」等々と思っている人が，自力で考えることができるようにとの願いから書いた本です．したがって，問題に接したとき筆者がどんな前提を頭の中に持っていて，その前提からどのようなことを考えていくかの過程を，天下り式の「答案」ではなく，「解説」してあります．問題を解いて，あっていたか間違っていたか，知識があったかなかったかをチェックするようなタイプの利用法ではなく，じっくりと腰を据えて読む必要があると思います．

本書で用いる記号について：

＝…＝　単純計算の省略

⇨**注**　初心者のための注意事項．

⇨**注**　すべての人のための注意事項．

➡**注**　意欲的な人のための注意事項．

大学への数学

難関大入試数学・方針をどう立てるか

▶栗田 哲也　著◀

CONTENTS

はじめに			1
本書の利用法			2
§1	素数・互いに素	ー整数,数列ー	4
§2	$_nC_r$ の素因数・公約数	ー整数ー	16
§3	2001年～2010年の整数問題	ー整数ー	26
§4	整式についての証明問題	ー整式ー	36
§5	論理・発想の冴え	ー図形,ベクトル,整数,微積分ー	46
§6	一度は経験しておきたい方法	ー整数,論証,数列,図形ー	56
§7	図形が背景にある問題	ー座標,三角関数,図形,ベクトルー	66
§8	体積を求める（1）	ー空間座標,積分ー	76
§9	体積を求める（2）	ー空間座標,積分ー	86
§10	体積を求める（3）	ー空間座標,積分ー	96
§11	図形問題と手法の選択	ー図形,三角関数ー	108
§12	難問の学習方法	ー数列,極限,ベクトルー	118
あとがき			128

§1　素数・互いに素

難関校（旧帝大系７校（北大，東北大，東大，名大，京大，阪大，九大），東工大＆早慶の理工）の理系の問題を 1996 年〜2010 年の 15 年分解き直してみました．その結果，まず第１に感じたのは「意外なほど似た問題が多いなあ」ということです．

同じような発想法，ルーツの問題が手を変え品を変え出題されている……

しかし，よく考えてみると，これは当然です．大学の先生（出題者側）は，いわゆる“良問”を出そうとして，背景のしっかりしたタネ（ネタ？）を用意して，それに味付けをします．良質な背景をもち，しかも高校生でも計算でくらいつけるものは限られていますから，そうしたタネはそう沢山はありません．

ところで，これはパターン問題なのでしょうか？

実は受験生の側から見れば，“味付け”が少なければ，このような問題はパターン問題に見えます．しかし，少し“味付け”が濃かったり，斬新な形で出題されると，パターンは全く見えなくなります．そのような問題を世間では「思考力の必要な応用問題」と呼んでいます．

では，このような“濃厚な味”の問題への対処法は何でしょうか．

結論をいえば，「最初の５分間」が大切です．最初の５分間とは問題文をよく読んで，方針を立て，味付けの背後にある本質を探り出そうとする時間です．これがうまくできれば，難関校の入試といえどおそるるに足りません．

そこで，ここではズバリ「方針の立て方」を扱います．本書を読む人は，問題を最後まで解くことより，「最初の５分でうまく方針が立てられたかどうか」に焦点をしぼってチェックしてください．

なお，解説も，単に問題を解くというよりは，「方針をどう立てるか」「なぜその方針を選ぶのか」「問題の背景や本質はどこにあるのか」ということに特化していきたいと考えています．

前置きが長くなりましたが，早速問題にあたっていきましょう．今回のテーマは「素」ということです．

1．素数の扱い方

まずは軽目のカワイイ問題から．

問題 1

2 以上の自然数 n に対し，n と n^2+2 がともに素数になるのは $n=3$ の場合に限ることを示せ．

（京大・理系）

≪方針の立て方≫

小さい値で実験すると，規則性がつかめるのではないかと予想し，$n=2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$ くらいまで計算してみます．

n	2	4	5	6	7	8	9
n^2+2	6	18	27	38	51	66	83

【解説】

上の表をよく眺めると，○印はすべて 3 の倍数です．

ここまで来たら，ピンとひらめかなくてはいけません．

① n が 3 の倍数のときは，上表の上段が 3 の倍数です．

② $n=3m\pm1$（3 の倍数ではないとき）のときは

$$n^2+2=(3m\pm1)^2+2=9m^2\pm6m+3$$

つまり下段が 3 の倍数です．

ところで，3 の倍数は，3 自体を除けば素数ではありませんから，$n=3$（n^2+2 は 11）のときのみ，上段，下段の数がともに素数になるわけです．

＊　　＊　　＊

実験をすると，「n を 3 で割った余りによる分類」即ち「特定の整数での剰余で分類する」という問題の本質が浮かびあがってくるわけです．

これはカワイイ問題でしたが，次はコワイ問題です．まず 5 分間は必死に方針を考えてみましょう．

問題 2

p を 3 以上の素数とする．4 個の整数 a，b，c，d が次の 3 条件

$a+b+c+d=0$ ……………………………………………………①

$ad-bc+p=0$ ……………………………………………………②

$a \geqq b \geqq c \geqq d$ ……………………………………………………③

を満たすとき，a，b，c，d を p を用いて表せ．

（京大・理系）

≪方針の立て方≫

①から 1 文字は消去できます（ある特定の文字について解き他式に代入すればよい）．

②は $p=$…… の形になりますが，そこで

素数 $p=A\times B$ のとき，A または B の絶対値が 1

というよくある手法を使うことになるのでしょう．とすれば，①を 1 文字について解き，それを②に代入して「$ad-bc$ を因数分解」というところまでは，まず方針が立つはずです．

【解説】

①より，$a=-(b+c+d)$ を②に代入して整理すると，

$$p=(b+d)(c+d)$$

$b \geqq c$ より，$b+d \geqq c+d$ で，p は素数だから，

$$\begin{cases} b+d=p \\ c+d=1 \end{cases} \cdots\cdots④ \quad \text{または} \quad \begin{cases} b+d=-1 \\ c+d=-p \end{cases} \cdots\cdots⑤$$

* * *

ここまでは手慣れた人なら，すぐにできます．ところが，ここでハタと行きづまる人も多いはず．もう 1 度，以降の方針を立て直さねばなりません．

≪再び方針を立てる≫

④を元の①と見くらべてみると，$a+c=-p$ になることがわかります．

ここで，「③より $a \geqq b$，$c \geqq d$ なのに，$a+c$ がマイナスで $b+d$ がプラスなんてことはない」と気づくことが大切です．

すると，残る可能性は⑤だけですが，ここで根本的に考えなければならないことは次の通り．

■①と⑤より，a〜d の4文字（p は定数）について，3つしか式が立っていない．式の数が文字の数より少ないから，この連立方程式は基本的には解けない．それなのに a〜d を p で表せるということは，③の不等式から，範囲をしぼりこまなければならないということだナ……

そこで再び解説です．

【解説】

a，b，c を d の式で表すことを考える．①と⑤より

$a=d+1+p$，$b=-1-d$，$c=-p-d$

これらを不等式③に代入すると，

$$d+1+p \geqq -1-d \geqq -p-d \geqq d \quad \cdots\cdots⑥$$

⑥を d について解くと，

$$-p-2 \leqq 2d \leqq -p$$

ここで，p は3以上の素数だから奇数であり，

$$2d=-p-1$$

と決定される（$2d$ は偶数）．

よって，$d=\dfrac{-p-1}{2}$ であり，あとはイモづる式に

$$\boldsymbol{a=\frac{p+1}{2},\ b=\frac{p-1}{2},\ c=\frac{1-p}{2},\ d=\frac{-p-1}{2}}$$

2．事前の研究があるとなしでは大違い

次の問題はかなり難しいと思います．方針がおぼろげながらでも立ったら，かなりの実力でしょう．

問題3

正の整数 a に対し，a の正の約数全体の和を $f(a)$ で表す．

正の偶数 a，b はある整数 m，n（$m, n \geqq 1$）と，ある奇数 r，s を用いて $a=2^m r$，$b=2^n s$ のように表すことができる．このとき，a，b が

$$f(a)=2b \quad かつ \quad f(b)=2a$$

をみたせば，r，s は素数であることを示せ．

（九州大／一部省略）

枝問など省略したので，原題より厳しくなりました．しかし，このようにシンプルな形にした方が，方針の立てがいもあるというものです．

問題の方針を立てる前に一つ質問です．君は「約数の和」について，どんな“知識”をもっていますか？

最低，次の 2 つくらいは知っておいた方がよいですよ．

Ⅰ　素因数分解したとき，$a=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots$ となる数 a に対し，

$$f(a)=(1+p_1+\cdots+p_1^{k_1})(1+p_2+\cdots+p_2^{k_2})\cdots$$

Ⅱ　（Ⅰから容易にわかることだが）

$a=pq$（p と q は互いに素）とするとき，

$$f(a)=f(p)f(q)$$

（このⅡを関数 f の乗法的性質といいます）

では，Ⅰ，Ⅱの下で方針を立ててみましょう．

≪方針の立て方≫

$$f(a)=2b \Longleftrightarrow f(2^m r)=2^{n+1}s$$

$$\Longleftrightarrow f(2^m)f(r)=2^{n+1}s \quad (\leftarrow \text{Ⅱより})$$

ここで，$f(2^m)=1+2+\cdots+2^m=2^{m+1}-1$ を用いて，

$$(2^{m+1}-1)f(r)=2^{n+1}s \cdots\cdots ①$$

同様に $(2^{n+1}-1)f(s)=2^{m+1}r$ ……②

こうしてから，①，②を眺めます．ここが，方針を立てる大切な時間です．

すると，$2^{m+1}-1$ と 2^{n+1} が互いに素であることから，

$$f(r)=2^{n+1}k_1,\ s=(2^{m+1}-1)k_1\ (k_1 \text{ は奇数})$$

とおくことができ，同様に，

$$f(s)=2^{m+1}k_2,\ r=(2^{n+1}-1)k_2\ (k_2 \text{ は奇数})$$

とおけます．

ここで，r，s が素数 $\Longleftrightarrow f(r)=r+1,\ f(s)=s+1$

なので，まず $k_1=1$，$k_2=1$ を示すことが目標になりそうです（となると，不等式で絞るか，k_1，k_2 が素因数をもつと矛盾することを示すか… そういった連想も大切ですね）．

また，①と②が“r と s，m と n を交換した形”になっており，「辺々加える，辺々引く，辺々かける」などの操作を連想することも，カンとしては働かせておきたいところです．

【解説】

上記方針の通り

$f(r)=2^{n+1}k_1$　$f(s)=2^{m+1}k_2$（k_1，k_2 は奇数）

とし，左辺の r，s に $r=(2^{n+1}-1)k_2$ などを代入すると，

$$\left.\begin{array}{l} f((2^{n+1}-1)k_2)=2^{n+1}k_1 \\ f((2^{m+1}-1)k_1)=2^{m+1}k_2 \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots ③$$

ここで③を辺々かけることに気がつけば解決します．

$$f((2^{n+1}-1)k_2)f((2^{m+1}-1)k_1)=2^{m+n+2}k_1k_2 \quad \cdots\cdots ④$$

です．

ここで $k_1 \neq 1$ ならば

$$\begin{aligned} f((2^{m+1}-1)k_1) &\geqq (2^{m+1}-1)k_1+k_1+1 \\ &> 2^{m+1}k_1 \end{aligned}$$

となり，これと④から，

$$f((2^{n+1}-1)k_2)<2^{n+1}k_2 \quad \cdots\cdots ⑤$$

ですが，$k_2=1$ のとき⑤は明らかに不成立．また，$k_2 \neq 1$ のときも，

$$f((2^{n+1}-1)k_2) \geqq (2^{n+1}-1)k_2+k_2+1>2^{n+1}k_2$$

となり，⑤と矛盾します．

よって，$k_1=1$ がいえ，同様に $k_2=1$ です．

以上より，（③に代入して）

$$f(2^{n+1}-1)=2^{n+1}$$

なので，$2^{n+1}-1$ は素数．つまり，$r=2^{n+1}-1$ は素数であり，同様に，s も素数になります．

さて“互いに素”の定番は漸化式がらみの問題です．

問題 4

正の整数 a と b が互いに素であるとき，正の整数からなる数列 $\{x_n\}$ を，$x_1=x_2=1$，$x_{n+1}=ax_n+bx_{n-1}$ （$n \geqq 2$）で定める．このとき，すべての正の整数 n に対して x_{n+1} と x_n が互いに素であることを示せ．

（名古屋大・理系）

≪方針の立て方≫

x_{n+1} と x_n の組は無数にあります．このうち 1 組でも互いに素でない（共通な 1 以外の約数をもつ）としたらマズいわけですから，

仮に x_{n+1} と x_n が互いに素でないとすると矛盾が起こることを示せばよい．つまり，背理法だな．

あとがき

2017 年度の東大の理系数学は易しかった．90 点台で落ちた生徒がいるんですよ，と嘆く講師の方からこんな話を聞いた．入試が一段落すると，有名大学の数学担当者がその年の入試について質問を受け付ける会がある．それに行ったところ，何故こんなにやさしくしたんだという質問が集中．すると東大の担当者は，「学内で，最近の学生があまりに数学ができないので問題化している．原因を考えたところ，入試の数学が難しすぎて部分点だけで受かる学生さえいるからではないかという意見があったので，易しくしてみたのだ」という意味のことを答えたそうだ．この話を聞いて今さらながら考えこんだ．今や数十年の蓄積をもとに，予備校の教え方，手法，背景の説明，問題の分類，パターン化は精緻を極め，解説も私の受験した 40 年前に比べて，比較にならぬほど親切で丁寧だ．それなのになぜ（ちなみに合格最低点もほぼ変わらない）学生の数学力は伸びないのか…答えは明白で，それは学生が「自分の頭を使っていない」からなんです．学生は借り物の解法を塾・予備校で習う．そこで習う解法とは，マニュアル化され，アルゴリズム化されたもので，そうした解き方を習うことを考えることだと勘違いしている生徒（あるいは教師）すらいる．これは一種のごまかしだから，当の入試でさえ，難しい味付けが施された問題を出すと部分点しか取れない生徒が続出して，上記のような議論が起こる．私はロマン派（笑）だから，難しいものに挑戦するのは大好きです．だから，そうした「同類」は応援したくなって時々こういう本を書く．東大も本当に数学ができる学生を生み出したいなら，自分で考えなければ決して解けず，予備校ではパターンを教えないような難問こそ出せばいいんです…とちょっくら主張したくなった屁理屈はそこらでおしまい．最後になりましたが，本書を出版してくださる東京出版の黒木社長と，編集を担当してくださった坪田様，飯島様にこの場を借りて感謝申し上げます．

難関大入試数学・方針をどう立てるか

平成 30 年 3 月 17 日　第 1 版第 1 刷発行　　定価はカバーに表示してあります．

著　者　栗田哲也
発行者　黒木美左雄
発行所　**株式会社　東京出版**
〒150-0012　東京都渋谷区広尾 3-12-7
電話 03-3407-3387　振替 00160-7-5286
http://www.tokyo-s.jp/
整版所　錦美堂整版株式会社
印刷所　株式会社光陽メディア
製本所　株式会社技秀堂製本部
落丁・乱丁本がございましたら，送料小社負担にてお取替えいたします．

©Tetsuya Kurita 2018 Printed in Japan
ISBN978-4-88742-235-3