はじめに

難関校受験生向けの月刊誌「大学への数学」では，1957年の創刊以来，毎号（3月号を除く）

学力コンテスト（学コン）

という，創作問題を出題し，読者が答案を送り，それを添削して返却，また，成績優秀者の氏名を誌上で発表するというコーナーを設けています．

全国の優秀な方々が応募され，試験とは違って時間制限もないので（締切はありますが），問題は難しめになり，それだけに，考えがいのある問題で，数学好きの高校生，大学受験生を魅了してきました．応募者の中からは，フィールズ賞を受賞された森重文先生を初めとする多くの高名な数学者が輩出され，また，他の分野でも，一線で活躍されている方々が多々いらっしゃいます．

答案を添削するスタッフ（学コンマン）も，読者時代は学コンで成績優秀者の常連だった人達ばかりで，

応募者→学コンマン⇨応募者→学コンマン⇨…

という学コンファンの流れが，連綿と受け継がれてきました．

2016年3月に，学力コンテストの問題の中から，特に，解いて面白い，ためになる50問を精選して『考え抜く数学〜学コンに挑戦〜』を刊行しました．また，2016年11月には，より難度の高い50問を精選した『もっと考え抜く数学〜学コンに挑戦〜』を刊行しました．

本書は，第1集の『考え抜く数学〜学コンに挑戦〜』（範囲は数ⅠAⅡB）の理系版に当たるもので，2005〜2016年に出題した問題の中から，数Ⅲも含めて50問を精選しました（数ⅠAⅡBの問題も第1集とは異なります）．

大学入試の標準〜やや発展レベルの問題（入試問題を易しい方から1〜10に分けたとして6，7程度）をこなせて（完璧に解けることまでは要求しません），さらに上を目指す人を読者として想定していますが，そのような人でも，手こずる問題が少なくないでしょう．しかし，簡単には解けない問題に対して，知識だけに頼らず，自分の頭で考え，手を動かして立ち向かっていくことにより，たとえ答えには至らなくても，思考力，発想力が養われていきます．そして，考える過程において，また，解き終えた後には，十分な満足感・充実感が得られることでしょう．

学力コンテストの問題の中には，入試のレベルを超える難問もありますが，本書では，難しすぎる問題や，手間のかかりすぎる問題は取りあげていませんから，難関校の入試対策としても，十分に効果があります．

また，とりあえず入試に向けての実力養成を第一目的とする人でも，「大学への数学」や学コンに取り組んでいるうちに，数学の面白さ，楽しさを再認識することができるでしょう．

本書を手に取った皆さんも，学コンの問題を考えることによって，自分の頭で考えることの充実感を味わっていただければと思います．また，月刊「大学への数学」の学力コンテストに応募されたことのない方は，本書をきっかけに，全国の学コン仲間の輪に加わりましょう．皆さんの御応募を心からお待ちしています．

／浦辺理樹

♦ 本書の構成と利用法 ♦

本書は，2005〜2016 年の月刊「大学への数学」の学力コンテストから，50 問を精選したものです．範囲は数ⅠAⅡBⅢ(数Ｂはベクトル，数列）です．数ⅠAⅡBの範囲でも無理なく解ける問題の番号を次ページにまとめておきましたので，数Ⅲ未習の方は参考にしてください．

○問題編

● 問題

見た目の分野で分けてありますが，複数の分野にまたがるものや，例えば，外見は座標の問題だが複素平面が有効，といったものもあるかもしれないので，先入観を持たない方がよいでしょう．

どの分野から始めても，同じ分野内では，どの問題から解き始めても結構です．

難易度は，前ページでも述べたように，難しめの問題（入試問題の発展レベル：易しい方から 1〜10 に分けたとして 8，9 程度）が主体ですから，苦労したり，解決に至らなかったりしても，悲観するには及びません．なお，難易の感じ方は人それぞれなので，難しいハズだ，という先入観は無用です．

● 解答時間と正答率（p.18〜19）

応募者の解答時間の内訳と正答率（25 点満点の人の割合）をグラフにしました．本書の中での問題ごとの難易の一つの目安になるでしょう．ただし，正答率が低くなった問題は，本当に難しかったもののほか，ギロンに不備が起きやすかったり，多くの人が陥りがちなトラップがあったりして完答した人が少なくなったものもありますので，一律に難問であるというわけではありません．

● ヒント（p.20〜24）

思考力，発想力を養うために，まずは，自分の頭で考え，自分の手を動かしてみてほしいですが，手がかりが得られなかったり，途中で行き詰まったりした人のために，ヒントのページを設けました．それをもとに，再度チャレンジするとよいでしょう．もちろん，いきなりヒントを見るのではなく，30 分程度は，自力で問題に当たるようにしましょう．

○解説編

問題文の右側に，平均点（満点は 25 点），正答率，応募者の解答時間（20 点以上の人について集計したもので，SS … 30 分以内，S … 30 分〜1 時間，M … 1 時間〜2 時間，L … 2 時間以上），を掲載しました．時間無制限で，締切ギリギリまで粘る応募者が多いので，平均点は高めになりますから，その点を割り引いて参考にして下さい．

解説編は，学力コンテスト応募者に，返送時に答案とともに配布する解説プリントをもとにしました．本書を刊行するに当たって，一部，編集部で加筆したり，重複がある部分などの修正をしたものもあります．

● 前書き

解答の前に，前書きとして，解決へのポイントや手がかりになることなどを書きました．p.20〜

24のヒントと重複する部分もありますが，答えは出たもののメンドウな計算やギロンを強いられた人は，解答を見る前に，前書きを参考にして再検討するのもよいでしょう．

●解答

筋の良い解法を吟味して掲載しました．ギロンの飛躍がないように説明も省略せずに書いてあるので，試験の答案としても，そのまま通用するものです．単純計算は省略した部分もありますが，工夫した場合は，そのことがわかるように，途中過程も書きました．

なお，ほとんどの人が思いつかないような巧妙すぎる方法は，ここでは採用しませんでしたが，皆さんにも紹介したいものは，あとの解説の中で掲載しました．

●解説

解答中のポイント，解答で用いた重要事項や関連事項を掘り下げて解説しました．自力では答えに至らなかった人も，解説を読むことによって得られるものが多いことでしょう．教科書の基本事項レベルの事柄は省略しましたので，苦手分野で不安な人や基本の再確認をしたい人は，教科書などを参照して下さい．

また，有用な別解があれば掲載しました．問題によっては，少々手間がかかるけれども思いつきやすい解法や，目立った誤答例も取りあげましたので，皆さんと実際の応募者の解答状況を比較することが出来ます．

なお，入試問題から関連問題を紹介したものもありますので，理解を深めるためにチャレンジしてみましょう．

解説プリント担当者（本書掲載分．五十音順）

石城陽太
一山智弘
伊藤大介
上原早霧
條　秀彰（現在編集部）
濵口直樹
藤田直樹
森川皓太
山崎海斗（現在編集部）
吉田　朋

数ⅠAⅡBの範囲で無理なく解ける問題

1，2，3，4，5，6，7，10，11，12，13，14，15，16，17，18，19，20，21，22，23，24，25，26，27，28，41

考え抜く数学 理系編

～学コンに挑戦～

問題編

図形・ベクトル／座標／関数・方程式／数列／整数／場合の数・確率
２次曲線／極限／微分法・積分法（数式主体）／積分法（面積）／体積

図形・ベクトル

1　AB＝3，AC＝2，BC＝4 の △ABC がある．半直線 BC 上の点 P と，直線 BC 上の点 Q は，∠BAP＝∠CAQ を満たしている．∠BAP＝θ とおく．

（1）　AP の長さを θ で表せ．

（2）　AQ＝2AP のとき，$\cos\theta$ の値を求めよ．

2　平行四辺形 ABCD を底面とする 4 角錐 O-ABCD がある．辺 OA を 1：2 に内分する点を P，辺 OB の中点を Q，辺 OD を 3：1 に内分する点を R とし，3 点 P，Q，R を通る平面を α とする．

（1）　2 点 O，C を通る直線と α の交点を T とするとき，OT：TC を求めよ．

（2）　O-ABCD の体積は，α によってどのような比に分けられるか．

3　O を原点とする座標空間に立方体 OABC-DEFG がある．ただし，O を含む 3 つの面は正方形 OABC，OAED，OCGD で，A（1，2，2）である．また，B〜G のいずれかは（4，a，b）である．

（1）　a，b の組は何個あるか．

（2）　（4，a，b）が G である場合について，C，D の座標を求めよ．

4　t を実数とする．xyz 空間において，原点 O を通り $\vec{d}$＝（1，-2，t）に垂直な平面を α とし，O を中心とし平面 α に含まれる半径 1 の円を C とする．C 上の点で y 座標が最大のものを M，z 座標が最大のものを N としたとき，cos∠MON を t で表し，cos∠MON のとりうる値の範囲を求めよ．

学力コンテスト・添削例

問題 23 の答案と，それを添削したものです．

解答時間	SS, S, M, L	得点	20 点	着眼	A	大筋	B

．コとネを用いてできる 10 文字の列のうち，“コネコネ”という文字列を含むものは何個あるか．

〔I〕 コネコネをAとして残り6文字を並べる順列は
先に残り6文字を並べて 2^6 通りで Aを入れる所が7通り

↓○↓○↓○↓○↓○↓○↓ なので $2^6 \times 7$ 通りある

この数え方だとダブっているので順次引いていく

これは「コネがピッタリ3連続する場合」ではなく「コネが3以上連続する場合」です。

〔II〕
コネコネコネを含むものは〔I〕と同様の考え方でカウントすると
$2^4 \times 5$ 通りあり Iで2回重複してカウントされている

〔III〕 コネコネコネコネを含むものは同様に $2^2 \times 3$ 通りあり
〔I〕で3回重複してカウントされている

一方，2回重複しているのは，「コネがピッタリ3連続している場合」であり，

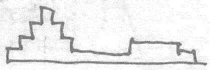
〔IV〕 コネコネコネコネコネを含むものは明らかに1通りで
〔I〕で4回重複してカウントされている

たとえばコネコネコネコネコネなどは，コネコネコネコネで4回重複しているわけですね。

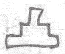
〔V〕 コネコネが2箇所あってはなれているものは最初のコネコネを A_1
次のコネコネを A_2 として

コA_1コA_2　A_1コA_2コ　A_1ココA_2
コA_1ネA_2　A_1コA_2ネ　A_1ネネA_2
ネA_1コA_2　A_1ネA_2コ　A_1ネコA_2
ネA_1ネA_2　A_1ネA_2ネ　（A_1コネA_2 は〔IV〕の場合なので除外）
の11通りある これは〔I〕で2回重複してカウントされている

ですから，この図を少し立体的に描くと，(I) は



であり，(II) は



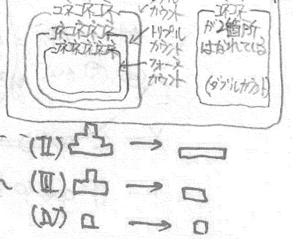
ということになります。

重複しているものは1回ずつ引いていけばいいので

ですから，正しくは (I)−(II)−(V)

$$2^6 \times 7 - 2^4 \times 5 - 2^2 \times 3 - 1 - 11 = 448 - 80 - 12 - 1 - 11$$
$$= 344 \text{ 通り}$$

コネコネを含むとです。



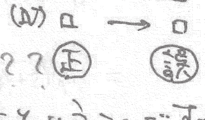
※

$n!$ に含まれる素因数 p の個数が

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^k}\right] = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \cdots\cdots + \left[\frac{n}{p^k}\right] + \cdots$$

の数え方を参考にしたら上の解答になった

(II), (III), (IV) をそれぞれ



ただし，自分もこれで正しいとは思っていない？？？

正 誤 と勘違いしたということですね．

コネが素因数 p なら コネコネは p^2
コネコネコネは p^3 ・・・

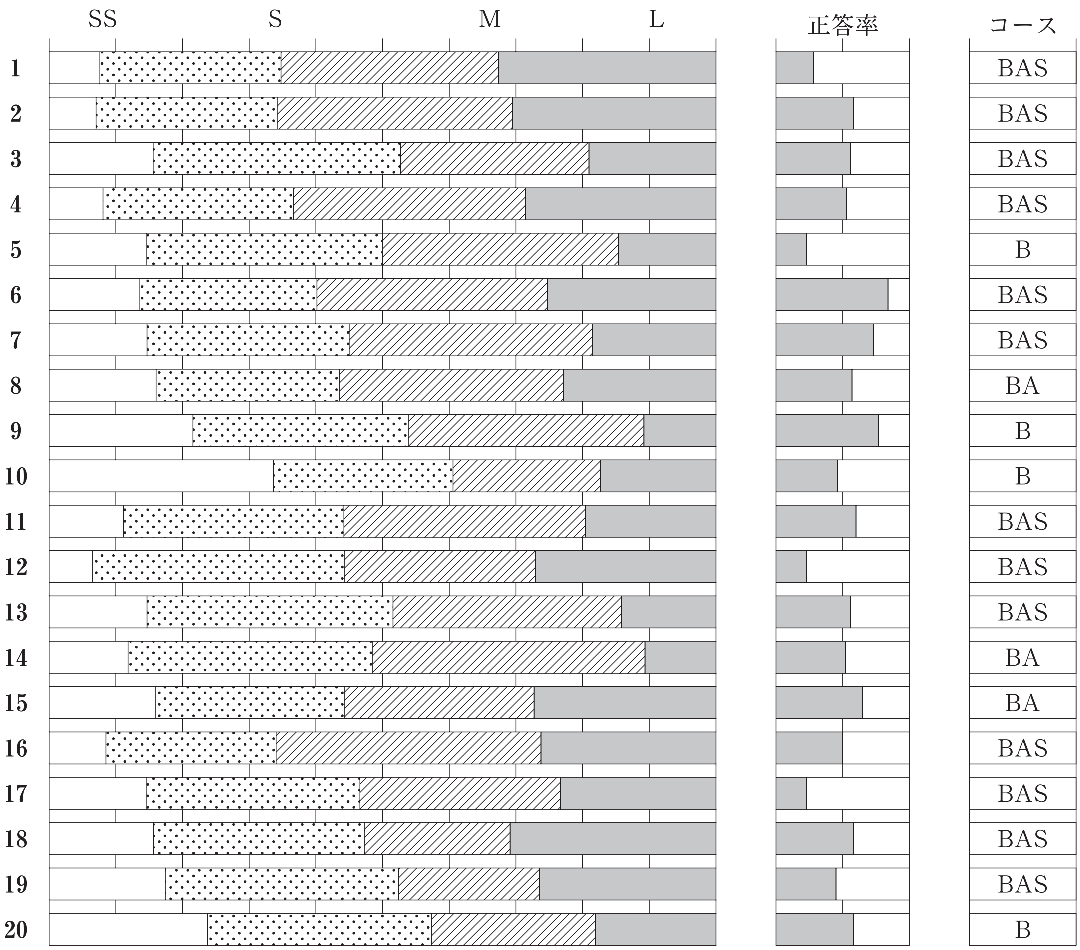
解答時間と正答率

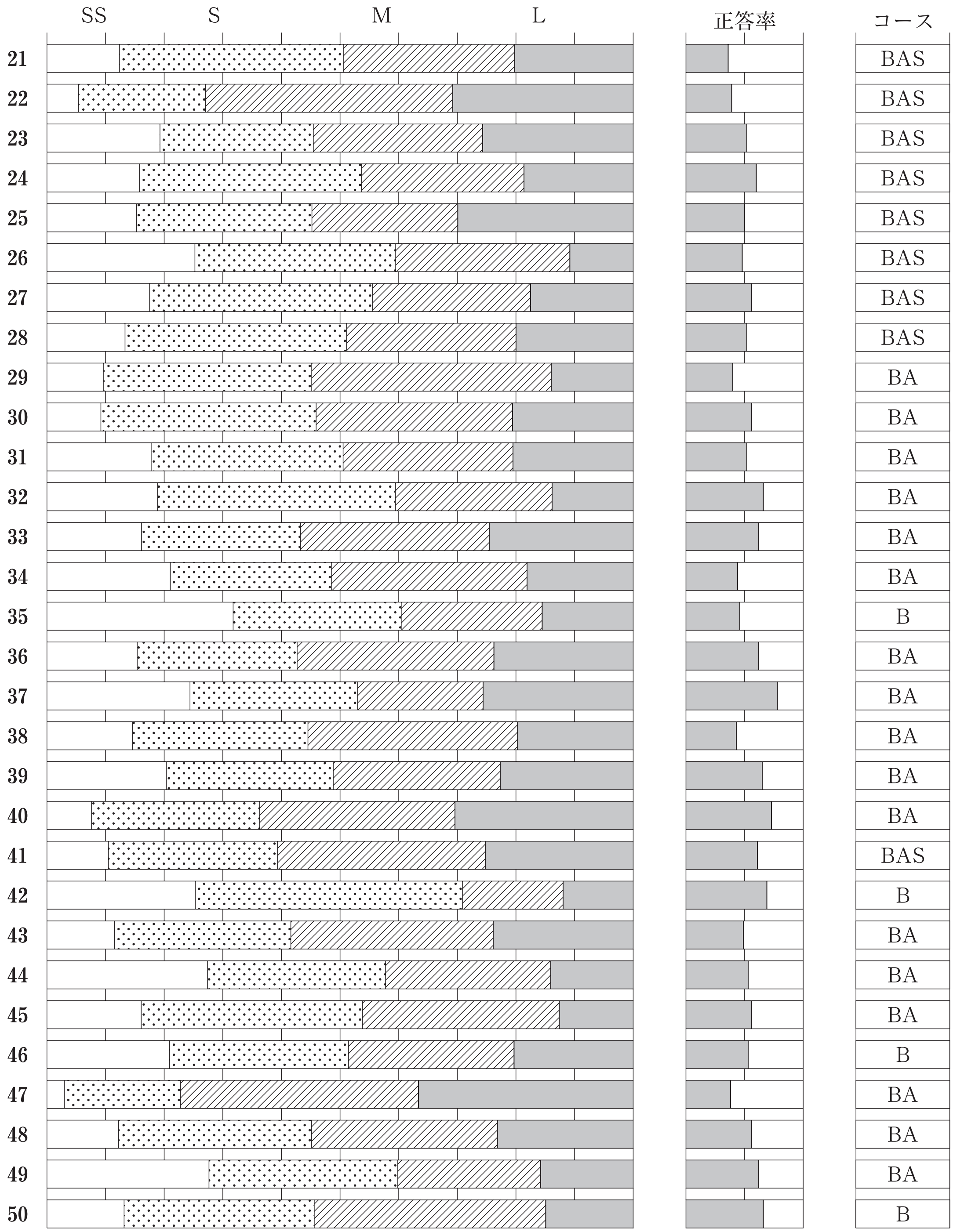
解答時間は，考え始めてから答案を書き上げるまでの実質的な所要時間を，20 点以上（25 点満点）の人について集計したもので，

SS …… 30 分以内　　S …… 30 分〜1 時間
M …… 1 時間〜2 時間　　L …… 2 時間以上

正答率は完答（25 点満点）の人の割合です．
なお，具体的な数値は，解説編の各問の問題文の右に書いてあります．
コースは，下記のどのコースの問題かを表しています．

S コース（1 番〜3 番）：文理共通
A コース（1 番〜4 番）：理系向け
B コース（1 番〜6 番）：理系で意欲的な人向け




SS
S
M
L
正答率
コース
21 BAS
22 BAS
23 BAS
24 BAS
25 BAS
26 BAS
27 BAS
28 BAS
29 BA
30 BA
31 BA
32 BA
33 BA
34 BA
35 B
36 BA
37 BA
38 BA
39 BA
40 BA
41 BAS
42 B
43 BA
44 BA
45 BA
46 B
47 BA
48 BA
49 BA
50 B

◎ ヒント ◎

解決への手がかりが得られない人や途中で行き詰まった人のためのヒントです．いきなり見るのではなく，まずは自分の頭で考え，手を動かすようにしましょう．すぐに見たくなる誘惑に勝てない人は，ホチキスなどで袋綴じにしてしまうのも一つの手です．

1 （１） △ABP の 3 つの内角と AB の長さが決まっているので，正弦定理を用いましょう．$\sin B$ は $\cos B$ から得られます．
（２） 同様に AQ の長さが θ で表せますが，Q の位置によって ∠AQC の表され方が変わってくるので，場合分けが必要です．

2 （１） ベクトルを使って比を求めましょう．T が線分 OC 上にはないことが分かります．
（２） 四角錐 O-PQTR の体積から，四角錐 O-PQTR のうち四面体 O-ABCD から突き出た部分の体積を除いたものを考えると良いでしょう．ベクトルで全てやってもいいですが，メネラウスの定理など初等幾何も使えると楽になります．

3 （１）（4，a，b）を X として OX あるいは AX の長さや，直角になる角に着目して，地道に調べましょう．
（２） C(p，q，r）とおいても十分ですが，平面 OAFG に垂直なベクトルを利用すると，手間を減らせます．

4 C を平面 α と O を中心とする半径 1 の球の交線と捉えて C 上の点（x，y，z）が満たすべき等式を立て，y または z が最大になるのはどのようなときかを考えましょう．なお，C を，$\overrightarrow{d}$ に垂直で互いに直交する単位ベクトル $\overrightarrow{v_1}$，$\overrightarrow{v_2}$ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\cos\theta\cdot\overrightarrow{v_1}+\sin\theta\cdot\overrightarrow{v_2}$ とパラメータ表示する手もあります．

5 解法は，自然流（x を固定して t を動かしたときの y の範囲を求める）と逆手流（直線の式を t の方程式と見て，解が存在するための x，y の条件を求める）の 2 つ考えられます．とりあえず $t\neq1$ は無視して，後で $t=1$ の場合を検討するのが考えやすいですが，「$t=1$ とすると $y=x$ だから l_t は $y=x$ 上の点は除く」とするのは，今回は偶然，結果だけは正しいですが，本来は間違いです（$y=x$ となる t が $t=1$ 以外にも存在するかもしれない）．

6 （１） A，B，C，D の x 座標を a，b，c，d のように定めると，例えば直線 AB の傾きは $a+b$ のように表せます．最初の条件から AB⊥CD で，CD が円の直径になることから AC⊥AD，BC⊥BD のように垂直となる直線の組み合わせがたくさん出てくるので，それぞれ傾き同士の積が -1 となることなどを使えば条件式が出せます．
（２） $c+d$，cd を a で表せれば，c，d を解とする二次方程式が a を含んだ式で表せます．

7 3 点の x 座標を文字で置き，△ABC が二等辺三角形になるという条件を式で表しましょう．どれが等辺になるかわからないので，3 交点を P，Q，R とおいて PQ=PR となるための条件を考えると，同じ計算を 3 回やらなくてすみます．なお，垂直二等分線に着目すると計算がラクになります．

8 （１） $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を $-60°$ 回転させると $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ になります．回転は複素平面で捉えられます．
（２） E_1 を x，y で表し，原点のまわりに 45° 回転させてやりましょう．
（３） （２）と同様にやっても構わないのですが，E_2 は E_1 の相似縮小になっていることに気付けば簡単です．

9 問題文に複素数平面は現れませんが，相似を回転・拡大で捉え，複素数を用いると非常にすっきりと解くことができます．ポイントは，B に対応する複素数を $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ や $a+bi$ などと 2 つの実変数を用いて表さずに，z のように 1 文字の複素数変数で表すことです．

10 （１） $\log_{10}N$ を上下から評価します．
（２）「桁数の桁数なんて見たことない！」と思うかもしれませんが，落ち着いて考えれば難しくありません．$10^{n-1}\leqq27^N<10^n$ を満たす n を，（１）の過程を利用して上下から評価してやりましょう．評価は，大胆にやっても大丈夫です．

解 説 編

石城 陽太／一山 智弘／伊藤 大介／上原 早霧／浦辺 理樹／條　秀 彰
濵口 直樹／藤田 直樹／森川 皓太／山崎 海斗／吉 田　朋

問題 1　AB＝3，AC＝2，BC＝4 の △ABC がある．半直線 BC 上の点 P と，直線 BC 上の点 Q は，∠BAP＝∠CAQ を満たしている．∠BAP＝θ とおく．

（1）　AP の長さを θ で表せ．

（2）　AQ＝2AP のとき，$\cos\theta$ の値を求めよ．

（2016 年 8 月号 3 番）

平均点：18.0
正答率：28%　（1）75%（2）29%
時間：SS 8%，S 27%，M 33%，L 33%

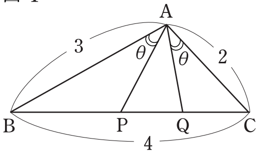
（1）　△ABP の 3 つの内角と AB の長さが決まっているので，正弦定理を用いましょう．$\sin B$ は $\cos B$ から得られます．

（2）　同様に AQ の長さが θ で表せますが，Q の位置によって ∠AQC の表され方が変わってくるので，場合分けが必要です．

解　（1）　△ABC に余弦定理を用いて，

$$\cos B=\frac{3^2+4^2-2^2}{2\cdot3\cdot4}=\frac{7}{8}$$

図 1

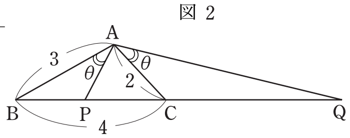


$$\therefore\quad \sin B=\frac{\sqrt{15}}{8}$$

△ABP に正弦定理を用いて，

$$\frac{\text{AP}}{\sin B}=\frac{\text{AB}}{\sin\angle\text{APB}}$$

図 2



よって，

$$\text{AP}=\frac{\text{AB}\sin B}{\sin\angle\text{APB}}$$

$$=\frac{\text{AB}\sin B}{\sin(\pi-\theta-B)}=\frac{3\sin B}{\sin(\theta+B)}$$

$$=\frac{3\cdot\frac{\sqrt{15}}{8}}{\frac{7}{8}\sin\theta+\frac{\sqrt{15}}{8}\cos\theta}=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{15}}{7\sin\theta+\sqrt{15}\cos\theta}}\quad\cdots\cdots①$$

（**2**）　△ABC に余弦定理を用いて，

$$\cos C=\frac{2^2+4^2-3^2}{2\cdot2\cdot4}=\frac{11}{16}\quad\therefore\quad \sin C=\frac{3\sqrt{15}}{16}$$

△ACQ に正弦定理を用いて，

$$\frac{\text{AQ}}{\sin C}=\frac{\text{AC}}{\sin\angle\text{AQC}}\quad\therefore\quad \text{AQ}=\frac{\text{AC}\sin C}{\sin\angle\text{AQC}}$$

（i）　Q が C に関して B と同じ側にあるとき（上の図 1）：　∠AQC＝$\pi-\theta-C$ なので，

$$\text{AQ}=\frac{\text{AC}\sin C}{\sin(\pi-\theta-C)}=\frac{2\sin C}{\sin(\theta+C)}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

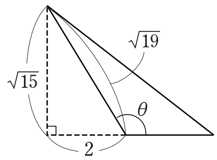
$$=\frac{6\sqrt{15}}{11\sin\theta+3\sqrt{15}\cos\theta}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots③$$

AQ＝2AP と③①より，

$$\frac{6\sqrt{15}}{11\sin\theta+3\sqrt{15}\cos\theta}=2\cdot\frac{3\sqrt{15}}{7\sin\theta+\sqrt{15}\cos\theta}$$

$$\therefore\quad 11\sin\theta+3\sqrt{15}\cos\theta=7\sin\theta+\sqrt{15}\cos\theta$$

$$\therefore\quad \sqrt{15}\cos\theta=-2\sin\theta$$



$$\therefore\quad \tan\theta=-\frac{\sqrt{15}}{2}$$

θ は鈍角で，

$$\cos\theta=-\frac{2}{\sqrt{19}}$$

（ii）　Q が C に関して B と反対側にあるとき（左の図 2）：　∠AQC＝$C-\theta$ なので，$\text{AQ}=\dfrac{\text{AC}\sin C}{\sin(C-\theta)}$

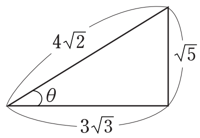
これは②の θ を $-\theta$ に代えたものなので，③の θ を $-\theta$ に代えて，

$$\text{AQ}=\frac{6\sqrt{15}}{-11\sin\theta+3\sqrt{15}\cos\theta}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots④$$

AQ＝2AP と④①より，

$$-11\sin\theta+3\sqrt{15}\cos\theta=7\sin\theta+\sqrt{15}\cos\theta$$

$$\therefore\quad \sqrt{15}\cos\theta=9\sin\theta$$



$$\therefore\quad \tan\theta=\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$$

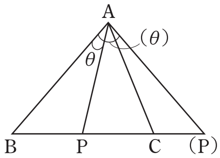
θ は鋭角で，$\cos\theta=\dfrac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$

以上から，$\boldsymbol{\cos\theta=-\dfrac{2}{\sqrt{19}},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}}$

【解説】

Ⓐ　（1）　AP の長さを求めるには，正弦定理，余弦定理，面積に着目する，などの手がありますが，冒頭でも述べたように，△ABP の 3 つの内角と AB の長さが決まっているので，正弦定理を用いるのが良いでしょう．余弦定理だと，BP の長さも未知数にとらなければならず，厄介なことになります（☞Ⓑ）．

面積に着目するのも悪くありませんが，P の位置で場合分けが必要です：



Ⓐ　P が辺 BC 上にあるとき，
　△ABC＝△ABP＋△ACP

Ⓑ　P が BC の延長上にあるとき，
　△ABC＝△ABP－△ACP

Ⓐの場合，△ABC に余弦定理を用いて，

$$\cos A=\frac{3^2+2^2-4^2}{2\cdot3\cdot2}=-\frac{1}{4}\quad\therefore\quad \sin A=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\therefore\quad \triangle \mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{3\sqrt{15}}{4}$$

また，$\triangle \mathrm{ABP}=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot \mathrm{AP}\cdot\sin\theta$

$$\triangle \mathrm{ACP}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot \mathrm{AP}\cdot\sin(A-\theta)$$

$$=\mathrm{AP}\left\{\frac{\sqrt{15}}{4}\cos\theta-\left(-\frac{1}{4}\right)\sin\theta\right\}$$

$$\therefore\quad \frac{3\sqrt{15}}{4}=\frac{3}{2}\mathrm{AP}\sin\theta+\frac{1}{4}\mathrm{AP}(\sqrt{15}\cos\theta+\sin\theta)$$

これから，AP が θ で表せます．

Ⓑの場合は，$\triangle \mathrm{ACP}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot \mathrm{AP}\cdot\sin(\theta-A)$

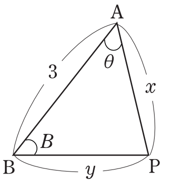
なので，結局，同じ式になります．

B 余弦定理だと，次のようになります．$\cos B$，$\sin B$ の値はわかっていますが，とりあえず，$\cos B$，$\sin B$ のままで立式することにします．

$\mathrm{AP}=x$，$\mathrm{BP}=y$ とおくと，余弦定理より，

$x^2=9+y^2-6y\cos B$ ……⑤

$y^2=9+x^2-6x\cos\theta$ ……⑥



⑤＋⑥ より，

$x\cos\theta+y\cos B=3$

$\therefore\quad y\cos B=3-x\cos\theta$

これを ⑥×$\cos^2 B$ に代入して，

$$(3-x\cos\theta)^2=(9+x^2-6x\cos\theta)\cos^2 B$$

$1-\cos^2 B=\sin^2 B$ を用いて整理すると，

$(\cos^2\theta-\cos^2 B)x^2-6(\cos\theta\sin^2 B)x+9\sin^2 B=0$ …⑦

以下 $\cos\theta\neq\pm\cos B$ の場合を考えます．このとき x は

$$\frac{3\cos\theta\sin^2 B\pm 3\sin B\sqrt{\cos^2\theta\sin^2 B-\cos^2\theta+\cos^2 B}}{\cos^2\theta-\cos^2 B}$$

$\sqrt{\quad}$ の中身は $-\cos^2\theta\cos^2 B+\cos^2 B=\cos^2 B\sin^2\theta$ なので，$x=\dfrac{3\sin B(\cos\theta\sin B\pm\cos B\sin\theta)}{\cos^2\theta-\cos^2 B}$ ………⑧

$\cos B=\dfrac{7}{8}$，$\sin B=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$ として，分母・分子を 64 倍すると，$x=\dfrac{45\cos\theta\pm 21\sqrt{15}\sin\theta}{64\cos^2\theta-49}$

㊎の①に比べると複雑な形で，しかも，x が 2 つ出てきました．このうち，$\dfrac{45\cos\theta-21\sqrt{15}\sin\theta}{64\cos^2\theta-49}$ は①の分子・分母に $\sqrt{15}\cos\theta-7\sin\theta$ を掛けたものですが，もう一方の解の $x=\dfrac{45\cos\theta+21\sqrt{15}\sin\theta}{64\cos^2\theta-49}$ ………⑨

は？ ⑨が負になるなら話は簡単ですが，$\cos\theta>\dfrac{7}{8}$ のとき⑨は正ですから，正負だけで吟味することはできません．

y も求めてみましょう．再び $\cos B$，$\sin B$ のままで話を進めると，排除したい解は⑧の $\pm$ のうち $+$ の方の

$$x=\frac{3\sin B(\cos\theta\sin B+\cos B\sin\theta)}{\cos^2\theta-\cos^2 B}\ \cdots\cdots\cdots\text{⑩}$$

$$=\frac{3\sin B\sin(\theta+B)}{\cos^2\theta-\cos^2 B}$$

対称性から，y は x の式の θ と B を入れかえたもので，

$$y=\frac{3\sin\theta\sin(\theta+B)}{\cos^2 B-\cos^2\theta}$$

x，y の分子は正で，分母は異符号！ つまり，x と y の一方が負になってしまい，不適だったのです．

さて，⑧が現れる解法は，他にもいろいろあります．

正弦定理より，$\dfrac{x}{\sin B}=\dfrac{y}{\sin\theta}$ ……………………⑪

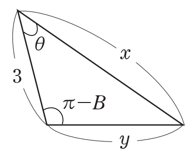
これと⑥を連立させます．⑪より $y\sin B=x\sin\theta$

これを ⑥×$\sin^2 B$ に代入して，

$$x^2\sin^2\theta=(9+x^2-6x\cos\theta)\sin^2 B$$

$\therefore\quad (\sin^2 B-\sin^2\theta)x^2-6(\cos\theta\sin^2 B)x+9\sin^2 B=0$

$\sin^2 B-\sin^2\theta=\cos^2\theta-\cos^2 B$ なので，これは⑦と同じ方程式です．したがって，⑩も現れますが，今度は，⑪より，x が正なら y も正だから困ってしまいます．



実は，右図の場合も⑥と⑪が成り立つので，⑩は右図の場合なのです．

C （1）は面積に着目する解法で場合分けを見逃しても答えは合いました．プラス・マイナスで帳尻が合って結果は変わらない，ということはよくありますが，（2）は残念ながら答えの一方が抜けてしまいます．

図形がらみの問題では，自分の描いた図にとらわれて場合分けを見逃さないように注意が必要です．自分が絶対だと思うようなナルシストの人は危険ですね．特に見落としがちなのは，点と点，点と直線などの**位置関係**に関するものです．

それと，問題文は一字一句熟読しましょう．

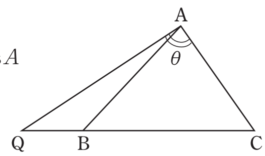
P は**半直線** BC 上，Q は**直線** BC 上

という違いがあります．だから，P は常に B より右側ですが，Q と C の位置関係は決まっていないのです．

（2）で場合分けを見逃した人は 48%にも及びました．人間味があって微笑ましいとも言えますが．（場合分けをした人は人間味がないとは言ってません）

なお，（ⅰ）の場合，

$\cos\theta=-\dfrac{2}{\sqrt{19}}<-\dfrac{1}{4}=\cos A$



より $\theta>A$ で，Q は辺 CB の延長上の点です．（浦辺）

あとがき

2016年に刊行した『考え抜く数学』では，まずは学コン問題集に馴染んでいただこうということで，数ⅠAⅡBの範囲で，学コンの中では標準レベル（入試では発展レベルに相当）の問題にとどめました．一方，『もっと考え抜く数学』では，数Ⅲの範囲も含め，学コンとしても難し目の問題を収録しました．そこで，第1集のような適度な難易度で数Ⅲも含めたものを，という読者の方々からの御要望にお応えして，本書の刊行に至りました．

問題編を見て，「複素平面がない」と思った方もおられるでしょう．本書では，問題を解く前に余計な先入観を与えないように，複素平面を用いるとラクだけれど問題文には複素平面を設定していないようなものは，「複素平面」という分類には入れませんでした．問題に当たるときは，見た目にとらわれない自由な発想をしたいものです．例えば，見かけは数Ⅱの3次関数の問題だけど，数Ⅲの微分に持ち込んだ方がラクなものもあります．

特にベクトルは，幾何や座標でも，また，物理でも，活躍の場面が沢山あります．それが，次の指導要領の改定案では数Cに移ってしまいました．履修は高3でもよかろう，というのは，ベクトルの内部で閉じてしまっている人の話です．みなさんは，そんな硬直した考えではなく，幾何や座標の問題でもベクトルなどを自在に操って，明快な解法を追求し，理解を深めましょう．

数学に限らず，自分の頭で考えることは大切です．ネットに書いてあることを鵜呑みにしてはいけませんし，まして，不用意に拡散させたら，加害者になりかねません．また，マスコミや“偉い”人の言うことだから間違いないという人は，権力者の意のままで，そのような人が多数になった集団は，おかしな方向に進んでもブレーキがききません．実際にそうなってしまっては後の祭りです．物語の世界なら，「3年前に戻って，みんなに危険を知らせてやろう」なんてこともできますが．　（浦辺）

「大学への数学」の学コンでは，毎月6題ずつ（3月号は除く）1年で合計66題の問題が出題されており，応募者はそれに毎月取り組んでいるわけですが，その問題たちは天から勝手に降ってくるわけではありません．編集部外の方からいただいた問題以外のものは毎月編集部で作問しており，入社してから私も定期的に作問・出題していますが，問題を作るのは解く以上に労力を要します．とくに，学コン用の問題となると，誰でもすぐに解けるようなものではダメだし，かといって難しすぎて手も足も出ないようなものでもダメですので，適切な難易度かつ斬新なものを，となると一筋縄ではいきません．必要になったときに急に作ろうとしてもなかなか良いものはできないので，時間のあるときに問題をストックしておこうといつも思っているのですが，時間のあるときは遊びたくなるのが人間というもので，なかなかうまくはいっていません．私の場合，電車での暇な移動時間に頭の中でアイデアを出しておき，家や会社で数値調整して問題を作るというパターンが多いです．

さて，作問は労力を要するとさきほど言いましたが，デメリットだけではもちろんありません．どういったことがポイントとなる問題にしたいか，簡単すぎるならどうすれば難しくできるか，逆に難しすぎるならどういった誘導をつければいいかなどを考えながら作っていると，それだけでとても勉強になりますし，いい問題ができると達成感もあります．また，作ったからには誰かに解いてもらいたくなりますよね．最近SNS上で問題を作って互いに解き合う姿をよく見かけますが，数学が好きな人たちにとってそうなるのは自然なことのように思います．だから作問をしろというわけではもちろんありませんが，問題を解くときに作問者がどういうことを考えながら作ったのかということも考えてみると，より楽しめるかもしれません．　（山崎）

大学への数学
考え抜く数学　理系編
〜学コンに挑戦〜

平成30年3月14日　第1刷発行

編　者　東京出版編集部
発行者　黒木美左雄
発行所　株式会社　**東京出版**
〒150-0012　東京都渋谷区広尾3-12-7
電話 03-3407-3387　振替 00160-7-5286
http://www.tokyo-s.jp/

整版所　錦美堂整版
印刷所　光陽メディア
製本所　技秀堂

落丁・乱丁の場合は，ご連絡ください．
送料弊社負担にてお取り替えいたします．

ISBN 978-4-88742-234-6