はじめに

秋山貴之

数学の試験問題には独立小問形式の出題と大問形式の出題が見られます．大問形式の問題の場合，出題者はその大問全体を１つのストーリーとして，その設問構成を組み立てます．最後の設問こそが目指すべきゴール地点です．目的地に辿り着くための道しるべとなる設問を配置することで受験生を誘導します．私自身も生徒たちには「悩んだら前の問題との繋がりを考えよう」と伝えています．

では，独立小問はどうでしょう．大抵の場合，問われているものは１つですから，他の設問との結びつきなどに頼る訳にもいきません．それに加えて，試験は時間との戦いでもあります．割り当てられる配点に見合う時間しかかけられないという観点からも，迅速な対応が要求されます．それまでに培ってきた経験値，知識，思考力が，抜け道を断たれたコンパクトな形式で問われ，それでいて，スピーディーな解決が求められるのです．厄介なことに，独立小問であるがゆえにトリッキーな難問，奇問の類が織り交ぜてあることも珍しくありません．そういった性質からか，出題される問題も極めて多岐に渡ります．

本書は，月刊「高校への数学」で 2012 年７月号から 2017 年３月号にかけて連載された『ハイレベル小問☆ベストセレクション』を編集して一冊の本としてまとめたものです．かつて，授業を担当していた中３生向けに，ざっくりと分野別に分類した「小問セレクション」なる教材を作成したことがあります．当時は，知識と入試頻出典型題のチェックを目的としていました．時を経て，姿かたちは小問であっても，入試問題作成を担当された日本有数の学校の先生方の魂のこもった問題との出会いを重ねるうちに，「思考力のパワーアップも期待できて，明瞭なテーマ分けによって強化するべき内容が容易に手に入る教材を作りたい」という思いを強くしました．

受験生諸君が，高校入試の数学で要求される知識＆重要問題パターン＆思考力を補給する手助けになれば…との願いを込めて，本書のタイトルを「数式の得点力を急速チャージ！」と名付けました．

2017 年６月

本書の利用法

☆どこから始める？

高校入試の数式分野について，数と式・整数・方程式＆資料の整理・確率・関数の各単元をそれぞれ 10 個のテーマに分類し，強化したい項目を選別できるようにしてあります．1 ページ 1 テーマの構成になっていますので，気になるテーマだけつまみ食いしていただいても構いません．ピンポイントでの強化が期待できます．その一方で，それぞれの単元において，どの順番で扱うのが効果的か，テーマの配列にもこだわりました．各単元について，順番通りに解き進めていただくと，他のテーマとの結びつき・相互理解といった化学反応が期待できるかと思われます．

☆掲載されている問題は…？

各回ともに，日本全国の高校入試問題で実際に出題された問題で構成されています．基本スタンスとして，掲載されている問題のほとんどは，高校入試において独立小問の形式で出題された問題になります．オーソドックスな典型題に始まり，知識がものをいう問題から思考力を要する難問に至るまで様々カバーしています．

また，新旧を問わず，高い学習効果が期待できる問題を選びました，今どきの流行の一題から伝説の名作といえる一題まで，まさに時空を超えて，バラエティに富んだ問題に触れることができます．

☆ 1 ページに費やす時間は…？

テストにおける小問集合の対策を想定して，お使いになるのであれば，各ページ 15 分〜30 分の時間制限を設定して取り組んでいただくのが効率的です．はたまた，気が済むまでじっくり考えたいということであれば，一題につき最大 15 分を目安として取り組んでいただいてもよいでしょう．

☆問題を解き終えて…①

解き終えてからのケアこそ大切にして下さい．スムーズに解くことができた問題であれば，解説で紹介する解法ならびに別解とご自身の解法を比べて吟味してみましょう．肝心なのは出来なかった問題です．取り組んだ際，自分の力で乗り越えられなかった部分がどこなのかを見極めて下さい．思考の過程で見落としていた部分は…，あるいは，解説を読んで初めて知るところとなる知識・公式・テクニックは…それらをフィードバックするための専用ノートを作って整理するのも効果的な学習法です．

☆問題を解き終えて…②

時折，高校入試で見かけるテーマの中から，受験生にとって知識→即戦力となりうるものを，独断と偏見で 4 つ選びました．「とっておきゼミナール」と銘打ってお届けします．解説ページだけでは語り尽くせないネタも盛り込んであるので，熟読して下さい．きっと，ライバルに差をつけるテクニックが手に入ることでしょう．

目次

（　）内は解答・解説のページ

展開・因数分解とその利用①

$\boxed{1}$ 次の式を因数分解せよ．

（1） $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+16$ （2008　海城）

（2） $(1-c)a^2+2abc-(1+c)b^2$ （1993　早大本庄）

$\boxed{2}$ 正の数 a，b，c は $(a^2b+ab-bc-ca-c):ac=b:1$ を満たす．c を a，b のできるだけ簡単な式で表せ． （2005　開成）

$\boxed{3}$ 次の式を計算せよ．

$190\times1950-188\times1949-189\times1948+187\times1947$ （2008　慶應女子）

$\boxed{4}$ 次の式を計算せよ．

$214^2-2\times214\times89+89^2-181^2-2\times181\times94-94^2$ （2005　早稲田実業）

$\boxed{5}$ 次の式を計算せよ．

$$\frac{14^3+21^3+28^3+35^3}{14\times21\times28\times35}$$ （2006　慶應）

展開・因数分解とその利用②

1　次の式を因数分解せよ．

（1）　$9+3(x^2+x+1)+x^2(x+1)$　（1982　開成）

（2）　$a^4+3a^2-2ab+4-b^2$　（1992　慶應志木）

2　$(a^2+b^2-c^2)^2$ を展開すると $\boxed{}$ であるから，$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2$ を因数分解すると $\boxed{}$ となる．（2010　灘）

3　次の計算をせよ．

（1）　$\sqrt{285\times291+9}$　（1991　洛星）

（2）　$\dfrac{86^2-2\times86\times77+77^2}{15^2}+\dfrac{15^2+2\times15\times13+13^2}{35^2}$　（2004　慶應女子）

4　$x=1+\sqrt{3}$ のとき，x^3-x^2-4x+4 の値を求めよ．（2001　久留米大附設）

5　a，b，c，d は等式 $a+b=5$，$c+d=2$，$ad=bc=1$ を満たす．$ac+bd$，$\dfrac{a}{c}$ の値を求めよ．（2002　慶應女子）

＜解答・解説＞

展開・因数分解とその利用①

複雑な因数分解および展開・因数分解を利用して式の値を求める問題を扱います.

5は，指数法則を用いた式変形により，手際よく進めましょう.

1 （1） **$2+8=4+6$ から，カタマリは…**

与式$=(x+2)(x+8)\times(x+4)(x+6)+16$
$=(x^2+10x+16)(x^2+10x+24)+16$ …(＊)

ここで，$x^2+10x=A$ とおくと，

$(*)=(A+16)(A+24)+16$
$=A^2+40A+400$
$=(A+20)^2$
$=\boldsymbol{(x^2+10x+20)^2}$

（2） **c について整理してみると…**

与式$=a^2-ca^2+2abc-b^2-cb^2$
$=-c(a^2-2ab+b^2)+a^2-b^2$
$=-c(a-b)^2+(a-b)(a+b)$
$=(a-b)\{-c(a-b)+a+b\}$
$=\boldsymbol{(a-b)(bc-ca+a+b)}$

別解　たすきがけの因数分解でもできます.
$-(1-c)+(1+c)=2c$ ですから，
与式$=(1-c)a\times a+2c\times ab+(1+c)b\times(-b)$
$=\{(1-c)a+(1+c)b\}(a-b)$
$=\boldsymbol{(a-b)(bc-ca+a+b)}$

2 **$a>0$，$b>0$ が効いてきます.**

(内項の積)＝(外項の積) より，

$a^2b+ab-bc-ca-c=abc$
$a^2b+ab-bc-ca-c-abc=0$ …(＊)

(＊)の右辺を因数分解すると，

(右辺)$=(a^2b+ab)-(abc+ca+bc+c)$
$=ab(a+1)-c(ab+a+b+1)$
$=ab(a+1)-c(a+1)(b+1)$
$=(a+1)\{ab-c(b+1)\}=0$

$a>0$ より，$a+1\neq0$ であるから，

$ab-c(b+1)=0$

$b>0$ より，$b+1\neq0$ であるから，$\boldsymbol{c=\dfrac{ab}{b+1}}$

3 **置きかえを利用して計算すると…**

$190=A$，$1950=B$ とおく.

与式$=AB-(A-2)(B-1)$
$-(A-1)(B-2)$
$+(A-3)(B-3)$
$=AB-(AB-A-2B+2)$
$-(AB-2A-B+2)$
$+(AB-3A-3B+9)$
$=\boldsymbol{5}$

4 **平方の形を作る因数分解を利用すると…**

$214=A$，$89=B$，$181=C$，$94=D$ とおく.

与式$=A^2-2AB+B^2-C^2-2CD-D^2$
$=(A-B)^2-(C^2+2CD+D^2)$
$=(A-B)^2-(C+D)^2$
$=(214-89)^2-(181+94)^2$
$=125^2-275^2$
$=(125+275)(125-275)$
$=400\times(-150)$
$=\boldsymbol{-60000}$

5 **指数法則 $\boldsymbol{a^m\times a^n=a^{m+n}}$，**
$\boldsymbol{(a^m)^n=a^{mn}}$，$\boldsymbol{(ab)^n=a^nb^n}$
を利用して，式変形を進めると…

与式

$$=\frac{(7\times2)^3+(7\times3)^3+(7\times4)^3+(7\times5)^3}{7\times2\times7\times3\times7\times4\times7\times5}$$

$$=\frac{7^3\times2^3+7^3\times3^3+7^3\times4^3+7^3\times5^3}{7^4\times2\times3\times4\times5}$$

$$=\frac{7^3\times(2^3+3^3+4^3+5^3)}{7^4\times2\times3\times4\times5}$$

$$=\frac{7^3\times(8+27+64+125)}{7^4\times2\times3\times4\times5}$$

$$=\frac{224}{7\times2\times3\times4\times5}$$

$$=\boldsymbol{\frac{4}{15}}$$

＜解答・解説＞
展開・因数分解とその利用②

$\boxed{2}$は，前半の展開の結果を利用して，後半の因数分解に取り組んでみましょう．

$\boxed{4}$では，次数下げによる解法も紹介します．

$\boxed{1}$ （**1**） **何をカタマリにするかがポイントです．**

$x^2=A$，$x+1=B$ とおくと

与式$=9+3(A+B)+AB$

$=AB+3A+3B+9$

$=A(B+3)+3(B+3)$

$=(A+3)(B+3)$

$=\boldsymbol{(x^2+3)(x+4)}$

（**2**） **$2ab$ から，$(\quad)^2$ の形は作れないかと考えて…**

与式$=a^4+3a^2+4-2ab-b^2$

$=a^4+4a^2+4-a^2-2ab-b^2$

$=(a^2+2)^2-(a+b)^2$

$=\{(a^2+2)+(a+b)\}\{(a^2+2)-(a+b)\}$

$=\boldsymbol{(a^2+a+b+2)(a^2-a-b+2)}$

$\boxed{2}$ **前半で展開して得られる式を利用すると…**

$a^2+b^2=A$ とおくと

$(a^2+b^2-c^2)^2=(A-c^2)^2$

$=A^2-2Ac^2+c^4$

$=(a^2+b^2)^2-2(a^2+b^2)c^2+c^4$

$=\boldsymbol{a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2}$

別解

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$

$x=a^2$，$y=b^2$，$z=-c^2$ を代入します．

$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2$

$=a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2-4a^2b^2$

$=(a^2+b^2-c^2)^2-(2ab)^2$

$=(a^2+b^2-c^2+2ab)(a^2+b^2-c^2-2ab)$

$=(a^2+2ab+b^2-c^2)(a^2-2ab+b^2-c^2)$

$=\{(a+b)^2-c^2\}\{(a-b)^2-c^2\}$

$=\boldsymbol{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)}$

$\boxed{3}$ **乗法公式＆因数分解を巧みに利用して…**

（**1**） $\sqrt{285\times291+9}$

$=\sqrt{(288-3)(288+3)+3^2}$

$=\sqrt{288^2-3^2+3^2}=\mathbf{288}$

（**2**） 与式$=\dfrac{(86-77)^2}{15^2}+\dfrac{(15+13)^2}{35^2}$

$=\dfrac{9^2}{15^2}+\dfrac{28^2}{35^2}=\left(\dfrac{3}{5}\right)^2+\left(\dfrac{4}{5}\right)^2=\mathbf{1}$

$\boxed{4}$ **次数下げによる解法もあります．**

$x^3-x^2-4x+4=x^2(x-1)-4(x-1)$

$=(x-1)(x^2-4)$

$=(x-1)(x-2)(x+2)$ ……………（＊）

（＊）に $x=1+\sqrt{3}$ を代入すると，

（＊）$=\sqrt{3}\times(\sqrt{3}-1)(3+\sqrt{3})$

$=(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})=3^2-(\sqrt{3})^2=\mathbf{6}$

別解

$x-1=\sqrt{3}$ より，$x^2-2x+1=3$

移項して，$x^2=2x+2$ …①が得られる．さらに，

$x^3=x\times x^2=x(2x+2)=2x^2+2x$

$=2(2x+2)+2x=6x+4$

x^3-x^2-4x+4

$=(6x+4)-(2x+2)-4x+4=\mathbf{6}$

$\boxed{5}$ **b，d を消去して式変形するとスムーズ．**

$(a+b)(c+d)=5\times2$ より，

$ac+ad+bc+bd=10$

$ac+1+1+bd=10$ より，$ac+bd=8$

$ad=bc=1$ より，$b=\dfrac{1}{c}$，$d=\dfrac{1}{a}$

$a+b=a+\dfrac{1}{c}=\dfrac{ac+1}{c}=5$ より，

$ac+1=5c$ ……………………………①

$c+d=c+\dfrac{1}{a}=\dfrac{ac+1}{a}=2$ より，

$ac+1=2a$ ……………………………②

①，②より，$2a=5c$ であるから，$\dfrac{a}{c}=\boldsymbol{\dfrac{5}{2}}$

数と式

とっておきゼミナール①

ガウス記号

「入試問題で見かけるちょっと気になる題材」にスポットライトを当てて紹介します．

第１弾は『ガウス記号』に関する問題を扱います．平方根の問題で見かける『整数部分・小数部分』と深い関わりのある記号です．

まずは，例題から取り組んでみよう．

＜**例題**＞

1　記号$[x]$はxを超えない最大の整数を表す．

（１）　次の値を求めよ．

①　$[3.14]$　②　$[\sqrt{2}]$　③　$[-1.9]$

（２）　$[\sqrt{n}]=3$を満たす自然数nを求めよ．

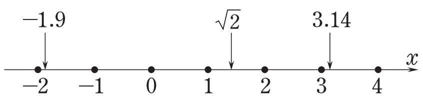
2　記号$[x]$はxを超えない最大の整数を表す．

このとき，$\left[\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^2\right]=\dfrac{x}{2}+3$を満たす数$x$を求めよ．

ガウス記号の基本性質から見ていこう．

ガウス記号の定義　ある数xに対して，xを超えない最大の整数を$[x]$と表す．

数直線上で見ると



例えば，$[3.14]=3$，$[\sqrt{2}]=1$，$[-1.9]=-2$

さあ！ここで１つ目の重要ポイントだ!!

☆重要ポイントⅠ

$[\boldsymbol{x}]$＝**整数値！**

$[x]$はxの整数部分とも言える．

ところで，

$[4]=4$，$[4.3]=4$，$[4.6]=4$，

$[4.999\cdots]=4$，$[5]=5$

ということは…

$4\leqq x<5$のとき，$[x]=4$だね．

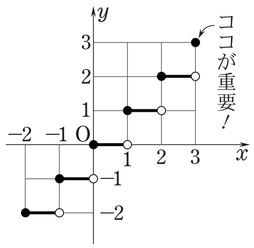
お待たせ！２つ目の重要ポイントだ!!

☆重要ポイントⅡ

$[x]=N$（Nは整数）のとき

$$\boldsymbol{N\leqq x<N+1}$$

$-2\leqq x\leqq 3$の範囲で$y=[x]$のグラフを描くと…



２つの重要ポイントを参考にして，例題の２題を解くこととしよう．

＜**解説**＞

1　（**1**）　①　$[3.14]=\boldsymbol{3}$　②　$[\sqrt{2}]=\boldsymbol{1}$

③　$[-1.9]=\boldsymbol{-2}$

（**2**）　重要ポイントⅡを使おう！

$3\leqq\sqrt{n}<4$より，２乗して，$9\leqq n<16$である．

$\boldsymbol{n=9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15}$

2　**まずは重要ポイントⅠが意識できたかな？**

$$\left[\left(\frac{x-1}{2}\right)^2\right]=\frac{x}{2}+3=(\text{整数値})\quad\cdots①$$

より，$\dfrac{x}{2}$は整数値をとる．$x=2N$（Nは整数）とおくと，①に代入して

$$\left[\left(\frac{2N-1}{2}\right)^2\right]=\left[N^2-N+\frac{1}{4}\right]=N+3\cdots②$$

ここで，N^2-Nは整数値をとるので，

$$\left[N^2-N+\frac{1}{4}\right]=N^2-N\quad\cdots\cdots\cdots\cdots③$$

②，③より，$N^2-N=N+3$

$N^2-2N-3=0$より，$N=-1,\ 3$

よって，$\boldsymbol{x}=2N=\boldsymbol{-2,\ 6}$

重要ポイントを，さりげなく使えるようになるといいね．では，練習問題をやってみよう．

あとがき

中学入試，高校入試，大学入試の3つの入試において，真ん中に位置するのが高校入試です．それゆえに，数学の高校入試問題では，中学入試算数を彷彿させる場合の数を見かけたかと思いきや，高校数学で当たり前とされる数式処理が顔を覗かせたり…とバラエティに富んだものになっています．しかし，受験生にしてみれば，何とも悩ましい性格の持ち主かもしれません．本書が，そんな厄介者!?との知恵比べに日々格闘する受験生諸君の実力UP＆得点力UPに一役買えたら幸いです．

最後に，月刊「高校への数学」で5年間に渡り連載させていただいた「小問ベストセレクション」において，編集に携わって戴いた堀西彰編集長，勝又健司前編集長に感謝の意をお伝えしまして，結びの言葉とさせていただきます．

（秋山貴之）

高校入試　数式の得点力を急速チャージ！

2017年6月6日　第1刷発行

著　者　秋山貴之
発行者　黒木美左雄

発行所　**東京出版**
〒150-0012
東京都渋谷区広尾3-12-7
電　話　03-3407-3387
振　替　00160-7-5286
http://www.tokyo-s.jp/

整　版　所　錦美堂整版
印刷・製本　技秀堂
落丁・乱丁の場合は，ご連絡ください．
送料弊社負担にてお取り替え致します．

ISBN978-4-88742-230-8