はじめに

本書を手に取った人は，数学Ⅲの基礎に不安がある人が多いでしょう．本書はそんな人のための本です．これから数Ⅲの入試対策をしようという人を対象とし，基本事項を理解し入試の基本問題が解けるようになることを目標にしています．

講義編と演習編を用意しました．講義編で押さえておくべき重要事項を解説したうえで，演習編に取り組んでもらう構成です．

本書の演習編のレベルについて説明しましょう．

小社で発行している演習書として，

「1 対 1 対応の演習」シリーズ

「数学Ⅲスタンダード演習」

（「Ⅲスタ」と略す）

「新数学演習」　（「新数演」と略す）

がありますが，これらは入試の標準レベル，あるいは発展レベルの問題を中心に構成されています．

それに対して，本書の演習編は，

入試の基本レベルの問題を精選

して，構成しました．

問題のレベルについて，上記の演習書と比較できるように，もう少し具体的に述べておきましょう．入試問題を 1 から 10 の 10 段階に分け，易しい方を 1 として，

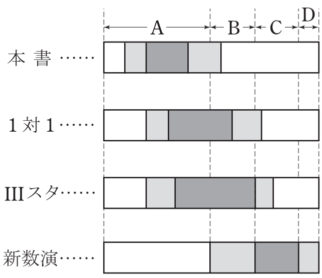
1～5 の問題……A（基本）

6～7 の問題 ……B（標準）

8～9 の問題 ……C（発展）

10 の問題 ………D（難問）

とします．この基準で本書と，本書の後に位置する上記の演習書のレベルを示すと，次のようになります．濃い網目の問題を主に採用し，網目部が右側にあるほど難し目であることを表すイメージ図です．



さて，本書は，月刊「大学への数学」に '14 に連載した「数Ⅲステップアップ講座」と '15～'16 に連載した「数Ⅲドリル」をまとめたものに講義編の 0 章を加えるなどしたものです．

さらに巻末に，定理・公式など（精選集）をつけました．

本書で基本事項のチェックをし，基本を固めていって下さい．数Ⅲの入試の基礎固めにお役に立てれば幸いです．

追伸　本書を終えた後，「1 対 1 対応の演習」シリーズで，さらに力をつけていって下さい．

本書の構成と利用法

本書は，大きく講義編と演習編の 2 つから構成されています．

講義編：

章立てを

0 章　分数関数，無理関数など
1 章　極限
2 章　微分法
3 章　積分法（計算問題）
4 章　面積・体積・弧長
5 章　平面上の曲線
6 章　複素数平面

としました．

各分野の入試の基本問題を解く際に，必要となる定理や公式の使い方を例題を通して解説しました．また，間違えやすいポイントなども取り上げました．

各分野について，講義編を学習した後，演習編に取り組みましょう．

演習編：

各分野 2 セットずつの構成になっています．

入試の基本レベルの問題を精選しました．

問題文の直後に，問題の難易と目標時間を表の形で明記しました．難易については前ページで述べた A～D で表し，目標時間は，*，○で表しました．* は 1 つにつき 10 分，○は 5 分です．

解答は，**解**から始まる部分ですが，解答の前文で，各問を解く際のポイントなどを書きました．もしも解答の方針が立たなかったり途中でつまずいたりしたら，ここをヒントに解いてみましょう．

演習編の使い方は自由です．例えば，まずセット 1 だけやる；不得意分野から 2 セットずつやる，など各自で工夫して活用してください．

なお，講義編の 0 章に対応する演習編はありませんが，その代わりに講義編の最後に練習問題を 9 題掲載しました．

ミニ講座：　教科書で取り上げている「近似式」を解説しました．

定理・公式など：　巻末に，定理・公式など（精選集）をつけました．詳しい証明などは省略しましたが，公式の確認などに活用してください．

本書で使う記号・用語など：

⇨**注**　すべての人のための注意事項
➡**注**　意欲的な人のための注意事項
▨　関連する事項の補足説明など
∴　ゆえに
∵　なぜならば
パラメータ　媒介変数の意味

数学Ⅲの入試基礎 講義と演習

目次

講義編

講義 0

分数関数，無理関数など

▶ここでは，分数関数，無理関数，逆関数，合成関数を扱います.◀

§1. 平行移動の公式

曲線 C : $y=f(x)$ を x 軸の正方向に a，y 軸の正方向に b だけ平行移動させて得られる曲線 D の方程式は，

$$\boldsymbol{y-b=f(x-a)}\text{（つまり，}\boldsymbol{y=f(x-a)+b}\text{）}$$

解説. この移動で C 上の点 $(x,\ y)$ が D 上の点 $(X,\ Y)$ に移るとすると，$x+a=X$，$y+b=Y$．よって，点 $(X,\ Y)$ が D 上にある条件は $(x,\ y)=(X-a,\ Y-b)$ が C 上にあることであるから，$Y-b=f(X-a)$ //

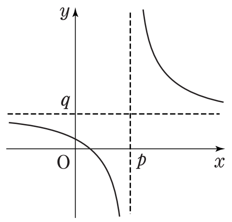
同様に，曲線 $f(x,\ y)=0$ を上のように平行移動して得られる曲線は，$f(x-a,\ y-b)=0$ です.

§2. 分数関数

$\dfrac{\text{多項式}}{\text{多項式}}$ の形で表される関数を分数関数といいます.
定義域は，特に指示がなければ，分母が 0 にならない範囲です．分数関数のうち，分母・分子とも 1 次式である $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0)$ を 1 次分数関数といいます．分子を分母で割ることにより，

$$y=\frac{k}{x-p}+q$$

の形に直すことができ，このグラフは $k>0$ のとき右図のようになります.



直線 $x=p$，$y=q$ を漸近線といいます（$|x|\to\infty$ or $|y|\to\infty$ のとき，曲線が近づく直線）．1 次分数関数のグラフは，漸近線が直交する双曲線であり，直角双曲線と呼ばれています.

---

1. (1) $y=\dfrac{2x+1}{x-2}$ のグラフは，$y=\dfrac{\boxed{}}{x}$ のグラフを x 軸の正の方向に $\boxed{}$，y 軸の正の方向に $\boxed{}$ だけ平行移動したものである.

(2) 関数 $y=\dfrac{ax+2}{3x+b}$ のグラフの漸近線が $x=1$ および $y=2$ であるとき，a，b の値を求めよ.

分子を分母で割って（多項式の割り算），分子を分母より低次な形に直しましょう.

(2) y 軸に平行な漸近線は，分母 $=0$ のときです.

解 (1) ［右の計算を使って，$2x+1$ を商と余りを使って表すと］

$$\begin{array}{r} 2 \\ x-2\,\overline{)\,2x+1} \\ \underline{2x-4} \\ 5 \end{array}$$

$2x+1=2(x-2)+5$ なので，

$$y=\frac{2x+1}{x-2}=\frac{2(x-2)+5}{x-2}=2+\frac{5}{x-2}$$

よって，このグラフは，$y=\dfrac{\boldsymbol{5}}{x}$ のグラフを x 軸方向に **2**，y 軸方向に **2** だけ平行移動したものである.

(2) $ax+2=\dfrac{a}{3}(3x+b)+2-\dfrac{ab}{3}$ であるから，

$$y=\frac{ax+2}{3x+b}=\frac{a}{3}+\left(2-\frac{ab}{3}\right)\frac{1}{3x+b}$$

このグラフの漸近線は，$x=-\dfrac{b}{3}$，$y=\dfrac{a}{3}$ であるから，

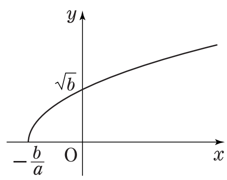
$$-\frac{b}{3}=1,\ \frac{a}{3}=2 \qquad \therefore\ \boldsymbol{a=6,\ b=-3}$$

§3. 無理関数

$y=\sqrt{\text{多項式}}$（または $y=-\sqrt{\text{多項式}}$）の形で表される関数を無理関数といいます．定義域は，特に指示がなければ，ルートの中が 0 以上になる範囲です.

まずは，$y=\sqrt{1\text{次式}}$ を考えましょう.

$y=\sqrt{ax+b}$ $(a\neq 0)$ のグラフは，放物線の一部です.
(図は $a>0$，$b>0$ の場合).



これは，

$$y=\sqrt{ax+b}$$
$$\Longleftrightarrow y\geqq 0 \text{ かつ } y^2=ax+b$$
$$\Longleftrightarrow y\geqq 0 \text{ かつ } x=\frac{y^2}{a}-\frac{b}{a}$$

とすれば分かります（横に寝た放物線の $y\geqq 0$ の部分）.

グラフは，ルートを含む方程式，不等式を解くときにも活用できます（解を視覚化できる）.

なお，$y=\sqrt{2\text{次式}}$ では，$y=\sqrt{a^2-x^2}$ $(a>0)$…① が頻出です．① $\Longleftrightarrow y\geqq 0$ かつ $y^2=a^2-x^2$
$\Longleftrightarrow y\geqq 0$ かつ $x^2+y^2=a^2$
ですから，①は半円を表します.

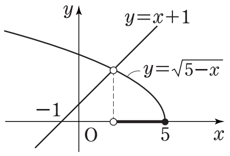
2.（1） 不等式 $\sqrt{5-x}<x+1$ を解け．

（10　龍谷大・理工／推薦）

（2） 不等式 $\sqrt{4x-x^2}>3-x$ を満たす x の範囲を求めよ．（09　学習院大・理）

不等式を同値変形することで解けますが，ここではグラフを利用して解くことにします．$y=\sqrt{-x^2+ax+b}$ のグラフは半円です．

解　（1）$y=\sqrt{5-x}$ のグラフは右図のような放物線の一部である．このグラフが直線 $y=x+1$ の下側にあるような範囲を求めればよい．



交点の x 座標は，$\sqrt{5-x}=x+1$ ……① の解である．

両辺を 2 乗して，$5-x=x^2+2x+1$

$\therefore\ \ x^2+3x-4=0\qquad \therefore\ \ (x+4)(x-1)=0$

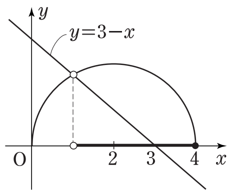
①のとき $x+1\geqq 0$ であり，これを満たす解は，$x=1$

上図から，$\mathbf{1<x\leqq 5}$

（**2**）$y=\sqrt{4x-x^2}\iff y\geqq 0$ かつ $y^2=4x-x^2$ …②

$\iff y\geqq 0$ かつ $(x-2)^2+y^2=2^2$

このグラフは右図のような半円である．この半円が直線 $y=3-x$ の上側にあるような範囲を求めればよい．交点の x 座標は，②に $y=3-x$ を代入して得られる．



$(3-x)^2=4x-x^2\qquad \therefore\ \ 2x^2-10x+9=0$

を満たす．上図から，$x<3$ を満たす解を求めて，

$x=\dfrac{5-\sqrt{7}}{2}$．よって答えは，$\mathbf{\dfrac{5-\sqrt{7}}{2}<x\leqq 4}$

§4．逆関数

一般に，関数 $f(x)$ について，

$f(x)$ の値域に含まれるどのような値 a についても

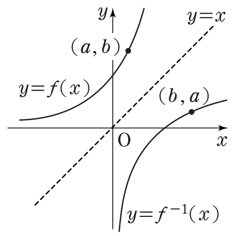
$f(x)=a$ を満たす x の値がただ 1 つ決まる …☆

とき，$f(x)$ は逆関数をもつといいます．上記の値 a に，$f(x)=a$ を満たす x の値を対応させる関数を $f(x)$ の**逆関数**といい，$\boldsymbol{f^{-1}(x)}$ と表します．なお，☆は「$x_1\neq x_2$ ならば $f(x_1)\neq f(x_2)$」つまり，x の値が違えば $f(x)$ の値も違う，と同じことです．

逆関数 $f^{-1}(x)$ の定義域は $f(x)$ の値域と同じ．また，$f^{-1}(x)$ の値域は $f(x)$ の定義域と同じです．

逆関数を具体的に求めるときは，まず $f(x)$ を y とおき，これを x について解きます．つまり $y=f(x)$ を $x=$（y の式）にします．この（y の式）が逆関数，つまり，（y の式）の y を x にかえたものが $f^{-1}(x)$ です．

逆関数のグラフについて，定義より，$y=f(x)$ 上に（a，b）があるとき，$y=f^{-1}(x)$ 上に（b，a）がある，が成り立ちます（$b=f(a)$ と $a=f^{-1}(b)$ が同値であるから）．



（a，b）と（b，a）は直線 $y=x$ に関して対称ですから，$\boldsymbol{y=f(x)}$ **のグラフと** $\boldsymbol{y=f^{-1}(x)}$ **のグラフは直線** $\boldsymbol{y=x}$ **に関して対称**です．

3.（1） 関数 $y=\dfrac{x+2}{2x-3}$ の逆関数を求めよ．

（07　九州産大・情報科学，工）

（2） 関数 $f(x)=\sqrt{4-3x}+4$ に対して $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ は，$x\geqq\boxed{}$ で定義されていて $f^{-1}(x)=\boxed{}$ である．（06　関東学院大・工）

逆関数を求めるには，x を y で表します．逆関数 $f^{-1}(x)$ の定義域は $f(x)$ の値域と同じです．

解　（**1**）$y=\dfrac{x+2}{2x-3}$ のとき，$y(2x-3)=x+2$

x について整理して，$(2y-1)x=3y+2$

x について解くと，$x=\dfrac{3y+2}{2y-1}$．x と y を入れかえて，

求める逆関数は，$\boldsymbol{y=\dfrac{3x+2}{2x-1}}$

（**2**）$\sqrt{4-3x}\geqq 0$ により，$f(x)=\sqrt{4-3x}+4\geqq 4$

よって，$f^{-1}(x)$ は $\boldsymbol{x\geqq 4}$ で定義されている．

$f(x)$ を y とおくと，$y-4=\sqrt{4-3x}$

両辺を 2 乗して，$(y-4)^2=4-3x$

$\therefore\ \ x=\dfrac{4-(y-4)^2}{3}\qquad \therefore\ \ \boldsymbol{f^{-1}(x)=-\dfrac{1}{3}(x-4)^2+\dfrac{4}{3}}$

§5．合成関数

2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ があるとき，

x の値に $g(f(x))$ を対応させる関数

（ただし，$g(f(x))$ は，$g(x)$ の x に $f(x)$ の値を代入したもの）

を $f(x)$ と $g(x)$ の**合成関数**といい，$\boldsymbol{(g\circ f)(x)}$ と表します（$(g\circ f)$ が関数を表す記号）．カッコを省略して $g\circ f(x)$ と書くこともあります．合成関数では，計算

の順番に注意しましょう．$(g\circ f)(x)$ において，先に計算するのは $f(x)$ です（その値を $g(x)$ の x に代入する）．

定義域は，特に指示がなければ，$f(x)$ の値が $g(x)$ の定義域に含まれるような x の値全体です．

合成関数において，$(g\circ f)(x)$ と $(f\circ g)(x)$ は，一般には一致しません．

---

4. $f(x)=x+1$，$g(x)=\dfrac{1}{x}$ のとき，$f(f(x))$，$f(g(x))$，$g(f(x))$，$g(f^{-1}(x))$ を求めよ．

（06　大阪工大／一部追加）

合成関数を，計算の順番に注意して，実際に求めてみましょう．

解　$\boldsymbol{f(f(x))}=f(x+1)=(x+1)+1=\boldsymbol{x+2}$

$$\boldsymbol{f(g(x))}=f\left(\frac{1}{x}\right)=\boldsymbol{\frac{1}{x}+1}$$

$$\boldsymbol{g(f(x))}=g(x+1)=\boldsymbol{\frac{1}{x+1}}$$

$f(x)$ を y とおくと，$x+1=y$　　$\therefore$　$x=y-1$

x と y を入れかえて $y=x-1$　　$\therefore$　$f^{-1}(x)=x-1$

$$\boldsymbol{g(f^{-1}(x))}=g(x-1)=\boldsymbol{\frac{1}{x-1}}$$

⇨注　本問では，$f(g(x))$ と $g(f(x))$ は違う関数．

●練習問題

1. 関数 $y=-\dfrac{4x+3}{2x+5}$ のグラフを C で表す．

$-\dfrac{4x+3}{2x+5}=\boxed{}+\dfrac{7}{2\left(x+\dfrac{5}{2}\right)}$ と変形すると，C は

$y=\dfrac{7}{2x}$ のグラフを x 軸方向に $\boxed{}$ だけ，y 軸方向に $\boxed{}$ だけ平行移動したものであり，したがって，その漸近線は $\boxed{}$ と $\boxed{}$ であることがわかる．

（06　同志社大・工／一部）

2. 関数 $f(x)=\dfrac{3-2x}{x-4}$ がある．方程式 $f(x)=x$ の解を求めよ．また，不等式 $f(x)\leqq x$ を解け．

（06　南山大・経）

3. 関数 $f(x)=4+\dfrac{5}{x}$ $(x>0)$ の逆関数 $g(x)$ を求めると，$g(x)=\boxed{}$ $(x>4)$ である．$y=g(x)$ のグラフは，$y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に a，y 軸方向に b だけ平行移動した曲線である．このとき，a，b の値の組は $(a,\ b)=\boxed{}$ である．

（15　芝浦工大）

4. 関数 $y=\dfrac{2x+5}{x+2}$ $(0\leqq x\leqq 2)$ の逆関数を求めよ．

また，その定義域を求めよ．

（16　広島市立大）

5. 関数 $f(x)=\sqrt{7x-3}-1$ について考える．

（1）$f(x)$ の逆関数は

$f^{-1}(x)=\boxed{}$ $(x\geqq\boxed{})$ である．

（2）曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=x$ の交点の座標は

$\boxed{}$，$\boxed{}$ である．

（3）不等式 $f^{-1}(x)\leqq f(x)$ の解は $\boxed{}$ である．

（15　金沢工大）

6. 関数 $y=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$ $(x>0)$ の逆関数を求めよ．

（10　東京電機大）

7. $f(x)=x+x^2$，$g(x)=-x+x^3$ に対し，$f(g(x))-g(f(x))$ を計算せよ．

（16　東京都市大・工，知識工）

8. 関数 $f(x)=\dfrac{2x-3}{x-2}$ に対し，合成関数 $f(f(f(x)))$ を求めよ．

（15　東京都市大・工，知識工）

◆練習問題の解答

1. 最初の空欄は，分子を分母より低次にせよ，ということです．

解　$$-\frac{4x+3}{2x+5}=-\frac{2(2x+5)-7}{2x+5}=\boldsymbol{-2}+\frac{7}{2\left(x+\dfrac{5}{2}\right)}$$

よって C は，$y=\dfrac{7}{2x}$ のグラフを x 軸方向に $\boldsymbol{-\dfrac{5}{2}}$ だけ，y 軸方向に $\boldsymbol{-2}$ だけ平行移動したものであり，漸近線は

$\boldsymbol{x=-\dfrac{5}{2}}$ と $\boldsymbol{y=-2}$

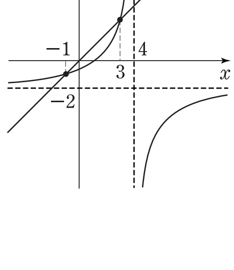
2. 後半はグラフを利用できます（曲線 $y=f(x)$ が直線 $y=x$ の下側にある部分を考える）．

解　$f(x)=x$ のとき，$\dfrac{3-2x}{x-4}=x$

$\therefore$　$3-2x=(x-4)x$　　$\therefore$　$x^2-2x-3=0$

$\therefore$　$(x+1)(x-3)=0$

$\therefore$　$\boldsymbol{x=-1,\ 3}$



$$f(x)=\frac{-2(x-4)-5}{x-4}$$

$$=-2-\frac{5}{x-4}$$

であることにも注意すると，

グラフは左下図のようになる．

よって，$f(x) \leqq x$ の解は，$\boldsymbol{-1 \leqq x \leqq 3,\ 4 < x}$

3. 逆関数を，$f(x)$ を y とおき，x を y で表し，x と y を入れかえて求める練習をしましょう．

解　$f(x)$ を y とおくと，$y=4+\dfrac{5}{x}$

$\therefore\ y-4=\dfrac{5}{x}\qquad \therefore\ x=\dfrac{5}{y-4}$

x と y を入れかえて，$y=\dfrac{5}{x-4}\qquad \therefore\ \boldsymbol{g(x)=\dfrac{5}{x-4}}$

これは $y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に 4，y 軸方向に -4 だけ平行移動したものである．よって，

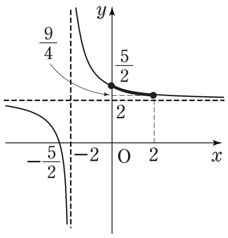
$$\boldsymbol{(a,\ b)=(4,\ -4)}$$

4. 逆関数の定義域は，元の関数の値域です．グラフをかけばとらえられます．分子を分母より低次の形に直しましょう．

解　$y=\dfrac{2x+5}{x+2}$

$=\dfrac{2(x+2)+1}{x+2}$

$=2+\dfrac{1}{x+2}$ ……①



よって，このグラフは図のようになり，$0 \leqq x \leqq 2$ のとき，$\dfrac{9}{4} \leqq y \leqq \dfrac{5}{2}$．**逆関数の定義域は** $\boldsymbol{\dfrac{9}{4} \leqq x \leqq \dfrac{5}{2}}$

①から x を y で表す．①により，$y-2=\dfrac{1}{x+2}$

$\therefore\ x+2=\dfrac{1}{y-2}\qquad \therefore\ x=\dfrac{1}{y-2}-2$

x と y を入れかえて，**逆関数は，**$\boldsymbol{y=\dfrac{1}{x-2}-2}$

5.（3）　$y=f(x)$ と $y=f^{-1}(x)$ のグラフは，直線 $y=x$ に関して対称であることを使います．

解　（1）　$y=\sqrt{7x-3}-1$ ……① のとき，

$\sqrt{7x-3}=y+1\qquad \therefore\ 7x-3=(y+1)^2$ …………②

$\therefore\ x=\dfrac{(y+1)^2+3}{7}$

$\therefore\ \boldsymbol{f^{-1}(x)=\dfrac{1}{7}(x+1)^2+\dfrac{3}{7}}$ …………③

$\sqrt{7x-3} \geqq 0$ であるから，①の y の値域は $y \geqq -1$

よって，$f^{-1}(x)$ の定義域は，$\boldsymbol{x \geqq -1}$

（2）　$f(x)=x$ のとき，②で $y=x$ のときで，

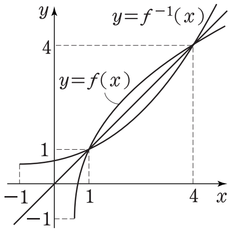
$7x-3=(x+1)^2\qquad \therefore\ x^2-5x+4=0$

$\therefore\ (x-1)(x-4)=0\qquad \therefore\ x=1,\ 4$

よって，求める交点の座標は

(1，1)，(4，4) ……………………………④

（3）　$y=f(x)$ と $y=f^{-1}(x)$ $(x \geqq -1)$ のグラフは，放物線の一部であり，①，③，④により，右図のようになる．右図から，$f^{-1}(x) \leqq f(x)$ となる x の範囲は，$\boldsymbol{1 \leqq x \leqq 4}$



6. x を y で表す際に，x の 2 次方程式になりますが，$x>0$ の条件から，解の一方に決まります．

解　$y=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$ $(x>0$ ……①$)$ のとき，両辺を $2x$ 倍して，$2xy=x^2-1$

$\therefore\ x^2-2yx-1=0$

x について解くと，$x=y\pm\sqrt{y^2+1}$

$\sqrt{y^2+1}>y$ であるから，①により，$x=y+\sqrt{y^2+1}$

x と y を入れかえて，**逆関数は，**$\boldsymbol{y=x+\sqrt{x^2+1}}$

7. 答えは 0 とは限りません．

解　$f(x)=x+x^2$，$g(x)=-x+x^3$ のとき，

$f(g(x))=f(-x+x^3)=(-x+x^3)+(-x+x^3)^2$

$=-x+x^3+x^2-2x^4+x^6$

$=x^6-2x^4+x^3+x^2-x$

$g(f(x))=g(x+x^2)=-(x+x^2)+(x+x^2)^3$

$=-x-x^2+x^3+3x^4+3x^5+x^6$

$=x^6+3x^5+3x^4+x^3-x^2-x$

よって，

$$\boldsymbol{f(g(x))-g(f(x))=-3x^5-5x^4+2x^2}$$

8. 分子を分母より低次な形に直して計算した方が，合成関数 $f(f(x))$ を計算する際に $f(x)$ を代入する箇所が減るぶん少し楽になります．

解　$f(x)=\dfrac{2x-3}{x-2}=\dfrac{2(x-2)+1}{x-2}$

$=2+\dfrac{1}{x-2}$

のとき，

$f(f(x))=2+\dfrac{1}{f(x)-2}=2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{x-2}-2}$

$=2+(x-2)=x$

よって，$f(f(f(f(x))))=f(x)=\boldsymbol{\dfrac{2x-3}{x-2}}$