大学への数学

入試のツボを押さえる

重点学習

数学ⅠAⅡB

青木亮二 著

東京出版

はじめに

くだらないことにクスリと笑ったり，ちょっとした「からくり」に面白さを感じたり．

数学を学んでゆく上で，「この問題はこう解けばよい」という姿勢だけで先へ先へと進んでゆくのは，非常にもったいないことです．

- どうすればそのような発想になるのか
- 解法のアイデアは他に生かせないのか
- 結局はどこが最大のカギとなったのか

といったことを考えてみるだけで，数学の勉強は非常に楽しいものになるからです．

「なんだ，えらそうに「すばらしい解答」を述べているけれど，結局は単にこう考えたってだけじゃん！」

「うわぁ，同じようにしてこんな問題も解決できちゃうんだ！」

「すごい結果にみえるけれど，からくりは実にくだらない，ああくだらない」

もちろん，すべての数学の問題で，いちいちこのようなリアクションをすることは不可能です．ですが，3 日に 1 回，そのようなシーンに出くわすだけで，数学力以前にまず，日々の生活が充実します．

本当に面白さを感じたことは，人に伝えたくなります．周りの友人に直接話す以外にも，学校の先生にレポートをおくったり，遠方の友人に手紙を送ったり，異国の友人にスカイプで話したり．

そして，面白さを感じるうえで，一番のポイントが「くだらない」ことです．くだらないと思うからこそ，面白いと思うのです．すばらしいと思うことがあっても，そこに面白さはありません．数学を学ぶということは，くだらなさを学ぶことです．それを通して，人としての洞察力と感動力，そして他者に対する表現力を磨くことなのです．（だから数学ができるようになると英語も強くなるのですよ．逆は然りではないけれど．）

本書においては，数学の問題集という側面と同時に，この「くだらなさを学ぶ」要素もふんだんに取り込ませていただきました．基本問題からちょっとした応用問題までを通して，「ふふっ」と笑顔になるシーンを想いながら構成しています．

時に実力養成のために，時には答え合わせ用として，ある時はより深い理解のために，また，たまには息抜きがわりとして，本書とふれあってくれれば幸いです．

青 木 亮 二

本書の構成と利用法

○本書の内容

基本的な事柄についての理解があり，一通りの「練習問題」をこなしてきた，という方を対象としています．もちろん，数学のエキスパートのみを対象としたものにはなっていませんが，未修事項を一から学ぶというには若干ハードルが高い内容になっています．

ですから，現在進行形で数ⅠAⅡBを学習中の方は，本書とは別に，参考書などと併用して使うことをお勧めします．いわゆる「網羅型」のものにはなっていないことをご承知おきください．

一通りはやったぞ，という方にとっては，本書は絶好の「サプリメント」となることと思います．「ただの問題」に，さまざまな角度からの見方を与えたり，共通した「考え方」を提示したり，と，すんなり答え合わせをするだけでは済まない構成になっていますから．

とはいうものの，使い方は好み次第．後述するように，本書の使い方にはさまざまなやり方があるかと思います．あなたにとって，都合の良いように使っていただければよいのです．

○本書の構成

各セクションごとに，問題編と解説編に分かれたつくりになっています．まずは問題編に取り組み，解説編を通して答え合わせをしてもらいます．各セクションでの問題数は平均5題程度となっているので，一つ一つの問題を解いて，その問題ごとに答え合わせをするのではなく，そのセクションの問題を一通り解いた上で，一気に答え合わせをするのが基本的な使い方となります（解説編の中には，問題編に収録されていない問題も少なからずあります．答え合わせをしてゆく中で，目にとまった問題があれば，それもあわせて取り組みましょう）．

想定している利用法をいくつかご紹介します．

【利用法その1：とにかく問題を解きたい！】

①各セクションの問題を一通り解く（★★★以上は飛ばしてもよい）．

→②一セクション分の問題を解き終えたら，解説編の「囲みの問題」の部分だけを見ていき，該当する問題番号を探して答えあわせをする．

→③答えが合わない問題があれば，結果が一致するまで取り組む．

→④結果がすべて合えば，あるいは，解けなかった問題すべてにあきらめがつけば，次のセクションへと進む．

【利用法その2：プラスαの手法・発想を学びたい！】

①各セクションの問題を一通り解く．

→②→③

→⑤結果がすべて合えば，あるいは，解けなかった問題すべてにあきらめがつけば，解説編を一通り読む．

→⑥解説編中に登場する，問題編には登場していない問題があれば，それにも取り組む．その後，次のセクションへと進む．

【利用法その3：まずは基礎固めからしっかりやりたい！】

⑦各セクションの問題のうち，「★」の問題をすべて解く．

→②→③→⑤

→⑧「★★」以上の問題の解説を参考に，自分なりに答案を作ってみる．その後，次のセクションへと進む．

【利用法その4：読み物として楽しみたい！】

⑨気の向いたときに気の向いたセクションの解説編を読む．

→⑩気の向いたときに，解説編を読んだセクションの問題編の問題に取り組む．

→⑪基本的には「積読（つんどく）」

いずれの使用法においても，一日1セクションのペースで無理なく進める量になっています．また，各セクションは独立した内容になっていますから，必ずしも章立てどおりに進めてゆく必要はありません．どうぞ，無理のない形で進めて下さい．

◯問題の構成

テーマは数学Ⅰ・A・Ⅱ・Bの範囲になっており，数学Ⅲを学んでおらずとも対応できる問題のみを収録しています．ですが，厳密には数学Ⅲの範囲にあたるものもちらほらと登場しますが，それは主に「極限」の部分のみです．

$\lim_{n\to\infty} f(n)$ という表現は，n がものすごく大きくなるときに $f(n)$ がどうなるか，ということを表わすもので，たとえば $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$ や $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}$ は，どちらも（分母はどんどん大きくなるので）0 に，また「n^2」は n が大きくなると果てしなく大きくなるので「$\lim_{n\to\infty} n^2=\infty$」のように表現します（理系の方にはあたりまえの話でしょう）．本書においては「これくらいはわかるでしょう？」という観点から，常識のように表現しているので，その点はご了承ください（そこまでふんだんに登場するわけではありません）．

◯問題の難度

通常の問題集では，問題に出典（どこの大学の問題か）が付されていることが多いですが，本書においては，基本的には出典を載せることはしていませんし，そもそも大学入試からではない創作問題もふんだんにとりこまれています．皆さんが学習してゆく上で，余計な邪念が入らないように，との配慮からです．（職業に貴賤なし，というのと同様，良い問題はどこの大学の問題であろうと良い問題．悪い問題はどこの大学だろうが悪い問題．といいつつ，例外的に出典が明記されている問題もありはします．）

ですが，それでは問題を解きにかかる上で難度の目安になるものがなくなってしまいますから，各問題ごとに「★」をつけることで，問題の中身を表現しました．

★…いわゆる基本問題．基本が定着しているならば解けなければまずいよ，という問題．
★★…基本問題というわけではないが，受験生としてはそれなりに対応できて欲しい問題．30 分が目安．
★★★…それなりに手数もかかり，実際の入試においては「あとまわし」にしてもよいレベルだが，実力養成の観点からは仕上げられるようになっておいて欲しい問題．30 分ないし 1 時間で仕上げるのが目安．
★★★★…ここまではできなくてもよいが，せっかくなので取り組んでみてください，というチャレンジ問題的位置づけにある問題．時間は無制限でよい．

本書に収録されている問題の大半は「★」か「★★」ですので，一つずつの難度にはもちろん差があります．「定石さえ身についていれば，確実に答えが出せるはず」という類の問題には（多少重くても）すべて「★」をつけていますので，特に「★」の問題にはかかる時間や難度に差があることもあります．★★以降には目安の時間を設けていますが，★には目安の時間を設けていないのは，そういう事情によります．

◯解説編について

文章を読む，というのは，とても大変な作業です．本気で「読む」のは，とてもつらい作業です．ですが，読む力がなければ，書く力も表現する力も備わりません．少しでも「読んでみようかな」という気が起きるように，筆者はそれはそれは苦労をして，やわらかい表現に努めているわけですが，それでも，私自身，人の文章を読むということを好きこのんでいるわけではありませんので（ちなみに，数学と無関係な小説はよく読みます．新書みたいなのは説教くさい割りに中身がぺらぺらなので，読む気がしません），皆さんに「ぜひ解説編を読んでくれ」という気は毛頭ありません．

ですから，「全部読み倒してやるぞ！」と意気込むのではなく，特にはじめのうちは「答え合わせのついでに目に入ったところだけを読む」というペースでやっていただいて構いません．徐々に「読む」作業を増やしていってもらえればよいのです．もちろん，最終的には全編を通して「読んで」いただきたいのですが．

入試のツボを押さえる

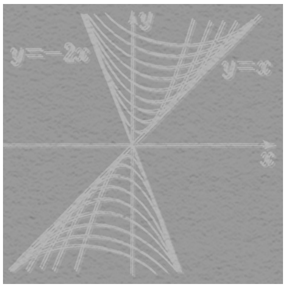
重点学習

数学ⅠAⅡB

目　次

はじめに……………………………………………… 3

本書の構成と利用法……………………………… 4



第１章　場合の数

1　場合の数での標準装備　8

2　Imagine　14

3　毛色の変わった経路の問題　20

4　「置き換え」にこだわってみる　26

第２章　確　率

1　岡目八目な確率　32

2　細かく分けて考えれば　38

3　何が対等かが問題だ　44

4　耐えて耐えての確率　50

5　有名問題でおもてなし　56

第３章　整数，多項式，論証

1　余りから学ぶ「あたりまえ」　64

2　有理数・無理数とその論証　70

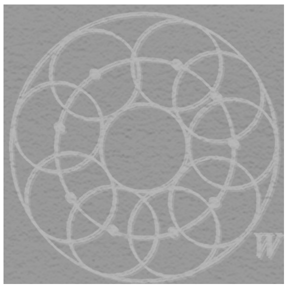
3　論証問題にのぞむということ　78

4　多項式がらみの論証　84

5　素因数分解形を考える　90

6　「べき乗数」いろいろ　96

7　仕上げはフェルマーで　104

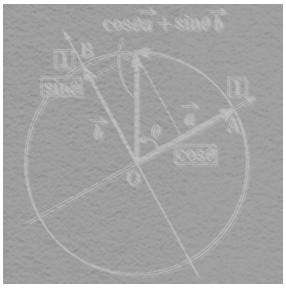


第４章 数　列

1　和の問題のさまざま　112
2　一般項は求めずに　118

第５章 ベクトル，図形

1　ベクトルの１次結合と回転　124
2　内積についてのお話　130
3　順番に動かせば　136
4　外接円と内接円　142

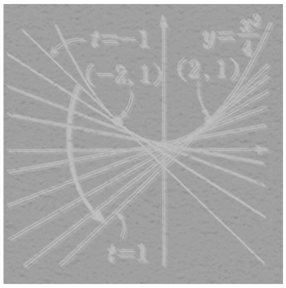


第６章 方程式，不等式，数Ⅱの微積分

1　解と係数の蜜な関係　148
2　数Ⅱ微積分の問題たち　154
3　４次以上の関数の微分　160
4　おめかししてみた　168
5　もっておくべき二つの見方　174
6　はじかしい Max，Min　180

第７章 座　標

1　ひねり出された式　186
2　あたりまえにもほどがある　192
3　変換後の図形の式　198
4　軌跡問題へのさまざまなアプローチ　204
5　吟味のこころ　210



ミニ講座

①　レイリーの定理　102
②　ウィルソンの定理　110
③　相加相乗平均の不等式の証明　166

Teatime

覚えておくと人生が565倍楽しくなる数たち　111
どうでもいい話　～いまとむかし～　167

◇1 場合の数での標準装備

数 A

問題編

チェック！

難易度
★

問題 1-1.1

区別のつかない赤玉と白玉が 6 個ずつある．これら 12 個を横一列に並べる方法のうち，赤と白とがこの順でとなりあう箇所がちょうど 3 つであるようなものは何通りあるか．
（例えば，赤白白白赤白赤白白赤赤赤　のような並びが条件を満たす．）

チェック！

難易度
★

問題 1-1.2

n 桁（$n \geqq 2$）の正の整数で，145221 や 26000 の様に，同じ数字がとなりあうような部分を持つものは何通りあるか．

チェック！

難易度
★

問題 1-1.3

n 桁の正の整数で，各桁の積が 6 の倍数となるものはいくつあるか．ただし，0 も 6 の倍数である．

チェック！

難易度 ★★

問題 1-1.4

n 桁（$n \geqq 2$）の正の整数で，となりあう桁の数字が異なるようなものの集合 S_n の要素のうち，1 の位が 0 であるものの個数 a_n を求めよ．

チェック！

難易度 ★★

問題 1-1.5

A, A, A, A, B, B, C, C, C, C を横一列に並べて得られる順列を考える．

（1）　A, B がこの順でとなりあう箇所が 2 箇所あるようなものは何通りあるか．

（2）　A, B がこの順でとなりあう箇所がちょうど 1 箇所であるようなものは何通りあるか．

◇1 場合の数での標準装備

数 A

解説編

本稿では，場合の数の問題を扱います．五月雨式に，「こんなパターンもある，あんなパターンもある」と列挙してゆくのも芸がありませんから，「標準装備にしておきたい」ことがら２つ，にテーマをしぼってお話をしたいと思います．

ちなみに，五月雨は「さみだれ」と読みます．いちいち五月蝿いことをいわなくても大丈夫ですね．

§1 「重複組合せ」はおいしい

私たちは，ある程度の数え上げは「基本」として身につけています．

・重複順列：異なる n 個のものを，重複を許して r 個並べる方法は n^r 通り

・順列：異なる n 個のものを，重複を許さずに r 個並べる方法は ${}_n\mathrm{P}_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$ 通り

・組合せ：異なる n 個のものを，重複を許さずに r 個選ぶ方法は ${}_n\mathrm{C}_r=\dfrac{n!}{(n-r)!r!}$ 通り

こうしてみてみると，一つだけ「まとめそこなっている」ものの存在がはっきりと浮かび上がってきます．そうです，「重複組合せ」です．

教科書上では「発展」として取り扱われているものですが，これを機会に「標準装備」としてみましょう．

> **【重複組合せ】**
> 異なる n 個のものから，重複を許して r 個選ぶ組合せの総数を ${}_n\mathrm{H}_r$ で表わす．
> $${}_n\mathrm{H}_r={}_{n+r-1}\mathrm{C}_r \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots * $$
> である．

例えば，普通の組合せ ${}_n\mathrm{C}_r$ が

「n 種類の果物から，r 個の異なる果物を用いてフルーツバスケットをつくる方法」

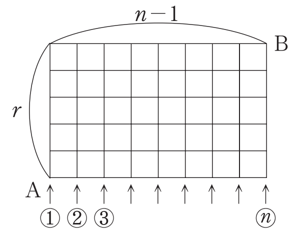
を表わすのに対して，重複組合せ ${}_n\mathrm{H}_r$ は

「n 種類の果物から，r 個の果物（同じものを用いてもよい）を用いてフルーツバスケットをつくる方法」

を表わします．りんご，なし，みかん，かき，を用いて，10 個の果物からなるフルーツバスケットを作る方法は ${}_4\mathrm{H}_{10}$ で表わされます．$n<r$ でも，${}_n\mathrm{H}_r$ が定義できることに注意してください．

この重複組合せが＊の様に計算できることは，適当な場合の数のモデルを２通りに計算することで分かります．ここでは，「経路」を用いて示してみましょう．

図のような，$r\times(n-1)$ の小道を用意し，A から B への最短経路の総数 S を考えます．



「ふつうに」解くならば，「縦（↑）」r 個と「横（→）」$n-1$ 個の順列と，A から B への最短経路とが一対一に対応することから，$S={}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$ で計算しますが，図の①からⓝの縦道の，どの r 箇所で上に進むかを考えても S を立式できます．

①からⓝの中から，重複を許して r 箇所を選べば，それに応じて A から B への最短経路が得られ，逆に，A から B への最短経路から，重複組合せを得ることができます．n 箇所から重複を許して r 箇所選ぶ重複組合せと最短経路とが一対一に対応するので，$S={}_n\mathrm{H}_r$ とも表わせるということです．

これで，＊の結果を得ることができました．

重複組合せ自体は，毎回，対応付けを考えて計算することも可能なのですが，さらりと「あ，重複組合せだ」と見ることができるシーンにおいては，H でその場合の数を表現して，＊で計算してしまう方が，楽ですしストレスも感じません．

さっそくみてみましょう．

> **問題**　n を正の整数とする．
> （１）　$x+y+z=n$ の非負整数解（x，y，z）の組数を求めよ．
> （２）　$1\leqq x\leqq y\leqq z\leqq n$ を満たす整数 x，y，z は何組あるか．

慣れてくるとどちらも「あたりまえ」に見えますが，ここでは「少し丁寧に」解説をつけておきましょう．

解　（1）　X，Y，Z から，重複を許して n 個選ぶ方法は ${}_3\mathrm{H}_n$ 通りで，X，Y，Z をそれぞれ x，y，z 個選ぶと考えれば，この方法は $x+y+z=n$ の非負整数解と一対一に対応するので，求めるべき場合の数は

$${}_3\mathbf{H}_n={}_{n+2}\mathrm{C}_n={}_{n+2}\mathbf{C}_2$$

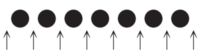
（2）　1 以上 n 以下の整数から，重複を許して 3 つを選び，それを小さい順に x，y，z とすれば，これは与えられた条件を満たす．逆に，$1\leqq x\leqq y\leqq z\leqq n$ を満たす整数 x，y，z を 3 つの整数の組とみなせば，その組合せは，1 以上 n 以下の整数から重複を許して 3 つを選ぶ組合せにもなっている．従って，条件を満たす x，y，z の組と，1 以上 n 以下の整数から重複を許して 3 つを選ぶ重複組合せは一対一に対応するとわかるので，求めるべき場合の数は ${}_n\mathrm{H}_3={}_{n+2}\mathbf{C}_3$　終

冷静に考え，そしてかつ慣れてくれば，（2）の組数は重複組合せの総数の定義そのものととらえることもできますし，（1）は「つまり x，y，z を合計 n 個集めるということ」というイメージで理解できます．答案作成の上では，（1）（2）とも，単に「〜なる重複組合せと考えて」の一言で済ませてよいでしょう．

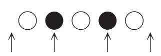
> **問題**　区別の付かない赤玉と白玉が，それぞれ 7 個と 3 個ずつある．これらを，白玉同士がとなりあわないように横一列に並べる方法は何通りあるか．
> 2 通り以上の方法で求めよ．

単なる組合せの問題に帰着させるか，重複組合せの話題に帰着させるか，で 2 通りの立式が可能です．

解 1　あらかじめ赤玉を横一列に並べ，図の 8 つの矢印から，異なる 3 箇所を選んで白玉を挿入すると考えれば，求めるべき場合の数は ${}_8\mathrm{C}_3=\mathbf{56}$ 通り．



解 2　あらかじめ，白玉同士の間に赤玉を一つずつ入れておき，図の 4 つの矢印のうち，同じ箇所を選ぶことを許して 5 箇所選び，そこに赤玉を挿入すると考えれば，求めるべき場合の数は ${}_4\mathrm{H}_5={}_8\mathrm{C}_5=\mathbf{56}$ 通り．



⇨**注**　この問題を一般化することでも，重複組合せの計算式＊を得ることが可能です．

場合の数や確率の問題に接する場合，「自分の答が正しいわけがない」と疑ってかかることが一番肝要です．この手の話題においては，「勘違いに気付きにくい」という側面が他の分野に比べて非常に強いからです．ですから，このようなやさしい問題に対してでも，2 通り以上の方法で答が出せることはとてもおいしいことなのです．

では，少し骨っぽい問題に挑戦してみましょう．

> **問題 1-1.1**　区別のつかない赤玉と白玉が 6 個ずつある．これら 12 個を横一列に並べる方法のうち，赤と白とがこの順でとなりあう箇所がちょうど 3 つであるようなものは何通りあるか．
> （例えば，赤白白白赤白赤白白赤赤赤　のような並びが条件を満たす．）

解　連続するいくつか（一つ以上）の同色の玉を囲んで考えれば（例えば，先の例だと

赤　白白白　赤　白　赤　白白　赤赤赤

の様に同色同士が連続するので，これを

$\boxed{\text{赤}}$ $\boxed{\text{白}}$ $\boxed{\text{赤}}$ $\boxed{\text{白}}$ $\boxed{\text{赤}}$ $\boxed{\text{白}}$ $\boxed{\text{赤}}$

と表現することにする），ありえる囲みの配列は

（あ）$\boxed{\text{赤}}$ $\boxed{\text{白}}$ $\boxed{\text{赤}}$ $\boxed{\text{白}}$ $\boxed{\text{赤}}$ $\boxed{\text{白}}$ $\boxed{\text{赤}}$
（い）$\boxed{\text{白}}$ $\boxed{\text{赤}}$ $\boxed{\text{白}}$ $\boxed{\text{赤}}$ $\boxed{\text{白}}$ $\boxed{\text{赤}}$ $\boxed{\text{白}}$
（う）$\boxed{\text{赤}}$ $\boxed{\text{白}}$ $\boxed{\text{赤}}$ $\boxed{\text{白}}$ $\boxed{\text{赤}}$ $\boxed{\text{白}}$
（え）$\boxed{\text{白}}$ $\boxed{\text{赤}}$ $\boxed{\text{白}}$ $\boxed{\text{赤}}$ $\boxed{\text{白}}$ $\boxed{\text{赤}}$ $\boxed{\text{白}}$ $\boxed{\text{赤}}$

の 4 パターンである．

（あ）のパターンのものは，あらかじめ赤と白を 4 個と 3 個，交互に並べておき，余った赤 2 つと白 3 つを，同じ囲みを許して，赤は $\boxed{\text{赤}}$ のどこかに，白は $\boxed{\text{白}}$ のどこかに挿入すると考えれば，

赤の入れ方は ${}_4\mathrm{H}_2={}_5\mathrm{C}_2=10$ 通り

白の入れ方は ${}_3\mathrm{H}_3={}_5\mathrm{C}_3=10$ 通り

なので，$10\times10=100$ 通りあるとわかる．

（い）のパターンのものも，（あ）とまったく同様に考えて 100 通りある．

（う）のパターンのものは，赤の入れ方が ${}_3\mathrm{H}_3$ 通りになる以外は（あ）と同じだが，${}_4\mathrm{H}_2={}_3\mathrm{H}_3$ であったので，結局（あ）と同じで 100 通りあることになる．

（え）のパターンのものも，白の入れ方が ${}_4\mathrm{H}_2$ 通りになる以外は（あ）と同じなので，やはり 100 通りある．

以上から，求めるべき場合の数は $100\times4=\mathbf{400}$ 通りとわかる．終

一通りの攻め方だけだと不安が少し残ります．違った角度からの別解もみてみましょう．

別解　$\boxed{\mathrm{AB}}$，$\boxed{\mathrm{AB}}$，$\boxed{\mathrm{AB}}$，A，A，A，B，B，B を横一列に，ただし A と B がこの順でとなりあわないように並べる方法の総数を求めればよい．

$\boxed{\mathrm{AB}}$ をＣと表わしなおせば，

A，A，A，B，B，B，C，C，C

を横一列に，ただしＡとＢがこの順でとなりあわないように並べる方法の総数を求めればよい．

まず，A，A，A，C，C，Cを横一列に並べ，そののち，Ａの右側以外の４箇所から，重複を許して３箇所選び，Ｂを挿入すると考えれば，求めるべき場合の数は

$${}_6C_3 \times {}_4H_3 = 20 \times {}_6C_3 = 20 \times 20 = \mathbf{400} \text{ 通り．}$$ 終

立式の仕方が違う様子をみれば，結論の一致をみることで「安心」を買うことができます．大切にすべき「安心感」とは，原発問題のような大きなところ以外にも求めるべきものです．

§2　余事象の「活用」

場合の数を，余事象（☞注）に着目して数えることはしばしばあります．基本的に，余事象に着目するのは，

条件を満たさないパターンが圧倒的に少ない

場合が基本で，例えば，次のような問題であれば，迷わず余事象に着目して処理，で問題ないでしょう．

➩注　ここでは，確率の用語を広くとらえ，「条件を満たさないもの」という意味で「余事象」という言葉を用いています．正式な使い方ではないことをご承知おきください．

> **問題 1-1.2**　n 桁（$n \geqq 2$）の正の整数で，145221 や 26000 の様に，同じ数字がとなりあうような部分を持つものは何通りあるか．

条件を満たすもののパターンは無数（例えば，$n=6$ としても 145221 や 223445 や 233333 など，さまざまな「形」があります）なのに対して，条件を満たさないものは，「左から二番目以降の桁は，どれも直前の桁の数字と異なる」ようなものの１パターンしかありません．

解　n 桁の正の整数は全部で $9 \times 10^{n-1}$ 通りあり，そのうち，条件を満たさないものは，

首位の数の選び方…1〜9 の９通り

首位以降の数字の選び方…左隣の数字以外の９通り

より，$9 \times 9^{n-1} = 9^n$ 通りある．

従って，求めるべき場合の数は $\mathbf{9 \times 10^{n-1} - 9^n}$ 通り．終

> **問題 1-1.3**　n 桁の正の整数で，各桁の積が６の倍数となるものはいくつあるか．ただし，０も６の倍数である．

「6の倍数」は「2の倍数かつ３の倍数」と，素因数分解形で考えるのが基本ですが，２の倍数かつ３の倍数であるものといっても，やはりさまざまなパターンがあります（$n=3$ だとしても，123，634，501と，やはりさまざまな「形」がありますね）．

解　n 桁の正の整数 $9 \times 10^{n-1}$ 通りのうち，条件を満たさないものは，

A：各桁がどれも２の倍数ではない

B：各桁がどれも３の倍数ではない

の少なくとも一方の条件を満たすものである．

$N(X)$ で，X を満たすものの個数を表わすことにすれば，

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$$

であり，

$N(A) =$（各桁が 1, 3, 5, 7, 9 のいずれかのものの個数）

$= 5^n$

$N(B) =$（各桁が 1, 2, 4, 5, 7, 8 のいずれかのものの個数）

$= 6^n$

$N(A \cap B) =$（各桁が 1, 5, 7 のいずれかのものの個数）

$= 3^n$

であるから，求めるべき場合の数は

$\mathbf{9 \times 10^{n-1} - 5^n - 6^n + 3^n}$ 通り．終

ここであげたような「極端なケース」以外の場合でも，あえて余事象に着目することで，違った視点でアプローチすることができたり（従って，２通り以上の解法で解くことにより安心感が買える！），より楽に解を得られたりします．この章でみておきたいのは，先の例よりも，むしろ次のような問題に対する攻め方です．

> **問題 1-1.4**　n 桁（$n \geqq 2$）の正の整数で，となりあう桁の数字が異なるようなものの集合 S_n の要素のうち，１の位が０であるものの個数 a_n を求めよ．

意識的に「余事象は？」と考えてみましょう．S_n の要素の総数は容易に計算できましたから，「S_n の要素のうち，１の位が０でないものの個数 b_n」を考える，というのが素直な発想ですが，

「a_n を求めようか，b_n を求めようか」ではなく，「両方求めちゃおう！」

というのが，ここで常識にしておきたいことがらです．

解　S_n の要素のうち，１の位が０であるものからなる集合を T_n，１の位が０でないものからなる集合を U_n とし，U_n の要素の個数を b_n とする．

T_n の要素一つに対して，末尾に 1〜9 の数字を加えることで U_{n+1} の要素が９個得られ，U_n の要素一つに対しては，末尾に 0〜9 のうち，もとの要素の１の位（０ではない）以外の９つを加えることで，T_{n+1} の要素１つ

と，U_{n+1} の要素 8 つが得られるから，

$$\begin{cases} a_{n+1}=b_n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ b_{n+1}=9a_n+8b_n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

である．$k\times①+②$ から

$$ka_{n+1}+b_{n+1}=9a_n+(k+8)b_n \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

が得られ，$k:1=9:(k+8)$ となるような k を求めれば，

$$k(k+8)=9 \iff k=1,\ -9$$

であるから，このときの③式を考えれば，

$$a_{n+1}+b_{n+1}=9(a_n+b_n)$$
$$-9a_{n+1}+b_{n+1}=-(-9a_n+b_n)$$

$a_1=0$，$b_1=9$ と考えて計算して，

$$a_n+b_n=9^{n-1}(a_1+b_1)=9^n$$
$$-9a_n+b_n=(-1)^{n-1}(-9a_1+b_1)=9\cdot(-1)^{n-1}$$

辺々引いて整理することで，$a_n=\dfrac{\mathbf{9^n-9\cdot(-1)^{n-1}}}{\mathbf{10}}$ とわかる．㊚

もう最後の問題になってしまいました．仕上げの問題です．余事象の「活用」を意識して，取り組んでみてください．複数の方法でアプローチし，絶対的な確信を持って答え合わせをしてみましょう．

> **問題 1-1.5** A, A, A, A, B, B, C, C, C, C を横一列に並べて得られる順列を考える．
> （1） A, B がこの順でとなりあう箇所が 2 箇所あるようなものは何通りあるか．
> （2） A, B がこの順でとなりあう箇所がちょうど 1 箇所であるようなものは何通りあるか．

（1）は基本問題という認識でよろしいでしょうが，（2）は慎重に行きたいものです．確率の問題の場合にも使える手ですが，

自分の設定したフィールドで，順々に考える

のが直接計算する上での重要手法となります．

解　（**1**） $\boxed{\mathrm{AB}}$, $\boxed{\mathrm{AB}}$, A, A, C, C, C, C を並べて得られる順列の総数と考えれば，

${}_8C_2\times{}_6C_2=28\times15=\mathbf{420}$ 通りである．

（**2**） まず A を 4 つ，B を 1 つ，A と B がこの順でとなりあうように並べる．そのような方法は，${}_5C_1$ 通りのうち，B, A, A, A, A 以外の 4 通りである．次いで，並べ終えた順列の「すきま」6 箇所のうち，A と B の間以外の 5 箇所（注→の↑の 5 箇所）の中から，重複を許して 4 箇所に C を入れる．そのような方法は

${}_5H_4={}_8C_4=70$ 通りある．

こうして出来上がった計 9 文字の順列の「すきま」のうち，A の右隣以外の 6 箇所のいずれかに B を入れる．そのような方法は 6 通りである．

以上から，題意を満たす順列の総数は

$4\times70\times6=\mathbf{1680}$ 通りあると分かる．㊚

⇨注　例えば，次のような流れで順列を構成するということです．

$$\underbrace{\ }_{\uparrow}\mathrm{A},\underbrace{\ }_{\uparrow}\mathrm{A},\underbrace{\ }_{\uparrow}\mathrm{A},\ \mathrm{B},\underbrace{\ }_{\uparrow}\mathrm{A}\underbrace{\ }_{\uparrow}\Rightarrow\underbrace{\ }_{\mathrm{C}}\mathrm{A},\ \mathrm{A},\underbrace{\ }_{\mathrm{C}}\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{A}\underbrace{\ }_{\mathrm{CC}}$$

$$\Rightarrow\underbrace{\ }_{\uparrow}\mathrm{C},\underbrace{\ }_{\uparrow}\mathrm{A},\ \mathrm{A},\ \mathrm{C},\underbrace{\ }_{\uparrow}\mathrm{A},\ \mathrm{B},\underbrace{\ }_{\uparrow}\mathrm{A},\ \mathrm{C},\underbrace{\ }_{\uparrow\mathrm{B}}\mathrm{C}\underbrace{\ }_{\uparrow}$$

$$\Rightarrow\mathrm{C},\ \mathrm{A},\ \mathrm{A},\ \mathrm{C},\ \mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{A},\ \mathrm{C},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C}$$

余事象を「活用」する，という発想に立つならば，「A と B がこの順にとなりあう箇所がないものも求めてしまえ」という考え方になるでしょう．10 文字の順列の総数は ${}_{10}C_4\times{}_6C_2=210\times15=3150$ 通りとすぐに分かりますから，どうせなら「総和が 3150 になる」ことを確かめておいたほうがよさそうです（実践的な話をすれば，その結果，余事象での答案作りの方が楽そうであれば，清書バージョンにそちらのほうを採用すればよいのです）．A と B がこの順にとなりあう箇所を持たない順列の総数を実際に求めてみましょう．

まず A と C を 4 つずつ，計 8 個を並べる方法は，${}_8C_4=70$ 通りあり，並べ終えた順列のすきま 9 箇所のうち，A の右隣以外の 5 箇所から，重複を許して 2 箇所に B を入れる方法は ${}_5H_2={}_6C_2=15$ 通りです．

従って，考えるべき順列の総数は $70\times15=1050$ 通りと分かり，確かに $420+1680+1050=3150$ です（！）

（2）を，$\boxed{\mathrm{AB}}$, A, A, A, B, C, C, C, C の順列の総数 ${}_9C_1\times{}_8C_3\times{}_5C_1=2520$ 通りから，（1）で数えた 420 通りを除いて 2100 通り，と求めるのは誤りです．A, B がこの順でとなりあうような箇所を 2 つ持つ順列，例えば

A, B, A, A, B, A, C, C, C, C

は，$\boxed{\mathrm{AB}}$, A, A, B, A, C, C, C, C とも A, B, A, $\boxed{\mathrm{AB}}$, A, C, C, C, C ともみることができるからです．（なので，2520 通りから，420 通りの 2 倍を引く必要があるのです．）

一通りのアプローチで，このような誤答を犯してしまった場合，まず自分で気付くのは不可能です．ですが，「過信せず，慎重に，複数のアプローチで」の姿勢があれば，十分に自分の誤り，おかしさに気付きえます．

そんな，人生の指針のようなものを示してくれる「場合の数」という分野が，私は好きです．「確率」はもっと好きです．