

# はじめに

難関校受験生向けの月刊誌「大学への数学」では、1957年の創刊以来、毎号（3月号を除く）

## 学力コンテスト（学コン）

という、創作問題を出題し、読者が答案を送り、それを添削して返却、また、成績優秀者の氏名を誌上で発表するというコーナーを設けています。

全国の優秀な方々が応募され、試験とは違って時間制限もない（締切はあります）、問題は難しめになり、それだけに、考えがいのある問題で、数学好きの高校生、大学受験生を魅了してきました。応募者の中からは、フィールズ賞を受賞された森重文先生を始めとする多くの高名な数学者が輩出され、また、他の分野でも、一線で活躍されている方々が多々いらっしゃいます。

答案を添削するスタッフ（学コンマン）も、読者時代は学コンで成績優秀者の常連だった人達ばかりで、

応募者→学コンマン→応募者→学コンマン…  
という学コンファンの流れが、連綿と受け継がれてきました。私自身、40年以上前の受験生時代は学コンに応募し、大学入学後は学コンマンになります、そのまま、東京出版・編集部に居座って、現在に至っています。

本書は、2005年～2014年に出題した学力コンテストの問題の中から、特に、解いて面白い、ためになる50問を精選しました。

大学入試の標準レベルの問題（入試問題を易し

い方から1～10に分けたとして6、7程度）をこなせて（完全に解けることまでは要求しません）、さらに上を目指す人を読者として想定していますが、そのような人でも、手こずる問題が少なくなっているでしょう。しかし、簡単には解けない問題に対して、知識だけに頼らず、自分の頭で考え、手を動かして立ち向かっていくことにより、たとえ答えには至らなくても、思考力、発想力が養われていきます。そして、考える過程において、また、解き終えた後には、十分な満足感・充実感が得られることでしょう。

学力コンテストの問題の中には、入試のレベルを超える難問もありますが、本書では、難しすぎる問題や、手間のかかりすぎる問題は取りあげていませんから、難関校の入試対策としても、十分に効果があります。

また、とりあえず入試に向けての実力養成を第一目的とする人でも、「大学への数学」や学コンに取り組んでいるうちに、数学の面白さ、楽しさを再認識することができるでしょう。

本書を手に取った皆さんも、学コンの問題を覚えることによって、自分の頭で考えることの充実感を味わっていただければと思います。また、月刊「大学への数学」の学力コンテストに応募されたことのない方は、本書をきっかけに、全国の学コン仲間の輪に加わりましょう。皆さんの御応募を心からお待ちしています。

／浦辺理樹

## ◆本書の構成と利用法◆

本書は、2005～2014年の月刊「大学への数学」の学力コンテストから、50問を精選したものです。すべて数ⅠAⅡBの範囲内（数Bはベクトル、数列）で解けるものですが、もちろん、数Ⅲで学ぶ事柄を用いて解いても結構です。

### ○問題編

#### ●問題

見た目の分野で分けてありますが、複数の分野にまたがるものや、例えば、外見は幾何の問題だがベクトルや座標が有効、といったものもあるかもしれませんので、先入観を持たない方がよいでしょう。

どの分野から始めてでも、同じ分野内では、どの問題から解き始めても結構です。

難易度は、前ページでも述べたように、難しめの問題（入試問題の発展レベル：難しい方から1～10に分けたとして8、9程度）が主体ですから、苦労したり、解決に至らなかったりしても、悲観するには及びません。なお、難易の感じ方は人それぞれなので、難しいハズだ、という先入観は無用です。

#### ●解答時間と正答率（p.16～17）

応募者の解答時間の内訳と正答率（25点満点の人の割合）をグラフにしました。本書の中での問題ごとの難易の一つの目安になるでしょう。ただし、正答率が低くなった問題は、本当に難しかったもののほか、ギロンに不備が起きやすかったり、多くの人が陥りがちなトラップがあつたりして完

答した人が少なくなったものもありますので、一律に難問であるというわけではありません。

#### ●ヒント（p.18～23）

思考力、発想力を養うために、まずは、自分の頭で考え、自分の手を動かしてみてほしいですが、手がかりが得られなかったり、途中で行き詰まつたりした人のために、ヒントのページを設けました。それをもとに、再度チャレンジするとよいでしょう。もちろん、いきなりヒントを見るのではなく、20～30分程度は、自力で問題に当たるようしましょう。

### ○解説編

問題文の右側に、平均点（満点は25点）、応募者の解答時間（20点以上の人について集計したもので、SS…30分以内、S…30分～1時間、M…1時間～2時間、L…2時間以上）、正答率を掲載しました。時間無制限で、締切ギリギリまで粘る応募者が多いので、平均点は高めになりますから、その点を割り引いて参考にして下さい。

解説編は、学力コンテスト応募者に、返送時に答案とともに配布する解説プリントをもとにしました。本書を刊行するに当たって、一部、編集部で加筆したり、重複がある部分などの修正をしたものもあります。

#### ●前書き

解答の前に、前書きとして、解決へのポイントや手がかりになることなどを書きました。p.18～

23のヒントと重複する部分もありますが、答えは出たもののメンドウな計算やギロンを強いられた人は、解答を見る前に、前書きを参考にして再検討するのもよいでしょう。

#### • 解答

筋の良い解法を吟味して掲載しました。ギロンの飛躍がないように説明も省略せずに書いてあるので、試験の答案としても、そのまま通用するものです。単純計算は省略した部分もありますが、工夫した場合は、そのことがわかるように、途中過程も書きました。

なお、ほとんどの人が思いつかないような巧妙すぎる方法は、ここでは採用しませんでしたが、皆さんにも紹介したいものは、あの解説の中で掲載しました。

#### • 解説

解答中のポイント、解答で用いた重要事項や関連事項を掘り下げて解説しました。自力では答えに至らなかった人も、解説を読むことによって得られるものが多いことでしょう。教科書の基本事項レベルの事柄は省略しましたので、苦手分野で不安な人や基本の再確認をしたい人は、教科書などを参照して下さい。

また、有用な別解があれば掲載しました。問題によっては、少々手間がかかるけれども思いつきやすい解法や、目立った誤答例も取りあげましたので、皆さんと実際の応募者の解答状況を比較することが出来ます。

なお、入試問題から関連問題を紹介したものも

ありますので、理解を深めるためにチャレンジしてみましょう。

#### 解説プリント担当者（本書掲載分、五十音順）

飯島康之（現在編集部）

石城陽太

一山智弘

伊藤大介

上原早霧

條 秀彰（現在編集部）

濱口直樹

藤田直樹

山崎海斗（現在編集部）

吉田 朋

# 考え方数学

## ～学コンに挑戦～

はじめに	1
本書の構成と利用法	2
◆	
<b>問題編</b>	
座標	6
ベクトル	7
図形	8
数Ⅱの微積分	9
方程式・不等式・最大最小	10
数列	11
整数	12
場合の数	13
確率	14
解答時間と正答率	16
ヒント	18
学力コンテスト・添削例	24
◆	
<b>解説編</b>	
あとがき	128

## 座標

- 1  $xy$  平面上に、図形  $C : x^2 + y^2 - (t^2 + 2)x + 1 = 0$  と直線  $l : y = (t-1)x + 1$  がある ( $t$  は定数)。 $C$  と  $l$  の共有点のうち  $x$  座標が小さい方を  $P$  とおく。ただし、 $C$  と  $l$  の共有点が 1 個のときは、その点を  $P$  とする。 $t$  を動かすときの  $P$  の軌跡を図示せよ。
- 2  $xy$  平面上に直線  $l : \frac{x}{t} + \frac{y}{t(1-t)} = 1$  ( $t$  は定数で  $t \neq 0, t \neq 1$ ) がある。
- $t$  が 0 と 1 以外の実数をすべて動くとき、 $l$  の通りうる範囲を図示せよ。
  - $t$  が  $0 < t < 1$  の範囲を動くとき、 $l$  の通りうる範囲を図示せよ。
- 3  $y = x^2$  上に点  $A(a, a^2)$ ,  $B(b, b^2)$ ,  $C(c, c^2)$ ,  $D(d, d^2)$  があり、 $b-a=c-b=d-c>0$  を満たしている。点  $P(p, p^2)$  を  $p>d$  となるようにとり、 $PB$  と  $AC$  の交点を  $Q$ ,  $PC$  と  $BD$  の交点を  $R$  とする。
- $\overrightarrow{CQ}$  を  $b, c, p$  で表せ。
  - 四角形  $BCRQ$  の面積を  $b, c$  で表せ。
- 4 座標平面上に円  $C : x^2 + y^2 = 1$  がある。点  $(0, 2)$  を通り、 $y$  軸と異なる直線  $l$  が  $C$  と異なる 2 点  $P, Q$  で交わるとき、 $P, Q$  と原点  $O$  を通る円周上の点の存在範囲を図示せよ。
- 5  $xy$  平面上の曲線  $C : y = x^2$  に、半径  $r$  の円が  $T(t, t^2)$  ( $t > 0$ ) で接している。さらにこの円が、 $C$  と共有点を  $T$  以外に 1 つだけもつとき、 $r$  および  $T$  以外の共有点の  $x$  座標を  $t$  で表せ。
- 6  $k$  を実数とし、曲線  $C_1, C_2, C_3$  を次の式で表される放物線、あるいは円とする。ただし、ここでは「点」も半径が 0 の円と解釈することにする。

$$C_1 : y = x^2 + kx$$

$$C_2 : x = y^2 + ky$$

$$C_3 : x^2 + y^2 + (k-1)x + (k-1)y = 0$$

- $C_1$  と  $C_2$  の共有点の個数を  $k$  の値で分類して答えよ。
- 曲線  $C_1, C_2, C_3$  によって、 $xy$  平面はいくつの領域に分割されるか。 $k$  の値で分類して答えよ。

## ◎ ヒント ◎

解決への手がかりが得られない人や途中で行き詰った人のためのヒントです。いきなり見るのではなく、まずは自分の頭で考え、手を動かすようにしましょう。すぐに見たくなる誘惑に勝てない人は、ホチキスなどで袋綴じにしてしまうのも一つの手です。

1 「 $x$  座標が小さい方……Ⓐ」という条件があるので、 $y$  を消去して共有点の  $x$  座標を  $t$  で表したくなりますが、それは遠回りです。 $P$  の  $x$  座標と  $y$  座標の関係式を求めるので、 $C$  と  $l$  の式から、直接  $t$  を消去しましょう。  
Ⓐについては、 $C$  と  $l$  の共有点の軌跡と  $l$  との共有点を考えれば、図から捉えることができます。

2 本問のような直線の通過範囲を求める問題では、

- (i) 直線を  $y = \boxed{\quad}$  の形にして、 $x$  を固定して  $t$  を動かしたときの  $y$  の範囲を求める（ファクシミリの原理、自然流）
- (ii) 直線の式を  $t$  の方程式と見て、解の存在範囲を求める（逆手流）

などの手があります。本問のように  $t$  に制限があるとき、通常は、(i)で最大・最小（存在しないときは上限、下限）の候補を図示するのが明快ですが、(1)はかえってメンドウです。(1)は(ii)で、(2)は(i)でやりましょう（方法は相手を見て選べ）。

3 (1) 直線の方程式を立てる場合、 $AC$  の傾きを利用すると、 $\overrightarrow{CQ}$  の  $x$  成分だけ求めれば用は足ります。

(2) (1)が誘導になっています。面積計算の方法は色々あります。四角形  $BCRQ$  の対角線のベクトルによって張られる三角形の面積に帰着すると早いです。

4 直線  $l$  の傾きを  $m$  と置いて考えましょう。3点  $O$ 、 $P$ 、 $Q$  を通る円の方程式は“束の考え方”を使うと、簡単に求められます。 $l$  が  $C$  と 2 点で交わることから  $m$  の範囲が定まり、また、円の方程式から  $m$  を  $x$ 、 $y$  で表すと、円周上の点  $(x, y)$  が満たすべき不等式が得られます。

5 接し方を図形的に考えると、3次の接觸を忘がちです。数式を用いるなどして丁寧に議論を行いましょう。円の方程式を  $r$  と  $t$  で表して  $y = x^2$  を代入すると、ゴツい4次方程式になりますが、 $x = t$  を重解に持つハズなので、 $(x - t)^2$  をくくり出すように变形しましょう。なお、円の方程式を求めるには、中心を  $A$  として、ベクトル  $\overrightarrow{TA}$  を考えるのが明快です。

6 (1) 共有点の個数ときたら、まずは式を連立させましょう。 $y$  を消去すると4次方程式になりますが、 $C_1$  と  $C_2$  は  $y = x$  に関して対称なので、 $C_1$  と  $y = x$  の交点の  $x$  座標が解の2つになるハズです。なお、 $k$  の値によっては、4次方程式が重解を持つことがありますので要注意です！

(2)  $C_1$ 、 $C_2$ 、 $C_3$  の式をよく観察しましょう。 $C_1$  と  $C_2$  の式を辺ごと加えると  $C_3$  になるので、 $C_1$  と  $C_2$  の共有点は  $C_3$  上にあります。

7 (1) 対称点は垂線を2倍に伸ばした点です。色々な求め方がありますが、垂線の足を捉えるには、正射影ベクトルの考え方方が便利です。

(2)(i)  $\overrightarrow{OA}$  を  $\boxed{\quad} \overrightarrow{OX} + \boxed{\quad} \overrightarrow{OY}$  の形で表せば、係数の和は 1 です。  
(ii)  $\triangle OXY$  の面積は、(定数)  $\times \frac{1}{st}$  の形になるので、 $st$  が最大になるのはいつかを考えましょう。

8 空間図形は平面図形に比べてイメージしづらいので、適切な平面で切って考えましょう。

- (1)  $Q$  は  $OP$  上にあります。
- (2)  $R$  が円  $C$  の内部にあるか、外部にあるかが重要になります。ある程度は空間的なイメージを持っていた方が間違えにくいかもしれませんね。



$$\text{なので, ⑪より, } t-1 = \frac{Y-1}{X} \quad \dots \quad ⑭$$

これを⑩に代入して,

$$X = \frac{2}{\left(\frac{Y-1}{X}\right)^2 + 1} \quad \therefore X = \frac{2X^2}{(Y-1)^2 + X^2}$$

⑬より、両辺を  $X$  で割って分母を払うと,

$$(Y-1)^2 + X^2 = 2X \\ \therefore (X-1)^2 + (Y-1)^2 = 1 \quad \dots \quad ⑮$$

$t < 0, 2 < t$  のとき、P が⑬かつ⑮上のどこを動くかを考える。

$$(a) \ t < 0 \text{ のとき: } ⑭ \text{ より, } \frac{Y-1}{X} + 1 < 0 \quad \dots \quad ⑯$$

$$⑪ \text{ より } X > 0 \text{ なので, 上の不等式の両辺に } X \text{ を掛けて,} \\ Y - 1 + X < 0 \quad \therefore Y < -X + 1 \quad \dots \quad ⑰$$

$$(i) \ 2 < t \text{ のとき: } ⑭ \text{ より, } 2 < \frac{Y-1}{X} + 1 \quad \dots \quad ⑯$$

$$X > 0 \text{ より, } 2X < Y - 1 + X$$

$$\therefore Y > X + 1 \quad \dots \quad ⑯$$

以上(i)(ii)より、P の軌跡は、⑩または、

「⑬かつ⑮かつ「⑩または⑯」(の  $X, Y$  を  $x, y$  に代えたもの)で、右図太線(○を除く)。」

\* \* \*

⑬と比べて、P の  $x$  座標を求めたり、どの部分を動くかの考察が一手間なので、その分、メンドウになっていますが、十分自然な発想です。

この方針をとった人は、全体の 82% でした。

C 解答例では、 $t < 0, 2 < t$  のとき、⑭を用いて、どの部分を動くかを定めました。

$$t < 0 \text{ かつ } ⑭ \iff ⑯ \text{ かつ } ⑭$$

$$2 < t \text{ かつ } ⑭ \iff ⑯ \text{ かつ } ⑭$$

だから、⑩または⑯から、範囲が正しく出てきます。

これに対して、以下のような誤りが多く見受けられました(全体の 38%)。

$$[\text{誤答例}] \quad (\text{⑯以降}) \quad t < 0, 2 < t \quad \dots \quad ⑯$$

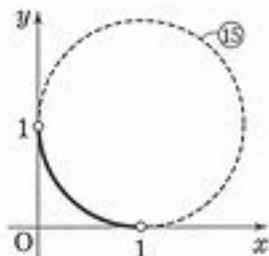
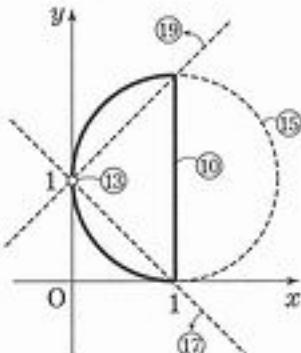
と⑪より、 $0 < X < 1$

これと⑯より、⑯のとき P は⑯の左半分( $X \neq 0, 1$ )を動く。

\* \* \*

$0 < X < 1$  と⑯だけでは、⑯のときの軌跡が右図のようになる可能性を否定できません。

正しくやるには、解答例のよ



うにするか、 $Y = \frac{t^2}{t^2 - 2t + 2}$  も出して、 $t$  が動くと  $X, Y$  がどのように変化するか調べなければなりません。

なお、 $X, Y$  の範囲を別々に求めるのも誤りです。例えば、 $X = \cos \theta, Y = \sin \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi$

のとき、 $X^2 + Y^2 = 1, -1 \leq X \leq 1, -1 \leq Y \leq 1$

ですが、 $(X, Y)$  の軌跡は、円の全体にはなりません。

#### D 軌跡を求める入試問題を紹介します。

**問題** O を原点とする座標平面において、円  $x^2 + y^2 = 4$  の外部の点 A からこの円に 2 本の接線を引き、その接点を P, Q とする。線分 PQ の中点を M とする。点 A が直線  $2x + 3y = 12$  上を動くとき、点 M の軌跡を図示せよ。

(類 12 東京理科大・工)

以下の解説を見る前に、チャレンジしてみましょう。

\* \* \*

A( $a, b$ ), M( $X, Y$ ) として、問題文の流れだと  $X, Y$  を  $a, b$  で表すことになりますが、必要なのは  $X, Y$  の関係式で、 $a, b$  は消えてほしいもの。 $a, b$  を  $X, Y$  で表して  $2a + 3b = 12$  に代入すれば機械的に  $X, Y$  の関係が得られます。なお M は OA 上にあります。

**解** A( $a, b$ ), M( $X, Y$ ) とおく。OM  $\perp$  PQ であり、M は OA 上にあるから、 $\triangle AOP \sim \triangle POM$

$$\therefore OA : OP = OP : OM$$

$$\text{よって } OA = \frac{4}{OM} \text{ だから,}$$

$$\overrightarrow{OA} = \frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OM}} \overrightarrow{OM} = \frac{4}{\overrightarrow{OM}^2} \overrightarrow{OM}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{4}{X^2 + Y^2} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

A は  $2x + 3y = 12$  上にあるから、 $2a + 3b = 12$

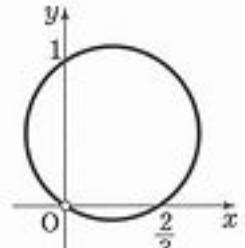
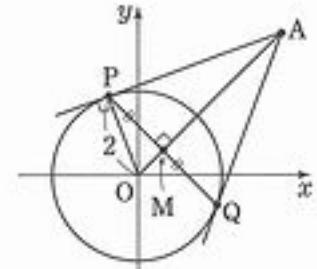
$$\therefore 2 \cdot \frac{4X}{X^2 + Y^2} + 3 \cdot \frac{4Y}{X^2 + Y^2} = 12$$

$$\therefore 8X + 12Y = 12(X^2 + Y^2), X^2 + Y^2 \neq 0$$

$$\therefore X^2 - \frac{2}{3}X + Y^2 - Y = 0$$

$$(X, Y) \neq (0, 0)$$

答えは右図太線(Oを除く)。



原題では「 $X, Y$  を  $a, b$  で表せ」という設問がありました。

入試では、このような下手な“誘導”がついていることもあるので、気をつけて下さい。

(吉田)

## あとがき

「大学への数学」学力コンテストでは、毎月、編集部で問題を創作していますが、中には、読者、読者OB、執筆の先生、添削者（学コンマン）から提供していただいたものもあります。そして、その問題に果敢にアタックして応募された方々、学コンマンと、多くの方々に支えられ、今年、60年目を迎えることが出来ました。本書の刊行ともども、深く感謝いたします。

さて、本書を通じて、思考力に磨きをかけていただきたいことはもちろんですが、それとともに、数学に限らず、自分の頭で考えることの大切さを再認識していただければと思います。

世の中には、偉い人、声高に叫ぶ人の言うことや、マスコミの情報を無批判に受け入れる人がいます。しかし、具体例や過去の例からの推測にすぎないことを、眞実であるかのように言う人もいます（中には、自分自身でそういう想い込んでいる人も）。いわんやネットの情報をや。

1, 2, 3, 4, 5

の次は何でしょう？ 素直な人は6と答えますが、本当に6？ 例えば $(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)+n$ だと6にはなりません。

「お上の言うこと、やることに間違いはない」という人達がほとんどを占める世界がろくなことにならない例は、過去も現在も枚挙にいとまがありません。

無闇に物わかりが良かったり、まわりと同調することばかりに気を使うのではなく、自分の頭で考えることによって、おかしいものはおかしい、ダメなものはダメと判断できる感覚を失わないようにしてほしいと思います。「それなら、お前の言うことも信用できないから、俺はお上を信用する」というのも、一つの考え方ではありますか…。（浦辺）

皆さんは、「学力コンテスト」に対してどのようなイメージをお持ちでしょうか？ 「学コンは難しすぎるから受験には必要ない」という意見を耳にすることがあります。もちろん学コンの問題の中には、かなり難しめのものもありますが、そのような問題ばかりというわけでは決してありません。特に、本書で取り上げられた問題の中には、極端に難しい問題や奇抜な発想を必要とする

問題ではなく、受験勉強としても、数学を純粹に楽しむうえでも十分に機能してくれることだと思います。

私自身も高校生の頃は学コンを応募していたのですが、本書で取り上げられている問題の中に、応募者だった時の問題もいくつかあり、とても懐かしく感じました。学コンには解答がついてないので、なかなか自分の出した答えに自信が持てず、締め切りギリギリまで粘っていたのを覚えています（同じような人もたくさんいるはず？）。当時学コンに夢中だった私は、「昔の学コンがまとめられた本があればいいのになあ」と思っていたのですが、その願いが届いたのか、こうして本書が刊行されることとなり、皆さんのお話をとても羨ましく思います。

さて、話は変わりますが、皆さんは100万円貯めようと思ったときに、単純に100万円貯めることと200万円貯めることを目標とするのではどちらが楽だと思いますか？ 200万円を目標にしていれば100万円は通過点に過ぎないので、当然後者を目標とした方が達成しやすいでしょう。これは受験勉強についても同じことで、自分が志望する大学に必要なレベルよりも上の実力に合わせた勉強をしていれば、当然通過点にあたる志望大学には自然と合格できるはずです。だから、「学コンは難しすぎるから必要ない」と消極的な意見を持たずに、「学コンは難しいけど、その難しい問題ができるようになれば、余裕で合格できるようになるはずだから頑張ろう！」とポジティブに考えられるようになってほしいと思います。皆さんの応募を心よりお待ちしております。

（山崎）

### 大学への数学 考え方数学～学コンに挑戦～

平成28年3月10日 第1刷発行

編 者 東京出版編集部

発行者 黒木美左雄

発行所 株式会社 東京出版

〒150-0012 東京都渋谷区広尾3-12-7

電話 03-3407-3387 振替 00160-7-5286

<http://www.tokyo-s.jp/>

整版所 錦美堂整版

印刷所 光陽メディア

製本所 技秀堂

落丁・乱丁の場合は、ご連絡ください。

送料弊社負担にてお取り替えいたします。

© Tokyo shuppan 2016 Printed in Japan  
ISBN 978-4-88742-221-6