プレ 1対1対応の演習

数学 I

目　次

第1部 5
数と式 5
2次関数 25
図形と計量 49
データの分析 65

第2部 73
第2部　演習題の解答 96

解答・解説：飯島康之、石井俊全、坪田三千雄

はじめに

『1対1対応の演習』シリーズは,

入試の標準問題を確実に解ける力

をつけてもらおうというねらいで作った本ですが,教科書とのギャップが少なからずあります.そこで,

教科書レベルから入試の基本レベルの橋渡しになる本

として『$\boxed{\text{プレ}}$1対1対応の演習』シリーズを作りました.

『$\boxed{\text{プレ}}$1対1対応の演習』シリーズは,教科書の章末問題レベルを確実に解けるようになり,さらに入試の基本レベルへとステップアップしてもらおうというねらいで作った本です.

問題は,その分野を一通り理解するのに必要な是非とも解いておきたいものに絞り,できるかぎりコンパクトにまとめました.

第1部と第2部の2部構成で,第2部では入試の基本問題を扱いました.

原則として第1部において,教科書に載っている項目は一通り扱う方針で編集しました.扱っている問題は,教科書の章末問題に載っているような問題が中心です.そのような問題に対する詳しい解答を付けただけではありません.問題をどう解いていくか,そのアプローチの仕方にスポットを当てました.また,教科書をもっていることを前提として解説しています.定理をどう活用して問題を解いていくか,ということに主眼をおいているので,定理の証明は原則として載せていません.また,定義や用語の説明も省略したものがあるので,各自必要に応じて教科書を見てください.

本シリーズを終えた後は,『1対1対応の演習』シリーズに進むことで,無理なく入試のレベルを知ることができるでしょう.また,本書の第2部レベルの問題をさらに演習したい人は,月刊『大学への数学』の増刊号

『入試数学基礎演習』

(範囲は数ⅠAⅡB)

を活用してください.

本書を活用して実力アップに役立てて頂ければ幸いです.

本書の構成と利用法

坪田三千雄

本書のタイトルにある‘$\boxed{\text{プレ}}$1対1対応’の‘1対1対応’の意味から説明しましょう．

まず例題（四角で囲ってある問題）によって，例題のテーマにおいて必要になる知識や手法を確認してもらいます．その上で，例題と同じテーマで1対1に対応した演習題によって，その知識，手法を問題で適用できる程に身についたかどうかを確認しつつ，一歩一歩前進してもらおうということです．

本書は，第1部と第2部の2部構成になっています．

第1部：　各分野を一通り理解する上で，まず当たっておきたい問題を精選しました．扱う問題のレベルは，教科書の本文中にあるような例題から章末問題レベル程度です．なお，分野によってはそもそも扱っているテーマが難しめのものがあり（教科書の内容がやや高度ということ），第1部としては難しめの問題が入っている場合もあります．私大，2次試験で頻出のテーマに関するものは，第2部に回したテーマもあります．

第2部：　第1部を踏まえて，主に入試の基本レベルの問題を選びました．是非とも当たっておきたい問題によって，入試の基本レベルまでステップアップすることを目標としましょう．

次に例題と演習題などについて説明しましょう．

入試問題を採用したときは大学名を明記しました．問題によっては空欄の形などを変えていますが，とくに断っていない場合もあります．

例題：　レベルについては上で述べました．第1部は46題，第2部は22題です．

どのようなテーマかがはっきり分かるように，一題ごとにタイトルをつけました（大きなタイトル／細かなタイトル　の形式です）．

解答の前文として，そのページのテーマに関する重要手法や解法などをまとめました．前文を読むことで，一題の例題を通して得られる理解が鮮明になります．この前文が充実していることが本書の特長といえるでしょう．

解答は，一部の単純計算を除いてほとんど省略せずに，目で追える程度に詳しくしました．また解答の右側には，傍注（⇦ではじまる説明）で，解答の補足や，使った定理・公式等の説明を行いました．

演習題：　例題と同じテーマの問題を選びました．例題の数値を変えただけのような問題が中心です．例題の解答や解説を真似ればたいてい解いていけるはずです．やや難しめの問題については，横にヒントを書きました．

また，目標時間を明示しましたが，ややきつめの設定になっています．この時間内に解ければ，例題の手法がよく頭に入って理解していると考えてよいでしょう．

演習題の解答：　第1部では分野ごとにまとめてあります．例題と同様に，詳しい解答を付けました．

本書で使う記号など：

⇨**注**はすべての人のための，➡**注**は意欲的な人のための注意事項です．

■は関連する事項の補足説明などです．

また，

$\therefore$　ゆえに

$\because$　なぜならば

◆1 指数法則

次の式を簡単にせよ．

(ア) $a^3b^3c\times(-3a^2b)^2\times(-2ab^2)^2$ （帝塚山大）

(イ) $\left(\dfrac{1}{3}xy^2\right)^2\times(-x^2y)^3$ （帝塚山大）

指数法則をしっかり頭に入れよう m，n を正の整数とするとき，

① $\boldsymbol{a^m\cdot a^n=a^{m+n}}$　② $\boldsymbol{(a^m)^n=a^{mn}}$　③ $\boldsymbol{(ab)^n=a^nb^n}$

が成り立つ．これらを用いて各文字（(1)は a，b，c；(2)は x，y）の指数を計算し，可能な限り簡単な形にする．

上の①～③の a，b は数値でも文字でもよく，例えば③で $a=-2$ とすると，$(-2b)^n=(-2)^nb^n$ となる．なお，$(-2)^n=\begin{cases}2^n & (n：偶数)\\ -2^n & (n：奇数)\end{cases}$ である．

解答

(ア) $a^3b^3c\times(-3a^2b)^2\times(-2ab^2)^2$

$=a^3b^3c\times(-3)^2a^{2\times2}b^{1\times2}\times(-2)^2a^{1\times2}b^{2\times2}$ ⇦$b=b^1$，$a=a^1$

$=a^3b^3c\times9a^4b^2\times4a^2b^4$

$=9\times4\times a^{3+4+2}b^{3+2+4}c$

$\boldsymbol{=36a^9b^9c}$

(イ) $\left(\dfrac{1}{3}xy^2\right)^2\times(-x^2y)^3$

$=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2x^{1\times2}y^{2\times2}\times(-1)^3x^{2\times3}y^{1\times3}$

$=\dfrac{1}{9}x^2y^4\times(-1)x^6y^3=-\dfrac{1}{9}x^{2+6}y^{4+3}$

$\boldsymbol{=-\dfrac{1}{9}x^8y^7}$

■ 前文（指数法則）の①を $a^m\cdot a^n=a^{mn}$，②を $(a^m)^n=a^{(m^n)}$ とするのは誤り．
公式を忘れそうになったら，落ち着いて a の個数を数えよう．

①は，$a^m\cdot a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{a\text{が}m\text{個}}\times\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{a\text{が}n\text{個}}$ だから a^{m+n}

②は，$(a^m)^n=\underbrace{a^m\cdot a^m\cdot\cdots\cdot a^m}_{a^m\text{が}n\text{個}}\underset{①}{=}a^{\overbrace{m+m+\cdots+m}^{m\text{が}n\text{個}}}=a^{mn}$

■ 指数法則①②③は m，n が0以下でも成り立つ．なお，$a^0=1$，$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ ⇦$a^0=a^{m-m}=\dfrac{a^m}{a^m}=1$

▶1 演習題 （解答は p.20）

次の式を簡単にせよ．

(ア) $(2x^2y^3)^2\times\left(\dfrac{1}{2}xy\right)^3\times(-3x^2y)$ （徳島文理大）

(イ) $\left(-\dfrac{1}{2}xy^2\right)^3\times(x^2y)^2\times(-3xy^2)$ （徳島文理大・理工）

(ウ) $-(-3^2x^3y^4)^3\times\left(-\dfrac{1}{27}xy\right)$ （大阪学院大）

4分

◆2 展開

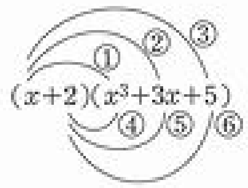
（ア） 次の式を展開すると x^6 の係数は $\boxed{}$，x^4 の係数は $\boxed{}$ となる．

$(8x^3+10x^2-3x-6)(2x^4-5x^3+3x-7)$ （久留米大・文）

（イ） $(x+2)(y+2)(x^2-2x+4)(y^2-2y+4)$ を展開せよ． （福井工大）

（ウ） $(a+1)(a+2)(a-3)(a-4)$ を展開せよ． （杏林大・総政，外）

展開するとは 例えば $(x+2)(x^3+3x+5)$ を展開すると，右の積①～⑥の和となる．ポイントは，左のカッコ内 $x+2$ の1つの項（x か 2）と右のカッコ内 x^3+3x+5 の1つの項（x^3 か $3x$ か 5）の積であるということ．従って，特定の次数の係数を答える場合，左のカッコ内の各項について，右のカッコ内のどの項と組み合わせたときに求める次数になるかを考えるとよい．



工夫して展開しよう （イ）（ウ）は前から順に展開していけば必ずできるが，計算が複雑になって間違えやすい．式が簡単に（項の数が少なく）なるような工夫をしよう．

（イ）は $(x+2)(x^2-2x+4)\times(y+2)(y^2-2y+4)$ として3乗の公式（☞傍注）を利用する．

（ウ）は $\underbrace{(a+1)(a-3)}_{Ⓐ}\times\underbrace{(a+2)(a-4)}_{Ⓑ}$ としてみると，ⒶⒷを展開したときの a の1次以上の項はともに a^2-2a となる．このかたまりを X などとおいて計算を進めよう．

解答

（ア） x^6 の係数：

x^6 の項は右の⌐から得られる．$(8x^3+10x^2-3x-6)(2x^4-5x^3+3x-7)$ ⇦3次・3次 と2次・4次

係数は，$8\times(-5)+10\times2=\mathbf{-20}$ ⇦$-40+20$

x^4 の係数：

x^4 の項は右の⌐から得られる．$(8x^3+10x^2-3x-6)(2x^4-5x^3+3x-7)$ ⇦3次・1次，1次・3次，0次・4次

係数は，

$8\times3+(-3)\times(-5)+(-6)\times2=\mathbf{27}$ ⇦$24+15-12$

（イ） （与式）$=(x+2)(x^2-2x+4)\times(y+2)(y^2-2y+4)$

$=(x^3+8)(y^3+8)=\mathbf{x^3y^3+8x^3+8y^3+64}$

⇦$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ a を x，b を 2 にしたものが前半．後半も同様．

（ウ） （与式）$=(a+1)(a-3)\times(a+2)(a-4)$

$=(a^2-2a-3)(a^2-2a-8)$ ……………………①

①で $X=a^2-2a$ とおくと，

①$=(X-3)(X-8)=X^2-11X+24=(a^2-2a)^2-11(a^2-2a)+24$

$=a^4-4a^3+4a^2-11a^2+22a+24=\mathbf{a^4-4a^3-7a^2+22a+24}$

▶2 演習題（解答は p.20）

（ア） $(x^4+2x^3+3x^2+4x+5)^2$ を展開すると x^5 の係数は $\boxed{}$ となる． （麗澤大）

（イ） $(a+2)^3(b-3)^2$ を展開したとき，a^3b の項の係数は $\boxed{(1)}$，a^2b^2 の項の係数は $\boxed{(2)}$ である． （山梨学院大／(2)を追加）

（ウ） $(x+y-2z)(x-y+2z)$ を展開し，z について降べきの順に整理せよ． （東北文化学園大）

（エ） $(a+2b)^3(a-2b)^3$ を展開せよ． （京都産大・文系）

（オ） $(x+4)(x+2)(x+1)(x-1)$ を展開せよ． （九州産大・情，工）

7分

数と式
演習題の解答

1 まずカッコをはずし，(定数)×$x^{●}y^{▲}$ の形にする．

解 (ア) $(2x^2y^3)^2\times\left(\dfrac{1}{2}xy\right)^3\times(-3x^2y)$

$=4x^4y^6\times\dfrac{1}{8}x^3y^3\times(-3)x^2y$

$=\boldsymbol{-\dfrac{3}{2}x^9y^{10}}$

(イ) $\left(-\dfrac{1}{2}xy^2\right)^3\times(x^2y)^2\times(-3xy^2)$

$=-\dfrac{1}{8}x^3y^6\times x^4y^2\times(-3)xy^2$

$=\boldsymbol{\dfrac{3}{8}x^8y^{10}}$

(ウ) $-(-3^2x^3y^4)^3\times\left(-\dfrac{1}{27}xy\right)$

$=-(-1)^3\,3^6x^9y^{12}\times\left(-\dfrac{1}{3^3}\right)xy$

$=\boldsymbol{-27x^{10}y^{13}}$

■定数，x の指数，y の指数をそれぞれ計算する，という方法もある（慣れるとこの方が速い）．例えば，

(ア) 定数…$2^2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\times(-3)=-\dfrac{3}{2}$

x の指数…$2\times2+1\times3+2=9$

y の指数…$3\times2+1\times3+1=10$

よって，答えは $-\dfrac{3}{2}x^9y^{10}$

2 (ア) $(x^4+2x^3+3x^2+4x+5)$ を 2 つ書き並べ，x^5 の項が出る組合せを考える．

(イ) $(a+2)^3$ の $a^{●}$ の項と $(b-3)^2$ の $b^{▲}$ の項の積が $a^{●}b^{▲}$ の項になる．

(ウ) 与式を $\{x+(y-2z)\}\{x-(y-2z)\}$ とみると和と差の積の形になる．係数の符号だけが違うときはこうなることが多い．

(エ) $\{(a+2b)(a-2b)\}^3$ とみる．

(オ) 例題(ウ)と同様，2つずつ組み合わせて展開する．$(x+4)(x-1)\times(x+2)(x+1)$ とすれば，それぞれ展開したときに 1 次の項が同じになる．

解 (ア) $(x^4+2x^3+3x^2+4x+5)^2$ の x^5 の項は，下の⊓から得られる．

$$(x^4+2x^3+3x^2+4x+5)(x^4+2x^3+3x^2+4x+5)$$

求める係数は，

$1\cdot4+2\cdot3+3\cdot2+4\cdot1=4+6+6+4=\boldsymbol{20}$

(イ) $(a+2)^3(b-3)^2$

$=(a^3+3\cdot2a^2+\cdots)(b^2-6b+9)$

(1)　(2)

(1) $1\cdot(-6)=\boldsymbol{-6}$

(2) $6\cdot1=\boldsymbol{6}$

(ウ) $(x+y-2z)(x-y+2z)$

$=\{x+(y-2z)\}\{x-(y-2z)\}$

$=x^2-(y-2z)^2$

$=x^2-(y^2-4yz+4z^2)$

$=\boldsymbol{-4z^2+4yz+x^2-y^2}$

■z について降べきの順に整理せよ，という指示があるので，与式のカッコ内それぞれを z について整理するのもよい．

$(x+y-2z)(x-y+2z)$

$=\{-2z+(x+y)\}\{2z+(x-y)\}$

$=-4z^2+\{-2(x-y)+2(x+y)\}z$

$\quad+(x+y)(x-y)$

$=-4z^2+4yz+x^2-y^2$

(エ) $(a+2b)^3(a-2b)^3=\{(a+2b)(a-2b)\}^3$

$=(a^2-4b^2)^3$

$=(a^2)^3-3\cdot(a^2)^2\cdot4b^2+3\cdot a^2\cdot(4b^2)^2-(4b^2)^3$

$=\boldsymbol{a^6-12a^4b^2+48a^2b^4-64b^6}$

(オ) $(x+4)(x+2)(x+1)(x-1)$

$=(x+4)(x-1)\times(x+2)(x+1)$

$=(x^2+3x-4)(x^2+3x+2)$ ……………………①

①で $X=x^2+3x$ とおくと，

①$=(X-4)(X+2)=X^2-2X-8$

$=(x^2+3x)^2-2(x^2+3x)-8$

$=x^4+6x^3+9x^2-2x^2-6x-8$

$=\boldsymbol{x^4+6x^3+7x^2-6x-8}$

3 （ア）は展開して整理してから因数分解する．

解 （ア） $(4x+9)(5x+9)-77$

$=20x^2+(36+45)x+81-77$

$=20x^2+81x+4$

$=\boldsymbol{(x+4)(20x+1)}$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 4 & \to & 80 \\ & \times & & & \\ 20 & & 1 & \to & 1 \\ \hline & & & & 81 \end{array}$$

（イ） $10x^2-12y^2+7xy$

$=10x^2+(7y)x-12y^2$

$=\boldsymbol{(2x+3y)(5x-4y)}$

$$\begin{array}{ccccc} 2 & & 3y & \to & 15y \\ & \times & & & \\ 5 & & -4y & \to & -8y \\ \hline & & & & 7y \end{array}$$

（ウ） $X=x^2-x$ とおくと，

$(x^2-x)^2+(x^2-x)-6$

$=X^2+X-6=(X-2)(X+3)$

$=(x^2-x-2)(x^2-x+3)$

$=\boldsymbol{(x-2)(x+1)(x^2-x+3)}$

（かけて 3，たして -1 になる 2 つの有理数はないので x^2-x+3 は係数が有理数の範囲ではこれ以上因数分解できない）

4 （ア） まず，同じ係数の前 2 項，後 2 項を組み合わせる．

（イ） 低次の z について整理する．

（ウ） 次数が同じなのでここでは a について整理．

解 （ア） $8x^5-8x^3y^2-27x^2y^3+27y^5$

$=8x^3(x^2-y^2)-27y^3(x^2-y^2)$

$=(x^2-y^2)(8x^3-27y^3)$

$=(x+y)(x-y)\{(2x)^3-(3y)^3\}$

$=\boldsymbol{(x+y)(x-y)(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)}$

（イ） $x^2y+2xy^2-xyz+3x+6y-3z$

$=(-xy-3)z+x^2y+2xy^2+3x+6y$ ……………♤

$=-(xy+3)z+(x^2y+3x)+(2xy^2+6y)$

$=-(xy+3)z+(xy+3)x+2(xy+3)y$

$=\boldsymbol{(xy+3)(x+2y-z)}$

■ ♤で，z の係数 $xy+3$ が共通因数になるのではないか？ と考えてみよう．

（ウ） $ab(a+b)-2bc(b-c)+ca(2c-a)-3abc$

$=(b-c)a^2+(b^2+2c^2-3bc)a-2bc(b-c)$ ….♡

$=(b-c)a^2+(b-c)(b-2c)a-2bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2+(b-2c)a-2bc\}$

$=\boldsymbol{(b-c)(a+b)(a-2c)}$

■ ♡の a^2 の係数と定数項に $b-c$ があるので，a の係数も $b-c$ を因数にもつはず．

$b^2+2c^2-3bc=b^2-(3c)b+2c^2$

$=(b-c)(b-2c)$

5 （ア） 例題（ア）とほぼ同じ．まず，$2ac$，$2bd$ を使って $(\square+\triangle)^2$ を作る．

（イ）（ウ） 2 次の項をまず因数分解，という方針で解いてみる．

解 （ア） $a^2-b^2+c^2-d^2+2ac+2bd$

$=(a^2+2ac+c^2)-(b^2-2bd+d^2)$

$=(a+c)^2-(b-d)^2$

$=\{(a+c)+(b-d)\}\{(a+c)-(b-d)\}$

$=\boldsymbol{(a+b+c-d)(a-b+c+d)}$

（イ） $2x^2+3xy+y^2+x-y-6$

$=(x+y)(2x+y)+x-y-6$ ………………………♤

$=\boldsymbol{(x+y+2)(2x+y-3)}$ ……………………♡

■ ♤ $\begin{array}{ccccc} 1 & & y & \to & 2y \\ & \times & & & \\ 2 & & y & \to & y \\ \hline & & & & 3y \end{array}$ ♡ $\begin{array}{ccccc} x+y & & 2 & \to & 2(2x+y) \\ & \times & & & \\ 2x+y & & -3 & \to & -3(x+y) \\ \hline & & & & x-y \end{array}$

（ウ） $4x^2+21xy+5y^2-7x+22y-15$

$=(x+5y)(4x+y)-7x+22y-15$ ……………♤

$=\boldsymbol{(x+5y-3)(4x+y+5)}$ ……………………♡

■ ♤ $\begin{array}{ccccc} 1 & & 5y & \to & 20y \\ & \times & & & \\ 4 & & y & \to & y \\ \hline & & & & 21y \end{array}$ ♡ $\begin{array}{ccccc} x+5y & & -3 & \to & -3(4x+y) \\ & \times & & & \\ 4x+y & & 5 & \to & 5(x+5y) \\ \hline & & & & -7x+22y \end{array}$

6 （ア） （2）は（1）を利用する．

（イ） 通分すると自然に有理化できる．

解 （ア） （1） $\sqrt{133}-\sqrt{57}-3\sqrt{7}+3\sqrt{3}$

$=\sqrt{7}\sqrt{19}-\sqrt{3}\sqrt{19}-3\sqrt{7}+3\sqrt{3}$

$=\sqrt{19}(\sqrt{7}-\sqrt{3})-3(\sqrt{7}-\sqrt{3})$

$=\boldsymbol{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{19}-3)}$

（2） $\dfrac{1}{\sqrt{133}-\sqrt{57}-3\sqrt{7}+3\sqrt{3}}$

$=\dfrac{1}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{19}-3)}$

$=\dfrac{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{19}+3)}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{19}-3)(\sqrt{19}+3)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{133}+\sqrt{57}+3\sqrt{7}+3\sqrt{3}}{40}}$

■（2）の原題は，

$$\frac{1}{\sqrt{133}-\sqrt{57}-3\sqrt{7}+3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{133}+\sqrt{57}+3\sqrt{7}+3\sqrt{3}}{\square\square}$$

であった．素直に有理化しても求められるが，

$(\sqrt{133}-\sqrt{57}-3\sqrt{7}+3\sqrt{3})(\sqrt{133}+\sqrt{57}+3\sqrt{7}+3\sqrt{3})$

$=(\sqrt{133}+3\sqrt{3})^2-(\sqrt{57}+3\sqrt{7})^2$

を計算して求めることができる．

あとがき

「大学への数学」の本は，ほとんどが受験生対象の本で，高校１年生が使うには，かなりキツイ本ばかりでした．

そこで，教科書と併用して自習できるような本を作ろうということで本書が出来上がりました．自習するには，分量が多いとやる気が起こらない人が少なくないので（筆者もそうです），分厚くならないようにしました．

解答・解説は分かり易いことを心がけましたが，100点満点だと言い切る自信はありません．まだまだ改善の余地があるかもしれません．お気づきの点があれば，どしどしご質問・ご指摘をしてください．

本書の質問があれば，「東京出版・大数Ｑ係」宛（住所は下記）にお寄せください．

原則として封書（宛名を書いた，切手付の返信用封筒を同封のこと）を使用し，**１通につき１件**でお送りください（電話番号，学年を明記して，できたら在学（出身）校・志望校も書いてください）．

なお，ただ漠然と‘この解説が分かりません’という質問では適切な回答ができませんので，‘この部分が分かりません’とか‘私はこう考えたがこれでよいのか’というように具体的にポイントをしぼって質問するようにしてください（以上の約束が守られないものにはお答えできないことがありますので注意してください）．

毎月の「大学への数学」や増刊号と同様に，読者のみなさんのご意見を反映させることによって，100点満点の内容になるよう充実させていきたいと思っています．

（坪田）

大学への数学
プレ 1対1対応の演習／数学Ⅰ

平成28年３月５日　第１刷発行

編　者　東京出版編集部
発行者　黒木美左雄
発行所　株式会社　東京出版
〒150-0012　東京都渋谷区広尾 3-12-7
電話 03-3407-3387　振替 00160-7-5286
http://www.tokyo-s.jp/

製版所　日本フィニッシュ
印刷所　光陽メディア
製本所　技秀堂

ISBN978-4-88742-220-9（定価はカバーに表示してあります）