はじめに

「標準的な問題は解けるんですが，それより難しい問題はちょっと…．どうすれば標準レベル以上の問題が解けるようになりますか？　何かいい参考書・問題集はありませんか？」
といった質問を受けるたび，推薦できる本がなくて困っていたところ，我々が執筆をしている東京出版の受験雑誌『大学への数学』で，そのような受験生のための連載を企画することになりました．名付けて，

「解法の突破口」

教科書的な単元・分類にしたがって学習するだけでは，真の実力をつけることはなかなかできません．そのことは，この本を手に取られた受験生の皆さんが一番よくご承知のはずです．

「解法の突破口」では，分野の枠を越えて，数学の実力向上に欠かせない9つのテーマを選び，講義篇・演習篇の2本立てで，そのテーマを徹底的に講義すること，演習してもらうことを目的として執筆しました．講義篇で，そのテーマでマスターすべき数学的な考え方・手法を実際の問題に即してきめ細かく解説し，演習篇で，入試問題を解くことにより，それを定着させ，血となり肉となることを図りました．

受験生のニーズに合致したためか，幸いなことに連載は好評で，ここに，単行本化する運びとなりました．連載時のものに加筆・修正を施し，テーマの配列順を変更し，また，講義篇と演習篇の連絡を密にするなど，更に読みやすく，実力をつけやすくなるように改良しました．文系・理系を問わず，標準的な問題しか解けない段階からワンランク上の実力をつけたい受験生の皆さんに贈ります．

実力向上は一朝一夕にしてなるものではありませんが，この本を終えたとき，あなたの実力は，この本を読み始めたときよりもずっと向上していることと思います．各自の手と頭を使って，うんうん考えながら一歩一歩進んでください．

最後になりましたが，雑誌連載時から単行本化に至るまで，筆の遅い我々を励まし，校正その他でいろいろとお骨折りいただいた，東京出版編集部の横戸宏紀氏に感謝の意を表します．

2003年7月　　　　雲　幸一郎・森　茂樹

改訂にあたって

今回の改訂では，現行課程に即した問題への差しかえ，並びに，解答・解説の書き換えを行いました．今後とも，本書が受験生の皆さんの実力向上に繋がることを願っています．

2006 年 7 月　　　　　　　　　　　　雲　幸一郎・森　茂樹

第 3 版にあたって

第 3 版の改訂では，現行課程に即した問題への差しかえだけでなく，近年の問題への一部差しかえも行い，解答・解説を書き換えました．初版の出版から 12 年が経ちました．引き続き，本書が受験生の皆さんの実力向上に役立つことを願っています．

2015 年 6 月　　　　　　　　　　　　雲　幸一郎・森　茂樹

本書の利用法

本書は，講義篇と演習篇（問題篇・解答篇）の2つのパートからなり，それぞれ9つの章があります．

講義篇をうけて，問題篇でそのテーマ（タイトル）に関連した演習問題を取り上げています．解答篇は問題篇にある演習問題の解答です．

各章には，講義篇には例題が5，6題（計47題），問題篇には演習問題が9，10題（計85題）掲げてあります．過去30年間の大学入試問題の中から，9つのテーマを血肉化する（＝数学の真の実力をつける）のに最適な問題が精選してあります．

問題篇の演習問題については，

　　問題の難易度と目標解答時間は，解答篇のはじめのページに

　　問題毎の講義篇での参照例題は，解答篇のおわりのページに

それぞれ一覧にしてあります．

＊　　　　＊　　　　＊

本書はいろいろな利用法が考えられますが，以下を参考にして，自分に合った使い方をして下さい．

▶一般の受験生向け

1章から順にやっていきましょう．

まず，講義篇に取り組んでみて下さい．そのとき，各例題を，その章のテーマを念頭に置きながら，考えることが重要です（ただ漫然と読むのと，たとえ解けなくても考えてから読むのとでは，得られるものが全く違います）．そして，その章のテーマを常に意識しながら，解説を読んで下さい．

講義篇が消化できたと思ったら，問題篇に挑戦してみて下さい．最初のうちは，難易度A，Bの問題（次頁参照）を主体に取り組んで，テーマを頭に馴染ませましょう．そして，除々に難易度C，Dの問題にも取り組んでみましょう．全く手が出ない問題があったとしても，解答をすぐに見るのではなく，上記“参照例題”をもとに講義篇を復習してから，もう一度解いてみることが大切です．それでも解けない問題は，解答を読んでしまいましょう．ただし，このとき，講義篇で解説されている考え方・手法がどのように活かされているかに注意して読み，それらの考え方・手法を少しでも自分のものにすることを心がけましょう．そして，後日，必ず，自分の力で解けることを目標に，再度挑戦してみて下さい．

▶数学に自信のある受験生向け

自分の気になるテーマ（章）の演習篇からやってみましょう．

難易度・目標解答時間は見ずに，1番から順に取り組んでいきましょう．ただし，答えが合っているからといって，すぐに次の問題にいってはいけません．答えが合っていたとしても，必ず本書の解答をしっかりと読み，皆さんの解答と本書の解答を比較検討してみて下さい．ここで，比べてほしいのは，解法の優劣・解答の長短だけではありません．各章のテーマを意識したうえで，どのように着眼し，どのように展開しているかということや，解答で用いた考え方・手法の一般性・応用性についても比較検討することが重要なのです．そして，皆さんの解答に足りないところがあると感じたら，“参照例題”をもとに講義篇も読んでそれを補って下さい．後日，演習篇に戻って解いてみれば，よりよい解答が書けるようになっているはずです．

本書で用いられる記号

- （講義篇・問題篇）問題の出典大学名の後に♯印がついている問題は，数学Ⅲの問題です．
- （解答篇）問題の難易は，入試問題を10段階に分けたとして，

  A（基本）…5以下　B（標準）…6，7

  C（発展）…8，9　D（難問）…10

  です．また，目標解答時間は，＊1つにつき10分です．
- （解答篇）解答の巧妙さを表すために，次の記号を用いています．

  ☆：巧妙だが，無理のない，あるいは，ぜひ身につけて欲しい解法．

  ★：相当に巧妙で，思い付かなくても心配のいらない解法．
- （解答篇）注意事項を表すために，次の記号を用いています．

  ⇨注：初心者のための注意事項．

  ⇨注：すべての人のための注意事項．

  ➡注：意欲的な人向けの注意事項．

目次

図版：講義篇　景山伴子，演習篇　森　茂樹

講義篇

実験する

この章は，“実験”がテーマです．未知の問題に出会ったときには，頭の中でいろいろ考えるだけでなく，“手を動かす”ことが大切です．そうすれば，解法のきっかけ，問題の本質が見えてくることでしょう．

まず，次の問題をやってみて下さい．

例題 1． どのような負でない２つの整数 m と n をもちいても

$$x=3m+5n$$

とは表すことができない正の整数 x をすべて求めよ．（00　阪大・理系）

３と５は互いに素な整数ですから，m と n が整数（負でもよい）とすれば，すべての整数 x は

$$x=3m+5n \quad \cdots\cdots①$$

の形に表されることを知っている人も多いことでしょう（例えば，$m=2x$，$n=-x$ とすれば，①が成り立ちます）．ここでは，m と n が負でない整数ですから，①の形で表すことができない整数が存在します（例えば，$x=1$，２が①の形で表せないことは明らかですね）．

それでは，実験です．

①の m，n に負でない整数を代入して，現れる x の値を調べてみましょう．

n ＼ m	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
0	0	3	6	9	12	15	$\cdots$
1	5	8	11	14	17	20	$\cdots$
2	10	13	16	19	22	25	$\cdots$
3	15	18	21	24	27	30	$\cdots$
4	20	23	26	29	32	35	$\cdots$
5	25	28	31	34	37	40	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

表を見ると，

$$1,\ 2,\ 4,\ 7 \text{ は現れず，} 8 \text{ 以上の整数はすべて現れる}\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

と予想されます．

ここで重要なことは，この段階では②は予想にすぎず，まだ証明されたわけではないということです．例えば，33，36なども，表に書いた範囲には現れていませんから，現れるかどうか実は分かっていないのです！　表を書いて調べられるのは有限の範囲だけですから，②を示すには，表から分かることをもとにして，論証しなければいけません．

表を上から順に見ていきましょう．

$n=0$ の行は，

$$x=3m：0,\ 3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ \cdots$$

で，0以上の3の倍数すべてが現れます．

$n=1$ の行は，

$$x=3m+5：5,\ 8,\ 11,\ 14,\ 17,\ 20,\ \cdots$$

で，5以上の3で割って2余る整数すべてが現れます．

$n=2$ の行は，

$$x=3m+10：10,\ 13,\ 16,\ 19,\ 22,\ 25,\ \cdots$$

で，10以上の3で割って1余る整数すべてが現れます．

$n=3$ の行は，

$$x=3m+15：15,\ 18,\ 21,\ 24,\ 27,\ 30,\ \cdots$$

で，$n=0$ の行にすでに現れています．

以下，同様で，$n=3k+r$（ただし，$r=0,\ 1,\ 2$）の行は，

$$\begin{aligned} x&=3m+5(3k+r) \\ &=3(m+5k)+5r \end{aligned}$$

で，$n=r$ の行に現れています．

以上から，$n=0,\ 1,\ 2$ の3行を考えるだけでよいことになり，現れない正の整数は，

3の倍数の中にはなく，
3で割って1余る整数の中では1，4，7
3で割って2余る整数の中では2

で，求める答えは，**1，2，4，7** となります．

このように，実際に手を動かしながら問題を解いていきましょう！

それでは，次の問題に移りましょう．

例題 2． 自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して，$(2-\sqrt{3})^n$ という形の数を考える．これらの数はいずれも，それぞれ適当な自然数 m が存在して $\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$ という表示をもつことを示せ．　（94　東工大（後））

どこから手をつければよいのか分からない人も多いでしょうが，少し実験してみると状況がつかめてきます．

$$
\begin{aligned}
(2-\sqrt{3})^1 &= 2-\sqrt{3}\\
&= \sqrt{4}-\sqrt{3}\\
(2-\sqrt{3})^2 &= 7-4\sqrt{3}\\
&= \sqrt{49}-\sqrt{48}\\
(2-\sqrt{3})^3 &= 26-15\sqrt{3}\\
&= \sqrt{676}-\sqrt{675}
\end{aligned}
$$

ですから，

$$(2-\sqrt{3})^n = a_n - b_n\sqrt{3} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

（a_n，b_n は正の整数）

の形に表して，それを

$$(2-\sqrt{3})^n = \sqrt{a_n{}^2} - \sqrt{3b_n{}^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

と変形すればよさそうですね．

それでは，まず，①を満足する正の整数 a_n，b_n が存在することの証明から始めましょう．

$n=1,\ 2,\ 3$ のときは，上で見た通りです．

一般の場合は，二項定理を用いるか，帰納的に考える（n のときをもとにして $n+1$ のときを考える）ことになるでしょう．ここでは，帰納的に考えてみることにしましょう．

ある n に対して①が成り立つとすると，

$$
\begin{aligned}
(2-\sqrt{3})^{n+1} &= (2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n\\
&= (2-\sqrt{3})(a_n - b_n\sqrt{3})\\
&= (2a_n+3b_n)-(a_n+2b_n)\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

となりますから，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$\begin{cases} a_1=2,\ b_1=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots③ \\ a_{n+1}=2a_n+3b_n,\ b_{n+1}=a_n+2b_n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots④ \end{cases}$$

によって定めれば，すべての正の整数 n に対して①が成り立つことになります．また，このとき，③，④の形から，すべての正の整数 n に対して，a_n，b_n は正の整数となります．

あとは，①を②と変形したときに，それが $\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$ の形をしていること，すなわち，

$$a_n{}^2-3b_n{}^2=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑤$$

を証明すればよいのです．既に，③，④が準備できていますから，数学的帰納法によって証明すればよいでしょう．

$n=1$ のとき，

$$\begin{aligned} a_1{}^2-3b_1{}^2&=2^2-3\cdot1^2 \\ &=1 \end{aligned}$$

ですから，確かに成り立っています．

ある n に対して⑤が成り立つとすると，④より

$$\begin{aligned} a_{n+1}{}^2-3b_{n+1}{}^2&=(2a_n+3b_n)^2-3(a_n+2b_n)^2 \\ &=a_n{}^2-3b_n{}^2 \\ &=1 \end{aligned}$$

となりますから，$n+1$のときも成り立つことが分かります．

以上で，証明が完全に終了しました．

例題 3. 数列 $\{x_n\}$ が次のように定義されている．

$x_1=0$,

$$x_n=\begin{cases} x_k+1 & (n=2k\ のとき) \\ x_k+2 & (n=2k+1\ のとき) \end{cases} \quad ただし，k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots.$$

$n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ に対し，$x_n \leqq 2\log_2 n-1$ が成り立つことを示せ．

（98　大阪府大・工，改題）

変わった形の漸化式で，一般項は簡単に求まりそうにありません．

さあ，実験です．はじめの数項を求めてみましょう．

$$\left.\begin{array}{l} x_2=x_1+1=1,\ \ x_3=x_1+2=2, \\ x_4=x_2+1=2,\ \ x_5=x_2+2=3, \\ x_6=x_3+1=3,\ \ x_7=x_3+2=4, \\ x_8=x_4+1=3,\ \ x_9=x_4+2=4, \\ x_{10}=x_5+1=4,\ \ x_{11}=x_5+2=5, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

となり，一般項が予想できそうで予想できません．

しかし，いま要求されているのは，x_n の一般項ではないのです！　もう一度，問題文をよく読んでみましょう．この問題で要求されているのは，x_n の一般項ではなく，$n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$に対して，

$$x_n \leqq 2\log_2 n-1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}$$

が成り立つことの証明なのです！

それでは，頭を切りかえて，②の証明を考えましょう．x_n の一般項が求まっていませんから，漸化式だけが頼りです．漸化式は，x_n をそれより前の項から求める手続きですから，それを用いて②を証明するとなると，数学的帰納法がピンときますね（数学的帰納法も，漸化式と同様，n のときをそれより前のものと結びつける手法です）．

実は，ここからが問題です．数学的帰納法といっても，n のときの成立を仮定して $n+1$ のときの成立を示すという，普通の数学的帰納法ではうまくいかないのです．というのも，①を見れば分かる通り，x_{n+1} は x_n から決まるのではなく，もっと前の項から決まるからです．例えば，x_{10} は x_9 からではなく x_5 から決まっています．このような場合には，$n+1$ のときの成立を示すのに，その直前の n のときの成立を仮定するだけでは不十分ですから，（本当はそこまで仮定しなくてもよいのですが）いっそのこと，n 以前のときの成立をすべて仮定すればよいのです．すなわち，

$$\left.\begin{array}{l} 2,\ 3,\ \cdots,\ n\text{ のときの成立を仮定} \\ \text{して } n+1 \text{ のときの成立を示す} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\text{③}$$

という形で数学的帰納法を使えばよいのです．

また，次のことにも気をつけなければいけません．

数学的帰納法の第１段階で，$n=2$ のときに②が成立することを直接確かめるのはもちろんのことですが，$n=3$ のときも②が成立することを直接確かめておかなければならないのです．というのも，①を見れば分かるように，x_3 は x_1 から決まるわけで，この部分の証明に③を用いることはできません．

x_4 以降の x_{n+1} について，③を用いて証明することになります．

以上をまとめると，まず，$n=2$，3 について②を確かめた後，$n \geqq 3$ において③の形の数学的帰納法により証明を完成させることになります．

それでは，やってみましょう．

$$\left.\begin{array}{l} n=2 \text{ のとき，} x_2=x_1+1=1=2\log_2 2-1 \\ n=3 \text{ のとき，} x_3=x_1+2=2<2\log_2 3-1 \end{array}\right\}$$

$$(\because\ 2^3<3^2 \text{ より，} 3<2\log_2 3)$$

ですから，確かに②が成り立っています．

$n \geqq 3$ として，

$m=2$，3，…，n に対して，$x_m \leqq 2\log_2 m-1$ …………④

が成り立つ

とします．$n+1 \geqq 4$ ですから，$n+1$ が偶数か奇数かに応じて $n+1=2m$ または $n+1=2m+1$ とおくと $2 \leqq m \leqq n$ となります．よって，④が使えて，

（i） $n+1=2m$ のとき

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_m+1 \\ &\leqq 2\log_2 m-1+1 \\ &= 2\log_2 m \\ \text{［目標は，} &< 2\log_2(n+1)-1 \text{ です］} \\ &= 2\log_2 \frac{n+1}{2} \\ &= 2\{\log_2(n+1)-1\} \\ &= 2\log_2(n+1)-2 \\ &< 2\log_2(n+1)-1 \end{aligned}$$

（ii） $n+1=2m+1$ のとき

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_m+2 \\ &\leqq 2\log_2 m-1+2 \\ &= 2\log_2 \frac{n}{2}+1 \\ &= 2(\log_2 n-1)+1 \\ &= 2\log_2 n-1 \\ &< 2\log_2(n+1)-1 \end{aligned}$$

となり，$n+1$ のときも成り立つことが分かります．

これで証明が完成しました．