はじめに

本書は09年度に私が「大学への数学」に連載した雑誌記事「不等式の骨組み」に，最近の大学入試問題，面白い問題をいくつか加えてまとめたものです．

この本を手に取っていただいた方のために，本書で扱った不等式についていくつか説明しておきましょう．

1．テーマは絶対不等式

文字通り，確かに不等式についての本ですが，誤解を避けるために言うと，二次不等式や指数・対数・三角関数に関する不等式，無理不等式など「不等式を解く」ことがテーマではなく，絶対不等式について扱った本です．

絶対不等式とは，いわば不等式の「恒等式」版です．恒等式は文字にどのような数を入れても成り立ちます．それと同様に，例えば「文字にどのような正の実数を入れても成り立つ」というような，ある条件下で必ず成り立つ不等式を「絶対不等式」といいます．

2．絶対不等式は文字式の感覚を高めるアイデアの宝庫

このような絶対不等式には「相加・相乗平均の不等式」「コーシー・シュワルツの不等式」など多くの有名なものがあり，その証明方法，応用には大変本質的で，いわゆる「数学の美しさ」が含まれています．文字の対称性を利用したり，式の次数に着目したり，文字式のセンスを養うのに適した華麗な手筋が満載で，数学の楽しさを知るのに適した素材です．

このような素材を通じて，読者の皆さんには，楽しみながら式変形や代数分野のアイデアを身につけてもらいたいと思います．

ただ残念なことなのですが，最近5年ほどの傾向としては，大学入試で「絶対不等式を証明する問題」は減少する傾向にあります．ですから皆さんはこの不等式という分野を学ぶにあたって，むしろ，式変形の手筋や文字式の見方など代数学の発想に慣れ，数学力の骨組みをつくるという「数学の基盤づくり」を主眼とするとよいでしょう（最大，最小問題の答えのあたりをつけたりするときには実用的価値もかなりあります）．

本書の利用法

本書の 1〜12 章は基本的な不等式の手筋や，有名な絶対不等式をテーマごとに扱い，13 章は面白い問題をたくさん並べてあります．書物の利用法は各自の自由だとは思いますが，とりあえずどのような利用法があるか，目的別に書いておきましょう．

1. まだ時間の余裕があり不等式を通じてじっくりと数学のセンスを磨きたい高校生へ

まず本書の 1〜8 章の各前半部分をざっと通読し，いくつかの有名不等式の導き方をマスターし，それら有名不等式を覚えるとよいと思います．不等式の導き方には，様々なコクのある考え方が使われています．また，並べかえの不等式のように，背後のイメージをつかむと，より一層の理解が深まるものもあります．

こうした導き方，背後のイメージ，応用のコツをつかめるところが，普通の参考書と違ってお話し調の解説をしてある書物の長所です．

その段階が終わったら，自力で問題を解きつつじっくりと読み進んでいってください．各章初めの方の問題は易し目で終わりの方の問題は難しいので，レベルに応じて挑戦する問題を選択してもよいかもしれません．

2. 受験生諸君に

受験まで 1 年以内であるときは，とても不等式にだけ時間をかけているようなゆとりはないと思います．そうした受験生諸君は，まず各章の大学名の付いた問題から入り，自力でどのくらい解けるかを確認してください（問題によっては誘導を抜いたために原題より難しくなっていますので解けずとも悲観するには及びません）．

その上で，有名不等式や有名手法で，自分の知識に欠けているものがないかをチェックしましょう．いわば本書を不等式分野の辞書的に使いながら，時間があれば面白い難し目の問題にも挑戦してください．

その他，人によりさまざまな使い方があると思います．各種の数学コンテストには絶対不等式が良く出題されますので，そうしたコンテストに出たい人はこの分野の基礎を固めるために使えるでしょう．

また，この分野には基本的な有名不等式さえマスターしてしまえば，面白く楽しめる問題が多いので，文字式に関するセンスを伸ばしたい人は，各章の後半や 13 章に出てくるそうした面白い問題をどんどんと解くのが最適と思います．

大学への数学

思考力を鍛える不等式

▶栗田 哲也　著◀

CONTENTS

数Ⅱ

§1 非負の和に直す式変形

不等式についてやや難しいが面白い素材を中心に，手法の解説をしていきます．

絶対不等式の紹介，証明，考え方，手法の応用を中心にして，大学受験の標準的問題から難問にいたるまで，（時によってさらに高度な問題まで）を扱っていきます．

その過程でみなさんに，この分野のがっしりとした思考の骨組を伝えたいと思います．

第１回目の今回は，まず式変形の基本から．

1．非負の和はまた非負である

実数の平方は負にはなりません．そこで，まずは簡単な練習をしてみましょう．

問題１（あまり時間をかけずにざっと目を通すこと）

実数 a，b について，$(a-b)^2 \geqq 0$ です．これを変形すると，

$$a^2+b^2 \geqq 2ab \quad \cdots\cdots ①$$

という不等式ができます．

これに倣って，次の各場合に，自力でどのような不等式を作れるか，試してください．

（１） 実数 a，b，c についてなるべくきれいな不等式

（２） 正数 a，b，c についてなるべくきれいな不等式

【作問例】

（１） 真っ先に考えつきそうなものは次でしょう．

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geqq 0$（等号は $a=b=c$ のとき成立）

これは，式変形すると，

$$a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca \quad \cdots\cdots ②$$

となります．ちなみにこれより，（２）の例も作れます．a，b，c が正なら，

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\geqq 0$$

よって，これを展開・整理して，

$$a^3+b^3+c^3\geqq 3abc \quad \cdots\cdots ③$$

（２）　これも考えつきそうな例を示すと，

$$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2\geqq 0$$

$$(a+b)(a-b)^2+(b+c)(b-c)^2+(c+a)(c-a)^2\geqq 0$$

が挙げられます．それぞれ展開・整理すると，

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\geqq 6abc$$

$$2(a^3+b^3+c^3)\geqq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

となります．この２つの式をドッキングすると再び③が出てきますし，前者の両辺に $3abc$ を足してから因数分解すると，

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)\geqq 9abc \quad \cdots\cdots ④$$

ちなみに，a〜c をすべて正の数とし，①で

$a ⇨ \sqrt{a}$，$b ⇨ \sqrt{b}$ としたり，③で $a ⇨ \sqrt[3]{a}$，$b ⇨ \sqrt[3]{b}$，$c ⇨ \sqrt[3]{c}$ とすると，

相加・相乗平均の不等式（初歩バージョン）

a，b，c を正の数とするとき，

$$\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab},\quad \frac{a+b+c}{3}\geqq\sqrt[3]{abc}$$

が出てきます．

さて，さらに②からはとても大切な不等式が２つ出てきます．

問題２（軽く解いてください）

実数 a，b，c について，$a+b+c=1$ が成り立っている．次の問いに答えよ．

（１）　$(a+b+c)^2\geqq 3(ab+bc+ca)$ ……⑤　を示せ．

（２）　$3(a^2+b^2+c^2)\geqq(a+b+c)^2$ ……⑥　を示せ．

（３）　$ab+bc+ca$ の取りうる最大値を求めよ．

【解説】

⑤，⑥はともに大切な不等式です．それは，

$a+b+c$ の値がわかっているときに，$ab+bc+ca$，$a^2+b^2+c^2$ の値を評価するのに使えるからです．

でも（１），（２）は，展開してみると，そのまま②に帰着してしまいますので，証明は省略します．

（３）　⑤より（$a+b+c=1$ を代入して）

$$ab+bc+ca \leqq \frac{(a+b+c)^2}{3}=\frac{1}{3}$$

等号は $a=b=c=\frac{1}{3}$ のとき確かに成り立つので $\boldsymbol{\frac{1}{3}}$ が答え．

ちなみに老婆心で言っておきますと，上記①～⑥はいつでも自力で導けるようにしておきましょう．

2．有名不等式の紹介

1．で相加・相乗平均の不等式（有名不等式の１つ）の文字数 2，3 の場合が出てきました．

これら有名不等式は，いずれ詳しく扱っていきますがスタートの今回は，別の有名不等式の紹介をしましょう．やはり，文字数が少ないバージョンでお見せします．

問題 3

実数 a，b，c，x，y，z について，次の不等式を証明せよ．

（１）　$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$ ……………………………………⑦

（２）　$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$ ……………………⑧

コーシー・シュワルツの不等式と呼ばれる有名不等式の 2，3 文字バージョンです．証明法はいろいろあるのですが，ここでは，

『左辺－右辺』を非負の和に直す

という最も基本的な方針を貫きます．

【解説】

（１）　左辺－右辺 $=(a^2x^2+b^2y^2+a^2y^2+b^2x^2)-(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)$

$$=a^2y^2-2abxy+b^2x^2=(ay-bx)^2 \geqq 0$$

(2)　これはちょっと式変形が大変ですが，(1)の流れから考えると，$(ay-bx)^2$ のような平方がいくつか現れるのではないかと推測がつきます．

$$
\begin{aligned}
&\text{左辺}-\text{右辺}\\
&=\{(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)+a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2\}\\
&\quad-\{(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)+2abxy+2bcyz+2cazx\}\\
&=(a^2y^2-2abxy+b^2x^2)+(b^2z^2-2bcyz+c^2y^2)+(c^2x^2-2cazx+a^2z^2)\\
&=(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2\geqq 0
\end{aligned}
$$

これも基本方針は，「2乗の和$\geqq 0$」の形にもちこむところだったわけですね．

ちなみに，『相加・相乗』や『コーシー・シュワルツ』のように，一般的な文字（文字には正数・実数などの条件がつくが）について成立する不等式を絶対不等式と呼んでいます．

1つの注意をしておくと，これらの不等式では，等号が成立する場合がどのような場合であるかについて調べておくことが必要です．

相加・相乗の場合には，導き方からして，$a=b$，また $a=b=c$ のとき等号は成立（それ以外は不成立）．

コーシー・シュワルツの場合には，

$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$（ただし，分母がすべて0のときは x～z は任意，それ以外で分母に0の項があるときはその項の分子を0とする）が，等号成立の条件です．

問題4

実数 a_1，a_2，a_3，b_1，b_2，b_3 について，$a_1\geqq a_2\geqq a_3$，$b_1\geqq b_2\geqq b_3$ が成り立っているものとする．

次の各問いに答えよ．

(1)　$a_1b_1+a_2b_2\geqq a_1b_2+a_2b_1$ を示せ．

(2)　$\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{3}\geqq\dfrac{a_1+a_2+a_3}{3}\cdot\dfrac{b_1+b_2+b_3}{3}$ …………………⑨

を示せ．

これも，ここでは 左辺－右辺 を非負の和に直します．

【解説】

（1）　左辺－右辺$=a_1b_1+a_2b_2-a_1b_2-a_2b_1$

$$=a_1(b_1-b_2)-a_2(b_1-b_2)=(a_1-a_2)(b_1-b_2)\geqq 0$$

（2）（（1）のような形が出てくるのではと考えて）

9×左辺－9×右辺

$$=3(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)$$
$$-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_1b_2+a_1b_3+a_2b_1+a_2b_3+a_3b_1+a_3b_2)$$
$$=(a_1b_1+a_2b_2-a_1b_2-a_2b_1)$$
$$+(a_2b_2+a_3b_3-a_2b_3-a_3b_2)+(a_3b_3+a_1b_1-a_3b_1-a_1b_3)$$
$$=(a_1-a_2)(b_1-b_2)+(a_2-a_3)(b_2-b_3)+(a_3-a_1)(b_3-b_1)\geqq 0$$

最後の項は，『負』×『負』$\geqq 0$ となりますね（「負」は，正確には「非正」）.

⑨をチェビシェフの不等式と呼びます（3 文字バージョン）. これは，A グループ（$a_1\geqq a_2\geqq a_3$），B グループ（$b_1\geqq b_2\geqq b_3$）の各グループから 1 文字ずつとってつくる積の和を考えるとき，

（大小順にソートして作った積の平均）

≧（A グループの平均）×（B グループの平均）

という意味をもった不等式です.

等号は，$a_1=a_2=a_3$ または $b_1=b_2=b_3$ のときに成り立ちます.

以上，絶対不等式の中でも特に有名な，『相加・相乗』『コーシー・シュワルツ』『チェビシェフ』の各不等式がいずれも「左辺－右辺が非負値の和で表される」ことによって導かれるという認識は，すごく大切です.

なぜなら，式変形の鬼であれば，これらの不等式を背景とした問題は，いずれも「左辺－右辺」の計算を実行すれば何とかなるハズだからです（実際には式変形が大変な場合も多いので，理屈通りにはいかないことも多い）.

3. 左辺－右辺 を「非負値の和」に直す入試問題

では，「左辺－右辺 を非負値の和に直す」というテーマの，入試問題を扱ってみましょう.

実は，『不等式の証明』がそのまま入試に出題されるのは，中堅大学と難関大の一部（京大・東工大・早大など）に限られていて，あとの学校は「証明そのもの」というより，「不等式を背景にもつ」問題を作ることが多いのです.