本書の利用法

◆ 本書の特色 ◆

本書は，標準～難関高校受験を目指す中学生向けの分野別の解説書である“解法のエッセンス・シリーズ”の中の「円編」です．

このシリーズは，‘教科書レベル’から‘難関高校入試レベル’への橋渡しを目指すものですが，本書で取り上げる「円」の分野では，入試問題における難問率が極めて高く，この 2 つのレベル間の格差は小さくありません．そこで，本書では，その深い溝を埋めるべく，以下のような特色を持たせています．

まず，教科書レベルの知識は一通り身に付けていることを前提にします．その上で，各項目ごとに，

重要な定理や公式，必須知識などを，主に例題の解説を通して学習し，
その理解度を，例題よりはやや難しめの練習問題を解くことで確認する

という流れになっています．例題・練習問題はともに，近年の高校入試問題の中から演習する価値の高い良問を精選していますが，月刊誌「高校への数学」で用いられている難易度，

A … 普通，B … 少し難，C … 難，D … かなり難

に照らすと，例題は A ～ B，練習問題は B ～ C レベルのものが中心になっています．

◆ 本書の構成 ◆

本書は大きく，右のような 3 部構成になっています．

第 1 部：必修編
第 2 部：応用編
第 3 部：ランダム演習

‘第 1 部：必修編’で円の必須事項を学んで強固な土台を作り，‘第 2 部：応用編’ではやや発展的な話題を通してゆるぎない実力を築き上げ，‘第 3 部：ランダム演習’で最後の総仕上げを図る，という構成です．

第 1 部は，円の基本テーマごとに 7 個の Section に分類され，それぞれのテーマの攻略法が詳細に解説されています．また第 2 部は，‘第 1 章：円の接線’と‘第 2 章：複数の円’さらに‘第 3 章：Other Items’に 3 分され，それぞれが 4 ～ 7 個の Section に分かれています．

さらに，本書全体を通して，‘ミニ講座’なども散りばめられ，巻末には，‘角度 & 作図の *drill*’と本書で用いられている「円」以外の分野の‘定理・公式集’が用意されています．

◆ 本書で使われている記号 ◆

★ ………問題番号の右肩に付いている場合は，**難易度が C レベルの発展問題**であることを表します．

解 ……その問題の本解を表します．

別解 ……本解に対する別解を表します．

➡**注** ……解答の補足や問題の背景等々の注意事項です．

■**研究** …その問題についての一般論や，高校(以上)で学ぶ内容などの発展事項が述べられています．

☞ ………参照してほしいページや事項を指し示しています．

＊　　　＊

その他，重要部分や注目してほしい部分は，太字になっていたり，網目がかけられていたり，傍線(～～や――など)が引かれていたりしています．そのような箇所は，特に念入りにチェックして下さい．

目　次

本書の利用法 …………………… 2

第 1 部　必修編 ……………… 5

1　円周角の定理 &
　　内接四角形の性質 ………… 6
ミニ講座①　二等辺三角形から
　　生まれる相似……11
2　円と相似(1)………………12
3　円と相似(2)………………16
4　円と台形・平行四辺形……24
5　円と三角定規形……………28
6　円と正多角形………………31
7　2 つのテーマ ………………34
練習問題の解答…………………38

第 2 部　応用編 …………… 51

第 1 章　円の接線
1　接線の基本…………………52
2　接線と直角三角形…………56
3　角の二等分線 &
　　二等辺三角形………………60
4　内接円・傍接円(1)………64
5　外接円………………………69
ミニ講座②　オイラー線(1)…72
練習問題の解答…………………73

第 2 章　複数の円
1　交わる 2 円(1)……………80
ミニ講座③　オイラー線(2)…84
2　交わる 2 円(2)……………85
3　共通接線……………………88
ミニ講座④
　　トレミーの定理(1)………93
4　接する 2 円…………………94
5　内接円・傍接円(2)………98
6　3 個以上の円(1) ………101
7　3 個以上の円(2) ………104
練習問題の解答 ………………109

第 3 章　Other Items
1　共円点 ……………………118
2　直交する弦 ………………123
3　動く図形(1) ……………126
4　動く図形(2) ……………132
練習問題の解答 ………………136

第 3 部　ランダム演習 …143

問題 ……………………………144
ミニ講座⑤
　　トレミーの定理(2) ……147
解答・解説 ……………………148

角度 & 作図の *drill* …………154
他分野の定理・公式集 ………157

第1部　必修編

解説…………………………… p.6～37
練習問題の解答 ………… p.38～50

ここでは，円の学習の基盤となる知識の確認・習得を目指します．

Section 1～3で，‘円周角の定理’や‘円と相似’などに関する基礎知識を学び，4～7では，‘円と多角形’などのテーマを扱います．

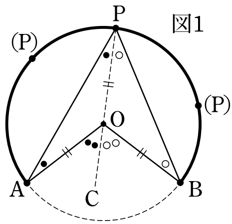
この必修編で，第2部以降の難問にも太刀打ちできる実力の養成を図りましょう．

◈Section [1] 円周角の定理&内接四角形の性質

円について最初に学ぶのは，角度に関する次の 2 つの定理です．

1．円周角の定理

図1

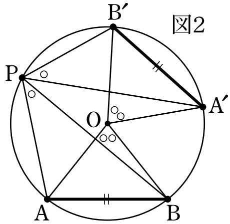


右図 1 のように，円 O 上の定点 A，B に対して，

$\angle AOC=2\angle APO$，$\angle BOC=2\angle BPO$

が成り立つので，$\boldsymbol{\angle AOB=2\angle APB}$ となります．そしてこのことは，P が図の太線の円弧上のどこにあっても成り立つので(点線上はダメ！)，結局，

図2



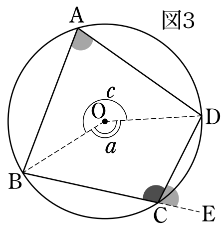
> 点 P が図 1 の太線の円弧上のどこにあっても，∠APB の大きさは一定で，
>
> $\boldsymbol{\angle APB}$(**円周角**)$=\boldsymbol{\angle AOB}$(**中心角**)$\times\dfrac{1}{2}$

となり，これを“円周角の定理”といいます．

➡注　円 O において，弦 AB＝弦 A′B′のとき（$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$ より，$\angle AOB=\angle A'OB'$なので)，$\angle APB=\angle A'PB'$と，円周角は等しくなります(☞図 2)．ただし，($\overset{\frown}{AB}$ と中心角$\angle AOB$ は比例するので) $\overset{\frown}{AB}$ と円周角$\angle APB$ は比例しますが，弦 AB と$\angle APB$ は比例しないことにも注意しましょう(AB が 2 倍になっても，$\angle APB$ が 2 倍になるわけではない！)．

2．内接四角形の性質

図3



円に内接する四角形 ABCD において，向かい合った内角の和は 180°になります．すなわち，右図 3 で，　$\boldsymbol{\angle A+\angle C=\angle B+\angle D=180^\circ}$ …………①

さらにこれから，$\boldsymbol{\angle DCE=\angle A}$ も成り立ちます．

➡注　①の証明：円周角の定理より，$a=2\angle A$，$c=2\angle C$．$a+c=360^\circ$より，$\angle A+\angle C=180^\circ$

＊　　　　　　　　＊

以上の 2 つの定理は，様々な場面で使われますが，ここでは，‘角度を求める問題’を練習しておくことにします．

➡**注**　なお，この 2 つの定理は，「逆」も成り立ちます(☞ p.118)．

例題 1. 次の各問いに答えなさい．

(1)　図 1 で，半円 O の半径が 5，弧 AB の長さが 2π のとき，x の値を求めなさい．（07　桐朋）

(2)　円 O の周上に OA // CB となる 3 点 A，B，C が図 2 のようにあり，弦 AC と半径 OB との交点を D とする．$\angle$BDC＝117° であるとき，x の値を求めなさい．（06　筑波大付）

(3)　図 3 のように，円に内接する AD // BC の台形 ABCD がある．x，y の値を求めなさい．（12　ラ・サール）

(4)　図 4 において，点 O は円の中心である．このとき，x，y の値をそれぞれ求めなさい．（09　愛光）

(5)　図 5 の AB を直径とする円 O において，$\overset{\frown}{\mathrm{AC}}:\overset{\frown}{\mathrm{CB}}=4:1$，AD＝BD，BC＝EC である．このとき，$x$ の値を求めなさい．（06　日大二）

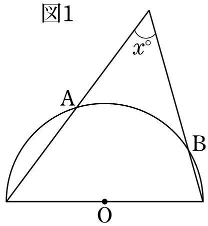
図1


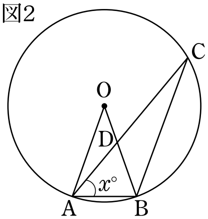
図2


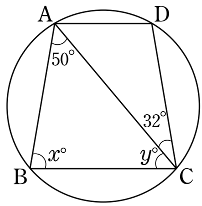
図3


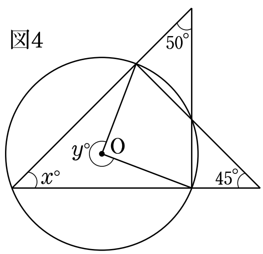
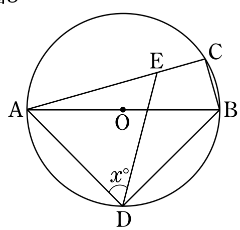
図4


図5


（1） ∠AOB の値から，x が求められます.

（2） △OAB 内に情報を集めます.

（3） 図形の‘対称性’に着目します.

（4） ‘内接四角形’の他に，‘凹四角形’の形にも着目しましょう.

（5） ‘等長の弦に対する円周角は等しい’(☞p.6 の注)ことがポイントになります.

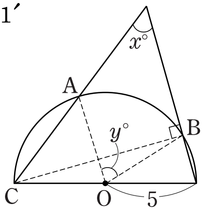
解 （**1**） 図 1′のように y を定めると，

$$2\pi \times 5 \times \frac{y^\circ}{360^\circ} = 2\pi \quad \therefore \quad y^\circ = 72^\circ$$

このとき，

$$\boldsymbol{x}^\circ = 90^\circ - \angle ACB = 90^\circ - \frac{y^\circ}{2} = 90^\circ - 36^\circ = \mathbf{54}^\circ$$

図1′



➡**注 円の直径に対応する円周角は 90°**…① です.

（**2**） ∠ACB＝○とすると，OA // CB と円周角の定理により，図 2′のようになる.

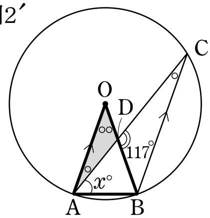
ここで，△OAD の内角の和について，

$$\bigcirc \times 3 + 117^\circ = 180^\circ \quad \therefore \quad \bigcirc = 21^\circ$$

このとき，△OAB において，

$$x^\circ + \bigcirc = \frac{180^\circ - \bigcirc \times 2}{2} \quad \therefore \quad \boldsymbol{x}^\circ = 69^\circ - 21^\circ = \mathbf{48}^\circ$$

図2′

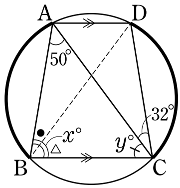


（**3**） AD // BC であるから，対称性により，$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{DC}$ ………………②

②と，「全円周に対応する円周角の和が 180°である(＊)」ことから，

$$32^\circ + 50^\circ + y^\circ \times 2 = 180^\circ \quad \therefore \quad \boldsymbol{y}^\circ = \mathbf{49}^\circ \cdots\cdots ③$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x}^\circ = \bullet + \triangle = 32^\circ + ③ = \mathbf{81}^\circ$$



➡**注** ②と同様にして，**円に内接する台形は‘等脚台形’**であることが分かります.

なお，(＊)は，「全円周に対応する中心角の和が 360°である」ことから導かれますが，この(＊)によって，①が分かります.

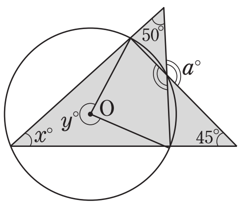
（**4**） 右図で，内接四角形の性質から，

$$a^\circ = 180^\circ - x^\circ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

また，網目部分の形(凹四角形)に着目して，

$$a^\circ = 50^\circ + 45^\circ + x^\circ = 95^\circ + x^\circ \cdots\cdots\cdots ⑤$$

④＝⑤より，$2x^\circ = 85^\circ \quad \therefore \quad \boldsymbol{x}^\circ = \mathbf{42.5}^\circ$



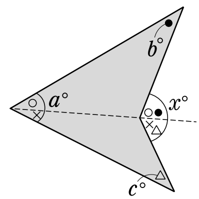
次に，円周角の定理より，

$$\boldsymbol{y}^\circ = ⑤ \times 2 = 190^\circ + 85^\circ = \mathbf{275}^\circ$$

➡**注**　一般に，右の図のような‘凹四角形’において，三角形の内角と外角の関係(☞p.157)から，図のようになり，

$$\boldsymbol{x}^\circ = (\bigcirc + \times) + \bullet + \triangle = \boldsymbol{a}^\circ + \boldsymbol{b}^\circ + \boldsymbol{c}^\circ$$

が成り立ちます．



(**5**)　AD＝BD より，AD，BD に対する円周角は等しく，図 5′のようになる．すると，二辺夾角相等で，

$$\triangle ECD \equiv \triangle BCD$$

$$\therefore\quad ED = BD = AD \quad\cdots\cdots\cdots⑥$$

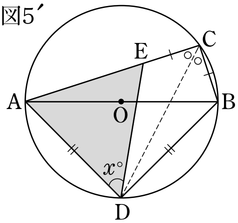
次に，$\overset{\frown}{AC} : \overset{\frown}{CB} = 4 : 1$ より，

$$\angle CAB = 90^\circ \times \frac{1}{4+1} = 18^\circ \quad\cdots\cdots⑦$$

また，$\angle BAD = 45^\circ$…⑧　であるから，⑥より，

$$\boldsymbol{x}^\circ = 180^\circ - (⑦ + ⑧) \times 2 = 180^\circ - 126^\circ = \mathbf{54}^\circ$$

図5′



3. アルハゼンの定理

円についての角度を求める問題で，図 1，図 2 のような図形がよく出題されます．どちらにおいても，網目の三角形の内角と外角の関係から，

$$x^\circ = \bigcirc + \bullet,\quad y^\circ = \bigcirc - \bullet$$

すなわち，

x°…太線の円弧に対する円周角の**和**
y°…太線の円弧に対する円周角の**差**

となり，これを“アルハゼンの定理”といいます．

この“アルハゼンの定理”は，知らなくても十分に問題に対応できるはずですが，知っているとより素早く答えが導けるので，できたら身に付けておくと便利です．

図1

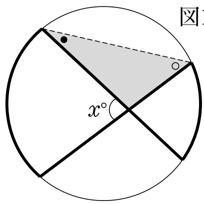
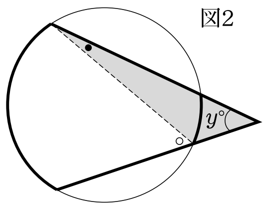


図2



少し練習してみましょう．