本書の利用法

◆ 本書の特色 ◆

本書は，標準〜難関高校受験を目指す中学生向けの分野別の解説書である“解法のエッセンス・シリーズ”の中の「確率編」です．

このシリーズは，‘教科書レベル’から‘難関高校入試レベル’への橋渡しを目指すものですが，本書で取り上げる「場合の数・確率」の分野においても，この２つのレベル間の格差は小さくありません．そこで，本書では，その深い溝を埋めるべく，以下のような特色を持たせています．

まず，教科書レベルの知識は一通り身に付けていることを前提にします．その上で，各項目ごとに，

重要な定理や公式，必須知識などを，主に例題の解説を通して学習し，
その理解度を，例題よりはやや難しめの練習問題を解くことで確認する

という流れになっています．例題・練習問題はともに，近年の高校入試問題の中から演習する価値の高い良問を精選していますが，月刊誌「高校への数学」で用いられている難易度，

A … 普通，B … 少し難，C … 難，D … かなり難

に照らすと，例題は A 〜 B，練習問題は B 〜 C レベルのものが中心になっています．

◆ 本書の構成 ◆

第１部：必修編
第２部：応用編
第３部：ランダム演習

本書は大きく，右のような３部構成になっています．

‘第１部：必修編’で場合の数・確率の必須事項を学んで強固な土台を作り，‘第２部：応用編’ではやや発展的な話題を通してゆるぎない実力を築き上げ，‘第３部：ランダム演習’で最後の総仕上げを図る，という構成です．

第 1 部は，‘第 1 章：場合の数の Training’ と ‘第 2 章：確率の Training’ とに 2 分され，それぞれが 5 〜 7 個の Section に分かれています．また第 2 部は，入試でよく扱われる話題(テーマ)ごとに 7 個の Section に分類され，それぞれのテーマの攻略法が詳細に解説されています．

さらに，本書全体を通して，‘ミニ講座’ なども散りばめられ，巻末には，本書で用いられている「場合の数・確率」以外の分野の ‘定理・公式集’ が用意されています．

◆ 本書で使われている記号 ◆

★ ………問題番号の右肩に付いている場合は，**難易度が C レベルの発展問題**であることを表します．

解 ……その問題の本解を表します．

別解 ……本解に対する別解を表します．

➡注 ……解答の補足や問題の背景等々の注意事項です．

■研究 …その問題についての一般論や，高校(以上)で学ぶ内容などの発展事項が述べられています．

☞ ………参照してほしいページや事項を指し示しています．

*　　　　　　　*

その他，重要部分や注目してほしい部分は，太字になっていたり，網目がかけられていたり，傍線(〜〜〜や――など)が引かれていたりしています．そのような箇所は，特に念入りにチェックして下さい．

目　次

○第１部　必修編

ここでは，場合の数・確率の学習の基盤となる知識の確認，習得を目指します．

第１章で，場合の数を扱い，第２章で，第１章を踏まえての確率を扱います．

この必修編で，第２部以降の難問にも太刀打ちできる実力の養成を図りましょう．

第1章 場合の数のTraining

Section 1 場合の数の基本

まずは，「場合の数」の基本となる事項を確認するところから始めます．

1．順列 & 組合せ

次の 2 つの小問を，違いに注意して，考えてみて下さい．

例題 1．次の各問いに答えなさい．
（1） 10 人の中から，3 人のリレーの選手を選んで，走る順番に並べるとき，並べ方は全部で何通りありますか．
（2） 10 人の中から，3 人の学級委員を選ぶとき，選び方は全部で何通りありますか．

当然，（1）の答えの方が多いはずですが，何倍くらいなのでしょう…．

解 （**1**） まず，第 1 走者の選び方が 10 通りあり，そのそれぞれについて，第 2 走者の選び方が 9 通りある．ここまでで，10×9（通り）…①

さらに，①のそれぞれについて，第 3 走者の選び方が 8 通りあるので，答えは， ①×8＝**720（通り）** ……………………………②

（**2**） 3 人を A，B，C とすると，②では，

ABC，ACB，BAC，BCA，CAB，CBA ……………③

をすべて区別して数えているが，（2）では③はすべて同じ選び方である．

すなわち，（1）では，（2）における 1 つの選び方を 6(＝3×2×1)倍多く数えていることになるから，（2）の答えは，②÷6＝**120（通り）**

＊　　＊

一般に，（1）のように，n 個の中から r 個を選んで並べる場合を‘**順列**（じゅんれつ）’といい，その個数を $_n\mathrm{P}_r$（エヌ・ピー・アール）という記号で表すことがあります．

また，（2）のように，順番を考えない場合を‘**組合せ**（くみあわ）’といい，その個数を $_n\mathrm{C}_r$（エヌ・シー・アール）という記号で表すことがあります（（1）は $_{10}\mathrm{P}_3$ で，（2）は $_{10}\mathrm{C}_3$）．

そして，$_{n}\mathrm{P}_{r}=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times\{n-(r-1)\}$

（n から続く r 個の数の積）

また，$_{n}\mathrm{C}_{r}$ は，$_{n}\mathrm{P}_{r}$ を重複分の $r\times(r-1)\times\cdots\times2\times1(={}_{r}\mathrm{P}_{r})$ で割ったものですから，$_{n}\mathrm{C}_{r}=\dfrac{_{n}\mathrm{P}_{r}}{r\times(r-1)\times\cdots\times2\times1}$

➡注　$n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times2\times1$ を $n!$（エヌの階乗（かいじょう））という記号で表すことがあります．これを使うと，$_{n}\mathrm{P}_{r}=\dfrac{n!}{(n-r)!}$，$_{n}\mathrm{C}_{r}=\dfrac{n!}{(n-r)!\,r!}$

すると，$_{n}\mathrm{C}_{n-r}=\dfrac{n!}{\{n-(n-r)\}!(n-r)!}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}={}_{n}\mathrm{C}_{r}$　……………Ⓐ

が成り立ちますが，この関係を利用すると計算が楽になる場合があります（例えば，$_{10}\mathrm{C}_{8}={}_{10}\mathrm{C}_{2}$ ですが，左辺よりも右辺の方が計算が楽です）．

2. 余事象

これも，まずは例題を考えてもらいましょう．

例題 2. 次の各問いに答えなさい．

（1）　男子 7 人，女子 3 人の中から 3 人の学級委員を選ぶとき，少なくとも 1 人の女子が選ばれる場合の数を求めなさい．

（2）　1 ～ 10 の 10 個の整数の中から 3 個を選んでかけ合わせるとき，その積が偶数になる場合の数を求めなさい．

（1）では‘女子 1 人・女子 2 人・女子 3 人’と，（2）では‘偶数 1 個・偶数 2 個・偶数 3 個’と，それぞれ 3 通りに場合を分けて求めることもできますが，それではちょっと面倒ですね．そこで….

解　（1）　学級委員の選び方は，全部で，$_{10}\mathrm{C}_{3}$（通り）　……………①

①のうち，3 人とも男子である場合は，　$_{7}\mathrm{C}_{3}$（通り）　……………②

よって答えは，①－②$=\dfrac{10\times9\times8}{3\times2\times1}-\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=120-35=$**85（通り）**

（2）　3 個の整数の選び方は，全部で，　$_{10}\mathrm{C}_{3}$（通り）…………………③

③のうち，3 数とも奇数である場合は，$_{5}\mathrm{C}_{3}$（通り）…………………④

よって答えは，③－④$=120-\dfrac{5\times4\times3}{3\times2\times1}=120-10=$**110（通り）**

➡注　上の注のⒶにより，$_{5}\mathrm{C}_{3}={}_{5}\mathrm{C}_{2}$ を使うと，少しだけ楽になります．

*　　　　　　　　　*

一般に「ある事柄 A が起こる場合の数…㋐」を求めるときに，

「全体の場合の数」−「A が起こらない場合の数…㋑」

として計算することがあります．これはもちろん，㋐よりも㋑の方が求めやすいときに行われます．

このように，「A が起こらない場合」のことを A の‘**余事象**（よじしょう）’といい，上の例題では，「(1)… 3 人とも男子」，「(2)… 3 数とも奇数」がそれぞれ余事象となっています．

そして，問題を解くに当たって，この**余事象を利用すべきかどうかの判断はとても重要**です．それによって，解く手間が大きく変わることが少なくないからです．それでは，どんな場合に余事象を利用すべきなのでしょうか？　代表的なのは，例題の(1)のように，

・問題文に‘**少なくとも 1 つ**’と明記されている場合

です．次は，(2)のように，明記はされていないが，

・題意に‘少なくとも 1 つ’が含まれている場合

です．「3 数の積が偶数 $\rightleftarrows$ 3 数のうち少なくとも 1 数が偶数」だからです．そして，一番判断が厄介なのが，‘少なくとも 1 つ’はどこにもないのに，

・㋐よりも㋑の方が求めやすい場合

です．この判断力を養うのは，問題演習を通じての‘慣れ’しかありません．以下の演習を繰り返しこなすことによって，是非その力を身に付けていって下さい！

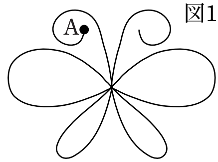
ミニ講座①

一筆書き

いわゆる‘一筆書き’についての場合の数の問題を考えてみましょう．

［**問題**］ 次の各問いに答えなさい．

図1



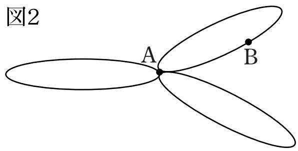
（1） 図1で，点Aから書き始めて「一筆がき」する方法は何通りあるか． （08 早稲田実業）

（2） 図2を一筆書きでかく方法は何通りあるか．次の場合について求めなさい．

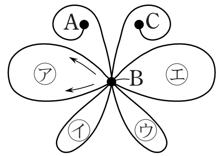
（i） 出発点がAの場合

（ii） 出発点がBの場合 （07 青山学院）

図2



［**解説**］ （1）では，Aを含まない‘触角’がゴールになります．また（2）では，3つの輪の順番と，それぞれの回り向きを考慮します．

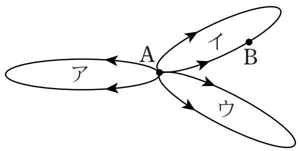


（**1**） A→Bから，㋐～㋓をどの順番に，各々どちら回りで進むかで，$(4\times3\times2\times1)\times2^4$ ……①通りあり，最後にB→Cとなる．

よって答えは，①$=24\times16=$**384（通り）**

（**2**）（**i**） 出発点がAの場合，まず，ア，イ，ウの順番として，$3\times2\times1=6$（通り）あり，ア～ウのそれぞれについて，回り向きが(図の矢印の)2通りずつあるから，全部で，

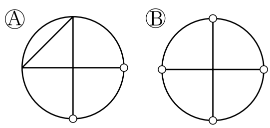
$6\times2^3=$**48（通り）**



（**ii**） 出発点がBの場合，まず，Aまでの回り向きが2通り，あとはア，ウの順番とそれぞれの回り向きを考えて，答えは，$2\times(2\times1)\times2^2=$**16（通り）**

＊　　　　＊

一筆書きについては，「そこから奇数本の線がのびている点」を「奇点」と呼ぶことにすると，**奇点が3個以上ある図は一筆書きできない**ということが知られています．



例えば，図(○が奇点)のⒶは一筆書きできますが，Ⓑはできません．