中学入試

カードで鍛える

図形の必勝手筋

動く図形・立体図形 編

はじめに

本書では，図形問題のうち，動く図形・空間図形について扱います．平面図形については，姉妹書「カードで鍛える　図形の必勝手筋　平面図形編」をご覧ください．2冊合わせて，中学入試に出題される図形問題の全分野をカバーすることができます．

中学入試で，図形の問題を限られた時間内に解くためには，どのような力が必要でしょうか．それは，図形のパターン認識力です．パターン認識力とは，問題の構図を見た瞬間に，ああ，これはあのパターンと同じ問題だな，と頭の中で問題が分類でき，パターンごとの解法が想起できる力のことです．試験場では，あれやこれやと補助線を引きながら問題を解くために十分な時間を与えられてはいません．構図を見ただけで，瞬間的に手筋が思い浮かび，解答の流れが思い浮かぶようになっていることが必要だと考えます．

では，そのためには，どのような学習法，トレーニングを積み重ねたらよいのでしょうか．

その答えの 1 つが，この本が提案する学習法です．

この本では，“手筋”と称して問題を解くときの 44 個の基本パターンを提示しました．これだけでも他の参考書にはない，相当に価値のある内容になっています．図形の問題をただ漫然と並べて解説した参考書は数多くあっても，図形の問題を解くために必要な手筋を突き詰め、それを整然と開示した参考書は，この本以外にないからです（今のところ）．みなさんには，この手筋編を使って，まずは図形の問題を解くときの手筋を理解してもらいます．これによって，基本的な構図の問題がしっかり解けるようになります．

そしてさらに，その手筋の運用力を実戦で使えるレベルにまで高めてもらうために，訓練用の学習カードを用意しました．このカードに書かれている問題を繰り返し解くことで，複雑な構図の問題でも見ただけで解法が思い浮かぶようになるのです．

本の形でなく，カードの形にしたのには訳があります．紙に書いて解くことだけが，算数の学習法ではないのです．図形の問題では，問題の構図を見て，反射的に手筋・解答を思い浮かべるというトレーニングが有効です．短い時間で大量の問題を解くことで，図形の問題を解くときの直観力・反射神経を養うことができるようになるのです．この反射神経を養うには，カードを 1 枚 1 枚めくっていくリズムがぴったりだと考えるからです．

学習の目標は，**ランダムに並べた学習カードを 1 枚めくる度に，問題の解答が電光石火のごとく頭の中にひらめく**ことです．この目標を達成すれば，たとえ未知の構図であっても手筋の運用法を思い付くようになります．

いかがでしょう．画期的な学習法を提示した本だと思われませんか．

この学習法を用いることで，図形の問題を得意分野にし，みごと中学受験の栄冠を勝ち取っていただきたいと思います．

中学入試

カードで鍛える

図形の必勝手筋

動く図形・立体図形 編

目 次

本書の利用法

最初に手筋編（p.10～p.60）を，問題を解きながら読みましょう．答えがあっている場合は，解答は読まなくても構いません．ただ，答えがあっている場合でも，ヒント欄（ヒントの印があるところ）はしっかりと読んでください．あなたが用いた解法と異なる解法が紹介されていることが間々あるでしょう．

手筋編のページレイアウト

図形の問題には本筋の解答の他に別解がある場合が多いのです．特に構図が複雑になってくると，解答が 1 通りということは，まずありません．また，たとえ簡単な構図の場合でも，今まであなたが知ってきたような解法で解いているとは限りません．

ここで紹介している解法は，筋のよい解法ばかりです．「筋がよい」というのは，本質的でより応用範囲が広いということです．あなたが今まで学んできた解法も，あなたが使い慣れてきたという意味では素晴らしい解法ですが，ここで書かれた筋を身につけ，実戦で使えるようになることは，あなたの図形問題を解く力を大きく飛躍させることになるでしょう．

ヒント欄には，

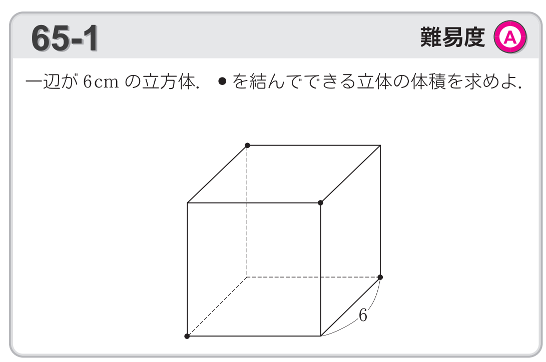
手筋が成り立つ理由，
手筋がどういう構図のときに使えるのか，
手筋を使うコツ

などが書かれています．例題以外の問題において手筋を十分に使いこなすためには，ヒント欄をしっかり読み込むことが大切です．

全部で 44 の手筋が紹介されています．中には難し目の例題もあります。問題が解けない場合は答えが出るまで粘らず，下にある解答を見てかまいません．ヒントを読んだ上で，どのような手筋がどこで使われているのかを意識しながら，解答を読んでみましょう．

ひととおり手筋編の問題に当たり，おおよそ手筋を理解したところで，次にカード編の学習に進みます．巻末にあるカードのページを本から切り離してカードを作ります．

ここで，カードに書かれている記号について説明しましょう．



カードの左上に書かれている記号，上の図では「65－1」になっていますね．「65－1」の 65 は，65 番目 の手筋「埋め込み」を用いる問題であることを示しています．「65－1」の 1 は，65 の手筋を使う問題に対してつけた通し番号です．

ですから，左上の記号を読むと，カードに書かれた問題が，45 から 88 までのどの筋を用いて解くことができるのかが分かる仕組みになっています．

カードの裏面には解答が書かれています．が，スペースが小さいため，手筋の理解を前提にした簡潔な解答しか書かれていません．手筋に慣れて

いないうちは，解答が読めない事態に陥るかもしれません．そんなときは，左上に書かれている記号をたよりに手筋を割り出し，手筋編の該当ページを復習してください．

カードの右上に書かれている記号（上の図ではB）は，問題の難易度を表しています．問題の難易度は，A から順に難しくなっていきます．言葉に直すと，

A　基本問題
B　標準問題
C　応用問題
D　ハイレベルな問題

となります．

A，B が書かれた問題は，手筋がそのまま使われている問題です．**手筋を理解するための問題**と言ってもよいでしょう．実際，手筋編で挙げた例題と数値だけが異なっているような問題も含まれています．

一方，**C，D が書かれた問題**の難易度は，難関校の入試問題レベルになっています．このくらいの難易度の問題になると，用いる手筋が 1 つだけとはかぎりません．複数の手筋を組み合わさなければ解けないような問題も含まれます．左上に書かれた手筋はあくまでも主な手筋のひとつです．この手筋だけでは解けない場合もありますから，左上に書かれている記号にとらわれることなく，問題の構図を眺めていくことが必要です．

A，B が基本的な型の稽古であるとすれば，C，D は乱取り稽古だと言ってもよいでしょう

カードを切り離す前，問題は手筋順に並べられています．一度は手筋順に問題を解いてみることをお薦めします．バラバラにしてしまったカードを並べ直すのが面倒だという人は，初めのうちは，カードのページを本から切り離さずに問題を解いてみるのも一案です．

また，手筋の理解を確認するために A，B の問題だけを選んで解いてみるのもよいでしょう．もちろん，自信がある人は，C，D の問題まで挑戦してみて構いません．

ひとくちに「問題を解く」と書きましたが，この場合の「問題を解く」とは，ペンを持って紙に式を書いて計算し，答えの値までしっかり出すということを意味しています．

手筋を理解するために，問題を手筋ごとに解くことを 2，3 回くり返しましょう．手筋をしっかり身に付けることができます．

くり返さなければならない回数は学習する人により異なります．問題を見たときに手筋がすぐに思い浮かぶようになることが 1 つの目安です．もう，この段階まで来ると，ペンをもって解答を紙に書かなくてもかまいません．**頭の中に手筋が思い浮かび，解答の流れを頭の中に思い浮かべることができる**ようになればよいのです．

じっくり問題を解いていると，多くの問題をこなすことができません．解答を紙に書くことはせず，短い時間で大量の問題を頭の中で解くという学習法は，図形に対する直観力を養う秘策の 1 つであると考えます．カードを小気味よくめくっていくペースに頭の回転が付いていけるようになれば，しめたものです．

しかし，こうして手筋がすぐ思い浮かぶようになっても，問題が順番に並べられているから，手筋をうまく思いついているだけなのかもしれません．実際の入試では，問題を解くための手筋が予め与えられていることはありません．問題を解く手筋は自分で見つけなければならないのです．手筋を自分で見つけられる力を養うためにも，手筋順に並べられたカードをシャッフルし，順序を崩して問題を解くことをお薦めします．ランダムに出てくるカードに対して，次々とそれを解く手筋を思い起こして行く．これほど図形的直観力が養われる方法はありません．ここが，この本がカードにこだわった理由の 1 つです．

この本のカード学習の最終目標は，

ランダムに並べたカードを見て，
反射的に手筋と解答の流れが
頭の中に明確に思い浮かぶ

ようになることです．

カード教材のメリットは他にもあります．持ち歩きに便利なところです．カードの問題を見て，手筋と解答の流れを思い浮かべる訓練の段階になれば，机がなくても勉強ができます．塾の行き帰りでの電車の中，試験直前の待ち時間など，時と場所を選ばず学習することができます．受験生のみなさんは忙しい日々を送られていることと思いますが，ちょっとした合間の時間でも学習をすることが可能です．

ぜひとも，このカードを利用し尽くして，図形の問題を得意分野にしていただきたいと考えます．

問題文・図の読み方

　カード学習は，短時間で多くの問題にあたることが眼目の 1 つになっています．そのために，一瞬にして題意が分かるような，さまざまな工夫が施されています．

　本来であれば問題文に書くべきことであっても，図の中の記号で表現して済ます場合があります．また，問題文を短く表現するために表記上の約束事を設けてあります．慣れていって，問題把握のスピードを付けていって下さい．

①　問題文，図の中の数字に単位がつけてありません．

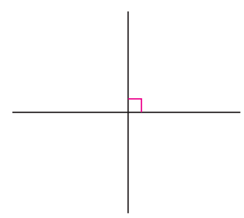
長さを表す単位は **cm**，**面積**を表す単位は **cm^2**，**体積**を表す単位は **cm^3**

です．補って読んでください．

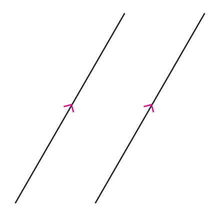
　図の中に単位があると，脳が構図を捉えるときの雑音となります．それだけ構図の印象が弱くなってしまうのです．それを避けるために単位は付けてありません．

②　2 本の直線が**直角**に交わるとき，
2 本の直線が**平行**であるとき，
はそれぞれ，右のように表します．

直角

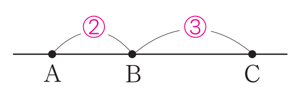


平行



③　三角形 ABC は，**△ABC**，四角形 ABCD は，**⏢ABCD**
と表記します．

④　辺の長さの比は，
②：③，$\boxed{2}$：$\boxed{3}$，△2：△3
など，数字を同じ囲み方をして表します．



AB：BC＝2：3

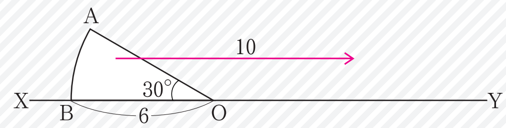
⑤　**円周率**はすべて **3.14** で計算してください．問題文には書かれていません．

中学入試
カードで鍛える
図形の必勝手筋
動く図形・立体図形 編

手筋編

45. 図形の平行移動

中心角 30°のおうぎ形 OAB が直線 XY にそって 10cm だけ滑って移動する．このとき，おうぎ形 OAB の通過した部分の面積を求めよ．



ヒント

図形を平行移動するとき，通過部分の面積は，

$$\underbrace{(\text{幅})\times(\text{通過距離})}_{\text{アカ網部}}+\underbrace{(\text{動かす図形の面積})}_{\text{斜線部}}$$

となります．図 2 のように，直線図形でない場合でも（幅）×（通過距離）でアカ網部の面積を計算することができます．

このことは，図 3 のようにアカ網部の図形を切り貼りして，平行四辺形にすることで分かります．

図 1

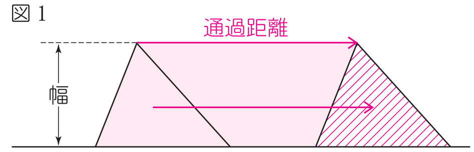


図 2

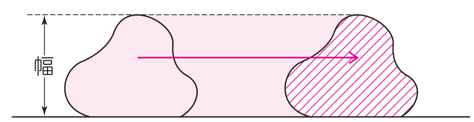
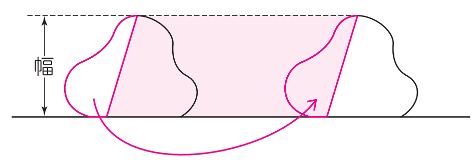


図 3



解答

図 4 の 30°定規の形に着目して，幅は，

$6\div 2=3$(cm)

したがって，通過した部分の面積は，

$$\underbrace{3\times 10}_{\text{図 5 の アカ網部}}+\underbrace{6\times 6\times 3.14\times\frac{30^\circ}{360^\circ}}_{\text{動かす図形の面積}}=\mathbf{39.42(cm^2)}$$

図 4

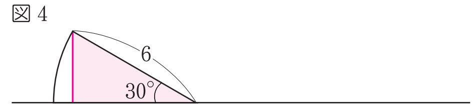
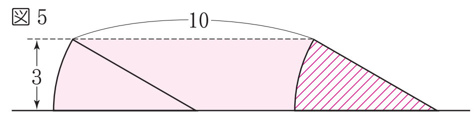
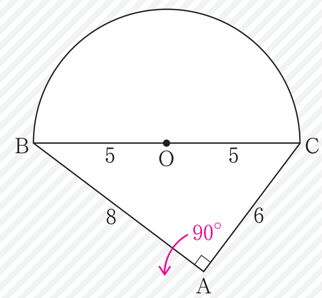


図 5



46. 図形の回転移動

A を中心に半円（中心 O，半径 5cm）と三角形 ABC を組み合わせた図形を 90° 回転させるとき，半円が通過する部分の面積を求めよ．ただし，円周率を 3 として計算しなさい．



ヒント

図 1 で，DE の通過部分の面積を求めるには，

（アカ網部）＝（大きいおうぎ形 OEE′）

－（小さいおうぎ形 ODD′）

と計算します．

これは図 2 のようにアカ網部を切り貼りすることでわかります．

図 3 のように，図形が回転移動するとき，通過部分を求めるには，回転の中心から一番近い点（F）と遠い点（G）に着目します．図形の通過部分の面積は，中心とこれらを結ぶ半径で作られるおうぎ形の面積の差（アカ網部）ともとの図形の面積（斜線部）を足したものになります．

なお，点 O と直線上の点 P との距離が最小になるのは，図 4 のように O を通り直線と垂直な直線との交点 H に P が重なるときです．

図 1

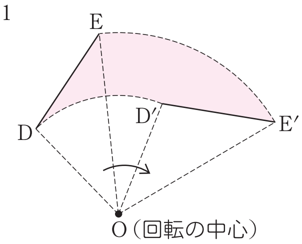


図 2

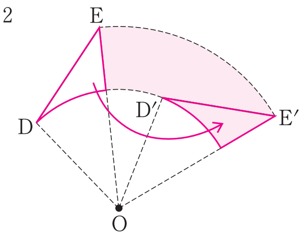


図 3

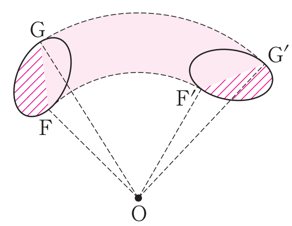
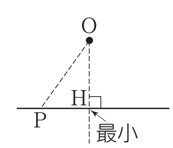


図 4



解答

A から一番遠い点は，AO の延長線と円弧の交点である D．A から一番近い点は，A を通り BC に垂直な直線と BC との交点 H．

角 BAC が直角なので，A は O を中心として半径 5cm の円の周上にある．

よって，AD＝AO＋OD＝5＋5＝10(cm)

三角形の面積を 2 通りに表して，

10×AH÷2＝8×6÷2

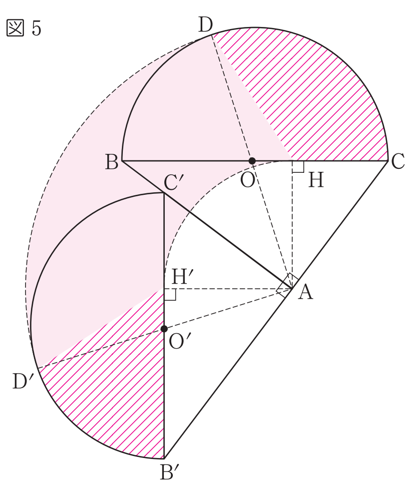
これより，AH＝4.8(cm)

求める面積は，

$$\underbrace{10\times10\times3\times\frac{90^\circ}{360^\circ}-4.8\times4.8\times3\times\frac{90^\circ}{360^\circ}}_{\text{アカ網部}}+\underbrace{5\times5\times3\div2}_{\text{斜線部}}$$

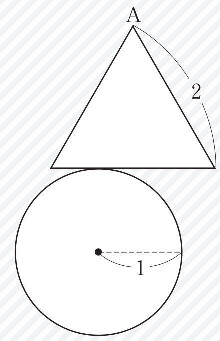
＝31.74×3＝**95.22（cm²）**

図 5



47. 向きを保ちながら接して移動

半径 1cm の円の周りを 1 辺が 2cm の正三角形が円にぴったりくっついたまま向きを変えずに 1 周する．頂点 A の動いた距離を求めよ．



ヒント

滑り方は，図 1 のように辺で接しながら直線運動する場合と，図 2 のように頂点で接しながら円運動する場合があります．図 1 の場合は，接している円上の点は固定しています．接点と中心を結んだ半径と接している辺は垂直です．辺の長さの分だけ（この問題では 2cm）直線運動します．図 2 の場合は，円に接している三角形の頂点が円に沿って移動するので，正三角形の他の点も円弧（この問題では半径 1cm）を描きます．

図 1 と図 2 の境目は，図 3 のように，半径と接している辺が垂直で，かつ辺の端で円に接するときです．ここに正三角形の頂点が来たときを境に，正三角形の辺で接するときと頂点で接するときが入れ替わります．つまり，直線運動と円運動が入れ替わります．

答えは，動かす図形の周長と円周を足したものになります．

図 1　直線運動

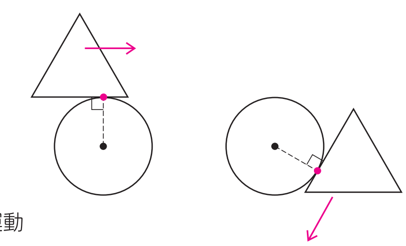


図 2　円運動

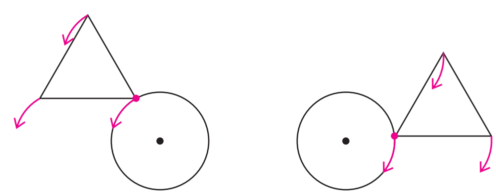
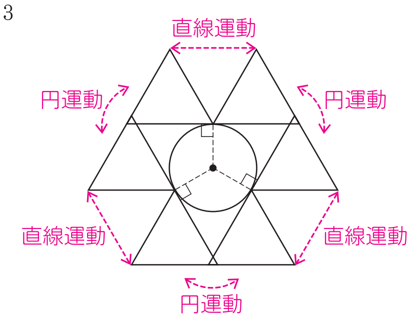


図 3

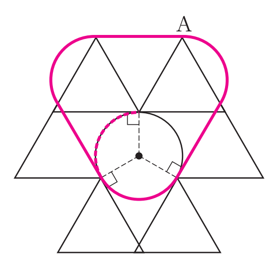


解答

図 4 のアカ線の 3 つある曲線部のうちの 1 つずつは，アカ破線に等しく，これは半径 1，中心角は 120° である．全部で120°×3＝360°．よって，アカ線部の長さは，円周 1 個分と直線部分の和になる．

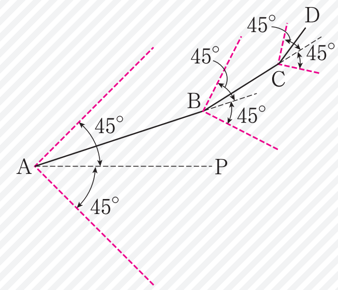
$2\times3+1\times2\times3.14=$**12.28(cm)**

図 4



48. 棒が動く

図のように平面上に 3 本の棒 AB，BC，CD があり，それぞれ B，C でつながっていて，A は固定されている．AB＝8cm，BC＝4cm，CD＝2cm．AB は A を中心にして，直線 AP に対して反時計回り，時計回りに 45°回転，同様に BC は B を中心にして AB に対して 45°ずつ回転，CD は C を中心にして BC に対して 45°ずつ回転することができる．3 本が自由に動くとき，棒の通過する部分の面積を求めよ．



ヒント

棒の一端が固定されているとき，棒の動く範囲はおうぎ形になります．棒がつながっているときは，それぞれが動くおうぎ形を組み合わせます．

B が動く範囲，C が動く範囲，D が動く範囲と順に求めていきます．棒を同じ回転方向に曲げたところが棒が動く範囲の限界です．

解答

図 1 のアカ網部は AB が動く範囲．B が図 1 のアカ線の円弧を動くので，BC が動く範囲は，図 2 のアカ網部になる．さらに，C が図 2 のアカ線部を動くので，AB，BC，CD が動く範囲は図 3 のアカ網部になる．

棒が動く範囲の面積は，

$$\underbrace{(8+4+2)\times(8+4+2)\times3.14\times\frac{90^\circ}{360^\circ}}_{ア}$$

$$+\underbrace{(4+2)\times(4+2)\times3.14\times\frac{45^\circ+45^\circ}{360^\circ}}_{イ}$$

$$+\underbrace{2\times2\times3.14\times\frac{45^\circ+45^\circ}{360^\circ}}_{ウ}$$

$$=(14\times14+6\times6+2\times2)\times3.14\div4$$

$$=\mathbf{185.26(cm^2)}$$

図 1

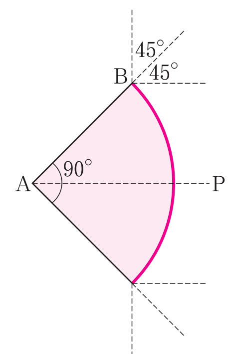


図 2

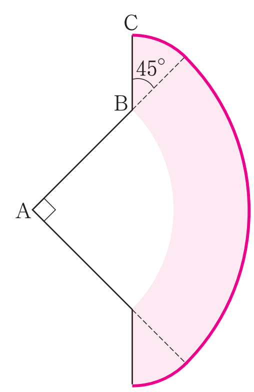
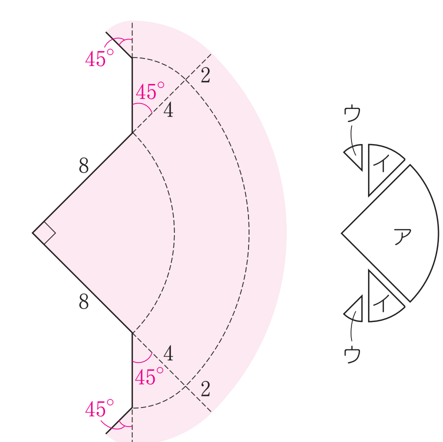


図 3



49. 直線図形が滑らず回転して動く

（1） 1 辺が 6cm の正三角形の周りを，図 1 の位置から 1 辺が 3cm の正三角形が滑らず回転して 1 周する．このとき，正三角形の頂点 A が動く長さを求めよ．

（2） 図 2 のように，直線 XY 上を，たて 3cm，よこ 5cm の長方形がアの位置からイの位置まで滑らずに転がる．このとき，長方形の頂点 A が動く曲線と直線 XY で囲まれる部分の面積を求めよ．

図 1

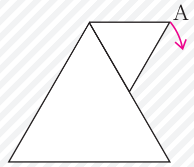
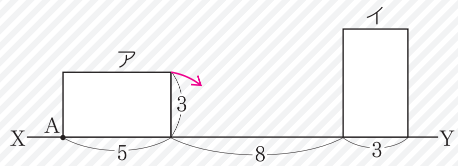


図 2



ヒント

直線図形が滑らず回転して動くときは，おうぎ形が基本になります．おうぎ形の中心となる点と回転角をしっかり捉えましょう．はじめに図形が止まる位置を書き込んで，そこにおうぎ形を書き込んでいくのがコツです．

解答

（1） A は半径 3 の円弧を動き，中心角の合計は，$120^\circ+120^\circ+240^\circ+240^\circ=720^\circ$

A の動く長さは

$$3\times2\times3.14\times\frac{720^\circ}{360^\circ}=\mathbf{37.68(cm)}$$

（2） エの 4 分円の半径を r(cm) とする．図 3 より，r を 1 辺とする正方形の面積は，

$$(3+5)\times(3+5)-3\times5\div2\times4=34(\text{cm}^2)$$

したがって，$r\times r=34(\text{cm}^2)$

通過部分の面積は，

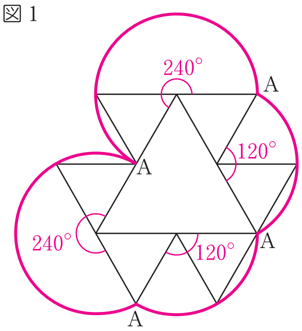
$$\underbrace{5\times5\times3.14\times\frac{90^\circ}{360^\circ}}_{\text{ウ}}+\underbrace{r\times r\times3.14\times\frac{90^\circ}{360^\circ}}_{\text{エ}}$$

$$+\underbrace{3\times3\times3.14\times\frac{90^\circ}{360^\circ}}_{\text{オ}}+\underbrace{5\times3\div2\times2}_{\text{カ＋キ}}$$

$$=(25+34+9)\times3.14\times\frac{1}{4}+15=17\times3.14+15$$

$$=\mathbf{68.38(cm^2)}$$

（1）図 1



（2）図 2

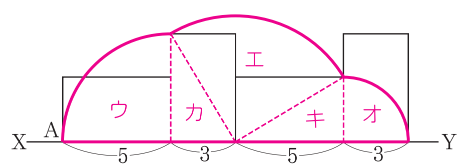
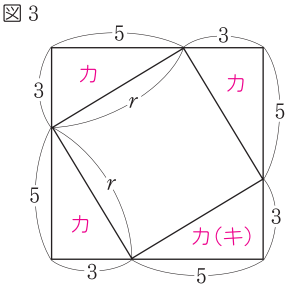
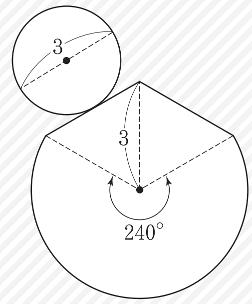


図 3



50. 円が動く

図のような半径 3cm，中心角 240° のおうぎ形 1 つと，正三角形 2 つを組み合わせた図形の周りを直径 3cm の円が 1 周する．
　このとき，円が通過した部分の面積を求めよ．



ヒント
　円（半径 a）が動くときは，4 つの場合があります．
（ア）　直線に接して動くとき（図 1）
　動く領域は幅 $a\times2$ の平行線の間になります．
（イ）　円弧（半径 b）に接して動くとき（図 2）
　円弧の外側を動くときは，半径 $b+a\times2$ のおうぎ形から半径 b のおうぎ形を取り除いた部分
　円弧の内側を動くときは，半径 b のおうぎ形から半径 $b-a\times2$ のおうぎ形を取り除いた部分になります．
（ウ）　点（A とする）に接して動くとき（図 3）
　半径 $a\times2$ のおうぎ形になります．回転角は，A を通り直線に垂直な直線や A と円弧の中心を結んだ直線がなす角になります．
　なお，便法としてセンターラインの公式（次頁）も使えます．

解答
　ア，イのおうぎ形の中心角は，それぞれ，
　ア＝360°－90°×2－60°×2＝60°
　イ＝180°－90°－60°＝30°
　円が通過した部分の面積は，

$$\underbrace{3\times3\times3.14\times\frac{60^\circ}{360^\circ}}_{ア}+\underbrace{3\times3\times3.14\times\frac{30^\circ}{360^\circ}\times2}_{イ}$$

$$+\underbrace{3\times3\times2}_{ウ}+\underbrace{(6\times6-3\times3)\times3.14\times\frac{240^\circ}{360^\circ}}_{エ}$$

＝(1.5＋1.5＋18)×3.14＋18
＝**83.94(cm²)**

図 1

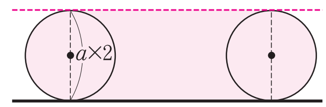


図 2

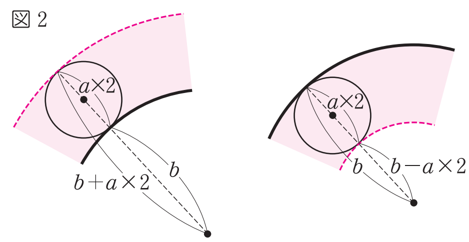


図 3

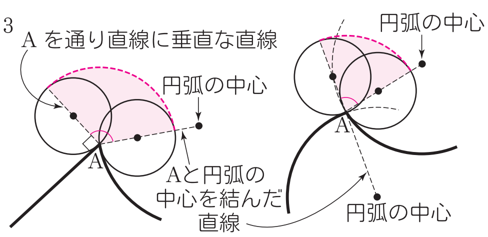
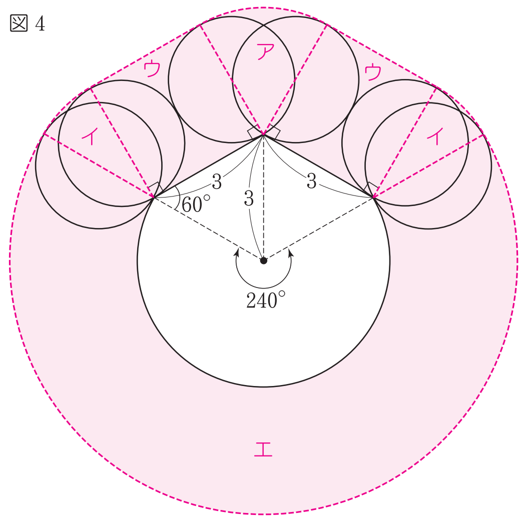


図 4



センターラインの公式

図 5 から図 8 のどの図の場合でも，

（アカ網部の面積）
　＝（円の中心が動いた距離）×（動く円の直径）
　　アカ線部の長さ

が成り立っています．これをセンターラインの公式と呼ぶことがあります．

［確かめ］

図 5 のアカ網部は，長方形の面積なので式が成り立ちます．図 6 で，太線の円弧の半径を R，動く円の半径を r とすると，

（アカ網部の面積）

$$=\{(R+r\times2)\times(R+r\times2)-R\times R\}\times3.14$$
$$=\{R\times(R+r\times2)+r\times2\times(R+r\times2)-R\times R\}\times3.14$$
$$=(R\times R+R\times r\times2+r\times2\times R+r\times r\times4-R\times R)\times3.14$$
$$=(R\times r\times4+r\times r\times4)\times3.14$$

一方，（アカ線の長さ）＝$(R+r)\times2\times3.14$ に直径の $r\times2$ をかけると，

$$(R+r)\times2\times3.14\times r\times2$$
$$=(R\times r\times4+r\times r\times4)\times3.14$$

となり，センターラインの公式が確かめられます．図 7 でも，同様です．図 8 でも，

（アカ網部の面積）＝$r\times2\times r\times2\times3.14$

（アカ線の長さ）×（直径）

$$=(r\times2\times3.14)\times(r\times2)=r\times2\times r\times2\times3.14$$

で成り立っています．　　　　［確かめ終わり］

図 9 での円が通るベルト型の部分は，図 5 から図 8 の場合，またその一部を組み合わせたものになっていますから，問題の図でも，

（アカ網部の面積）＝（アカ線の長さ）×（直径）

が成り立ちます．この公式を用いて問題を解いてみます．図 9 のアカ線の長さは，

$$\underbrace{1.5\times2\times3.14\times\frac{60^\circ}{360^\circ}}_{ア}+\underbrace{1.5\times2\times3.14\times\frac{30^\circ}{360^\circ}\times2}_{イ}$$

$$+\underbrace{3\times2}_{ウ}+\underbrace{(3+1.5)\times2\times3.14\times\frac{240^\circ}{360^\circ}}_{エ}$$

$$=(0.5+0.5+6)\times3.14+6=7\times3.14+6$$

（アカ網部の面積）＝（アカ線の長さ）×（直径）

$$=(7\times3.14+6)\times3=\mathbf{83.94(cm^2)}$$

図 5

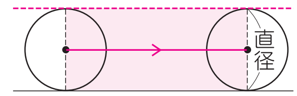


図 6

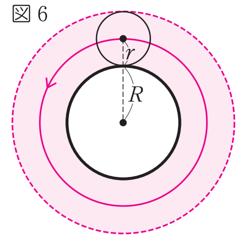


図 7

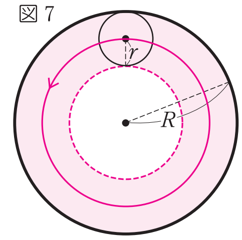


図 8

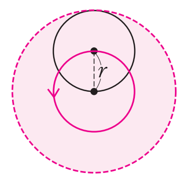


図 9

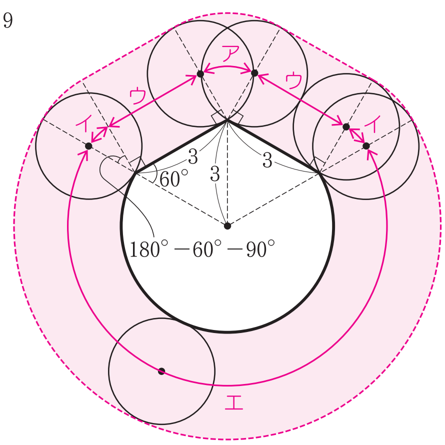
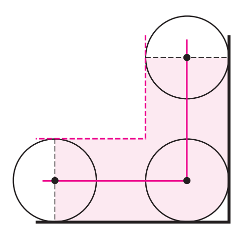


図 10



注

図 10 のように中心が通る線に角ができるときは，センターラインの公式が使えません．ですから，長方形の内側を円が動くときは，この公式は使えません．注意しましょう．