

はじめに

望月俊昭

教室の一風景。

図形の問題を解いている生徒に近寄ると、図に小さく書き込んでいる数字を隠そうとしてか、手がピクッと動く。

私：こらッ、オヌシ。何を隠そうとする？

生徒：いや、その…

私：スポーツでも音楽でも、指導を受けている先生に「今捨てるから見ないで」とか「今弾くから耳ふさいでいて_{*}」などという生徒がいるか！

オヌシ、何か後ろめたいことがあるのか、と問いただせば、もちろん、何もありませんと答える。

この返事はウソということもあり、ウソではない、ということもある。

テストで困った時にいつも試みる解決策、すなわち答えらしき数値をアテ勘で探すという必殺わざを駆使している現場を目撃されたのかもしれない。

まちがった考え方、まちがった式、まちがった計算、まちがった答えを先生に見られたくない、という思いがあるのかもしれない。後ろめたくはないが、まちがっていると恥かしい、または「こんなのができないのか」と思われるのがイヤだ…という気持ちがあるのかもしれない。

答えだけ書けばよい数学のテストで、アテ勘の答えを書いておくという行為は特別非難されるべきことではない、大いにすればよいとは言わないが、してはいけない理由はない。ただし、自分のためにならないことはしない方がよいという意味で、普段の勉強では封印し、そのような行為はテストのときに限定すべきである。

図形問題で、その角度や長ささえ分かれば…、という状況で、苦し紛れにアテ勘の数値を図に書き込んだ瞬間から、それ以降の時間がすべて

無駄になってしまう。

教師の目から答案を隠そうとする仕草がプラスなことは何もない。思考が中断するというマイナス面もあるが、問題はそんなことではない。まちがえるのがいけないという意識が、いけない。

気持ちはわかるが、意識を変えるべきだ。

まちがえない人間はいない。

大学受験に向かう高校生に向けて、数学者森毅は次のようなメッセージを発信し続けた。

- 誤りはなにより必要で、どこを誤ったか、なぜ誤ったか、それを大事にしないで、実力は絶対につかない。
- 数学を得意にする秘訣は自分の誤りとなかよくすることだ。
- 自分の誤りに学ぶ以外、数学の力をつける機会はない。
- 自分のまちがいを大事にしないようでは、いくら勉強しても力につかない。

(森毅『居直り数学のすすめ』講談社文庫<古書>)

受験生は、かみしめるべきだ。

自分のまちがいを大事にしないようでは、いくら勉強しても力につかない。

まちがいは恥ではない。まちがいは、自分をより高いレベルへと引き上げるチャンスの塊なのだ。

まちがいと正しく向き合うことこ

そが、自分を高める最良の道なのである。まちがいがから学ぶ心があれば、人はまちがえた分だけできるようになる。





本書の利用法



前置き^{その1}

- ◇この本は、高校受験で志望校合格をめざしている人を対象にして、受験数学の基本・応用レベルのポイントを整理したものです。
- ◇本書を手にして、知らないことが多いと感じる人と、知っていることが多いと感じる人がいるはずで、また、同じ人でも、手にする時期によってその印象は大きくちがうことになります。また、手にする時期だけでなく、それまでの学習内容(範囲、難易度なども含め)のちがいが、塾に通っているか否か、通っているとして、その塾が集団指導か個別指導か、など、さらに、学校や塾で受ける授業が、数学の重要事項や解法のポイントを強調してくれる授業であるか否かなど、受験生をとりまく環境は大きくちがいます。
- ◇1冊の受験参考書や問題集がすべての受験生に同じように役立つわけではない、というのと同様、本書の効用は様々で、本書の利用法も様々…と思います。

前置き^{その2}

- ◇数や図形に関する基本事項を知らなかったり忘れていれば、思考力は役立ちません。また、解法のツールもあいまいでは入試で使い物になりません。
 - ◇解法のツールを蓄積していくときに大事なものは、使えるように蓄積する、ということです。何冊もあるノートや膨大なプリントの中に埋もれては意味がありません。〈必要なときにサッと取り出せる〉ようにためていくことが不可欠です。
 - ◇では、必要なときにサッと取り出すためには、どうすればよいか、たくさんの小箱を、すぐ取り出せるように大きな箱に収納するときには人はどんな工夫をするか、ポイントは、何によって瞬時に見分けるのか、ということです。
 - ① つけられた名前から、見分ける。
 - ② 大きさ・形・色などから、見分ける。などが基本となります。
- これを、受験数学の重要事項の整理にいかにか活用するか。

前置き^{その3}

- ◇図形分野が得意な人は、頻出図形の多くが頭の中に収納されています。そして、収納されている図形データが頭の中にイメージとしてすでに用意している状態で、目の前の図形問題を見ているのです。世界の国旗大好き少年は、3分の1ぐらい図柄が欠けている国旗の国名を、自分の頭の中にある膨大な国旗イメージ群から似たような柄を瞬時に数点選び出して比較し言い当てます。図形ができる人の頭の働きは、これに似ています。
 - ◇数式分野が得意な人は、こういう式はこのように変形して簡単にするという操作方法が、他の人以上にしっかり頭に入っています。分数で割るときは逆数をかけるという操作を、考えながら、またや迷いながらするわけではありません。いろいろなタイプの〈こういうときはこうする〉操作をマスターしているのです。
 - ◇関数分野および確率分野は図形分野・数式分野をたして2で割ったようなもので、中間的な位置にあります。
- 関数問題を解くためには、発想・着眼というより、重要事項に関する知識と数式処理の技術が不可欠です。逆にいえば、それらを習得すれば、頭の良し悪しに関係なくできるようになる、ということです。確率分野は、受験生にとってとても厄介な分野です。この分野は、いろいろな問題にあたって、経験を積むということなしには、できるようになりません。受験生の多くが、正答率が低い状態からスタートして徐々に理解を深めコツをつかんでいく、というように学びます。まちがえることを怖れてはいけません。〈まちがえながら学ぶ〉分野の代表で、何をどうまちがえたかを確認することが大切です。賢くなくてもできるようになる関数分野と、賢くてもまちがえる確率分野は、賢さが決め手とならない。受験数学の中でも最も受験数学的な分野であるといえます。何が受験数学的か、それは、数学者が取り組む数学とはまったく別の、〈勉強すればできるようになる数学〉ということです。

本書を使うにあたって

◇本書の活用のポイントについて

- 〔その1〕 基本性質を確認する。
- 〔その2〕 方法を確認にする。

(1) その性質を利用して解くという基本性質

例) 「直交条件」

「面積を二等分する直線」など

問題を解くために欠かせない基本性質は常に確認すべきです。必要性を感じたものについては、マーカーなどでチェック(線を引く、枠で囲む、近くに自分の文字を書き添える)してください。

(2) こういうときはこうするという方法・発想

例) 「座標平面に置く」

「余事象を利用する」など

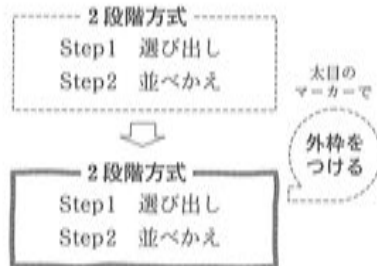
どのような方法、どのような発想で、今問われている問題を解決していくか、こういうときは普通こうするという方法・発想をいつでも使用可能な状態に保っておくことが必要です。

基本性質やきまりきった方法・発想が完全に頭に入るまで、見た瞬間に「あっ、そうだった!」と目で確認できるように整理しておくべきでしょう。

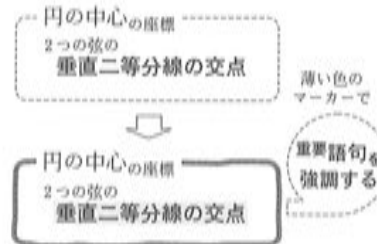
◇自分専用にチューンアップする

☞チューンアップ…手を加えて性能をよくする

(例1)



(例2)



本書の文字や解法のポイントなどは黒の単色で、カラー刷りではありません。みなさんが自分で必要に応じて色をつけてください。

自分用チューンアップのポイントは———、
〈これぞポイント中のポイントだ〉

と感じた事柄を…、

⇒ 枠に太目のマーカーで色をつける

⇒ 文字で示されたポイントを強調する

自分にとって必要と感じた事柄については、次回ハンドブックを開いたときに目にパッと飛び込んでくるように手を加え、自分専用の数学ハンドブックへと改良してください。

⇒書き込むときの文字の工夫

本書では、上付き文字・下付き文字を多用しています。みなさん (例) 相似がテーマの基本図形も、ぜひ使ってください。
↑
上付き文字

⇒付箋をつける工夫

自分にとっての重要度によって、付箋の貼り方を変える。

決定的に重要… はみ出しを長め

それなりに重要… はみ出しを短め(など)

⇒マーカーを使う工夫

自分にとっての重要度 最大 → 太く
やや大 → 細く

◇何度も見ることを前提に

人間は、コンピューターとちがって忘れる動物であるということを前提に、取り組む必要があります。

➢ 忘れるのを前提に、何度も見る。

➢ 立ち寄ったとき、その足跡を残す、文字でなくてもよい。

いたずら書きでもよい。

ライバルの彼に勝った!(7/12)など。

立ち寄った回数(何回目か)を

1回目→T, 2回目→TT …など。

—Tは自分のorカレ(カノジョ)のイニシャル?—

◇索引も、自分用に追加する

本書の最後に「索引」があります。必要であれば、みなさんが自分で補ってください。「索引」ページの空欄に、書き留めておくべきだと思ふ事柄を書いていってください。

* * * * *

目次

はじめに	1
本書の利用法	2
第1部 関数	7 ~ 57
[1] 座標平面	8
[2] 1次関数	12
[3] 2次関数	20
[4] 座標平面上の図形	28
テーマ別重要事項のまとめ	
[1] $f(x)$	38
[2] いろいろなグラフ	42
[3] 座標平面上の円	46
[4] 道具としての座標	50
[5] 座標平面上の円と放物線	54
第2部 確率	59 ~ 89
[1] 場合の数	60
[2] 確率	76
テーマ別重要事項のまとめ	
かく乱順列	88
第3部 数列	93 ~ 109
[1] いろいろな数列	94
[2] 数列を見抜く	102
索引	114 ~ 119
あとがき	120
コラム① 困難は分割せよ：デカルト	75
コラム② 同じ誕生日の人がいる確率	90
コラム③ 宝くじ：この絶望的「確からしさ」	91
コラム④ 「ファレイ数列」という数列	92
コラム⑤ 数学という科目：経験が難易度を変えていく	110
コラム⑥ 人間は考える○○である	112

[1] 座標平面

関数って
超大事な
テーマなの？



中学の数学で初めて本格的に登場する「関数」と「座標平面」は、高校受験、大学受験での最重要テーマの一つになっていきます。まず、「関数」であるものとそうでないものの区別を確認することから始まります。あとは、座標平面での用語と、〈中点の座標〉の意味を確認してください。

▷ 基本性質 ①

1-1-1 用語^{その1} 「関数」

y は x の関数 とは…

ともなって変わる2つの数量 x , y があり、

〈 x の値が決まると、その x の値に対応して y の値がただ1つ決まる〉[#]とき、
 y は x の関数という。

□ 「ただ1つに決まる」か否かの判定…

— 次の①～⑨で、「ただ1つに決まる」とはいえないのは？

- ① 「整数 x を2倍すると整数 y になる」
- ② 「 x の絶対値を y とする」
- ③ 「絶対値が x となるような数を y とする」
- ④ 「 x の平方(2乗)を y とする」
- ⑤ 「 x の平方根を y とする」
- ⑥ 「時速 a (定数) km で x 時間走行するときの走行距離を y km とする」
- ⑦ 「時速 a (定数) km で x km 走行するときの走行時間を y 時間とする」
- ⑧ 「同じ条件下で x km 走行したときのタクシー料金を y 円とする」
- ⑨ 「同じ条件下でタクシー料金を x 円払うときの走行距離を y km とする」

[判定] ③, ⑤, ⑨

- | | |
|-------------------------------|-------------|
| ③: (例) 絶対値が1である数は+1と-1(2つある). | } 1つに決まらない! |
| ⑤: (例) 4の平方根は+2と-2(2つある). | |
| ⑨: 料金がわかっても走行距離は特定できない. | |

#を別の言葉で表現すると…

〈 x の値(1つでも多数でも)に対し、 y の値が1つ対応する〉
ということになる。このうちの〈 x の1つの値に対し y の1つの値
が対応する〉場合を「1対1対応」といって、高校数学を学ぶ上で
極めて重要な概念になる。

x と y の対応が
「多対1」
「1対1」の場合
だけが
「 y は x の関数」となる

1-1-2 用語^{その2} 「変数」・「定数」

—ともなって変わる2つの数量 x, y があるとき—

▷いろいろな値をとる文字 x, y ……変数 } という。
▷一定の数・一定の数を意味する文字 ……定数 }

(例)	定数
$y=2x$	2
$y=-\frac{1}{3}x+2$	$-\frac{1}{3}, 2$
$y=ax^2$	a

1-1-3 用語^{その3} 「変域」・「定義域」・「値域」

変域…変数のとりうる値の範囲のこと

とくに y が x の関数であるとき

(例) $y=\frac{1}{2}x+3$ ($-1 \leq x \leq 2$)

↑
定義域

{ x の変域のことを、定義域 } という。
{ y の変域のことを、値域 }

▷基本性質 [2]

1-2-1 x と y の関係^{その1}: 比例を表す式

$y=ax$ (a は定数) [a を比例定数という] $\left[x \neq 0$ のとき $\frac{y}{x}$ は一定 = a (比例定数)]

y が x の関数で x と y がこのような式で表されるとき、 $\langle y$ は x に比例する \rangle という。

(例) $y=2x$

x	…	-2	-1	0	1	2	3	4	…
y	…	-4	-2	0	2	4	6	8	…

常に (y は x の) 2倍

□比例を表す式では、比例定数 $\neq 0$ とする。比例定数が負になることもある。

(例) 「 y は x に比例していて、 $x=2$ のとき、 $y=-6$ である。」

→ 比例定数を a とし、 $y=ax$ とする。

→ $-6=a \times 2$ より、 $a=-3$ $\therefore y=-3x$ (比例定数は -3)

1-2-2 x と y の関係^{その2}: 反比例を表す式

$y=\frac{a}{x}$ (a は定数, $x \neq 0$) [a を比例定数という] $\left[x \neq 0$ の積 xy は一定 = a (比例定数)]

y が x の関数で x と y がこのような式で表されるとき、 $\langle y$ は x に反比例する \rangle という。

(例) $y=\frac{6}{x}$

x	…	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…	-3	-6		6	3	2	…

常に (x と y の) 積が 6

□反比例を表す式の場合も、比例定数 $\neq 0$ とする。比例定数が負になることもある。

(例) 「 y は x に反比例していて、 $x=-3$ のとき、 $y=4$ である。」

→ 比例定数を a とし、 $y=\frac{a}{x}$ とする。

→ $4=\frac{a}{-3}$ より、 $a=-12$ $\therefore y=-\frac{12}{x}$ (比例定数は -12)

▷ 基本性質 ③

1-3 座標 & 座標平面

変化する1つの数量の変化を追う → 1本の数直線で…

変化する2つの数量の変化を追う $\left\{ \begin{array}{l} x \text{ の変化} \rightarrow x \text{ に対応する数直線で…} \\ y \text{ の変化} \rightarrow y \text{ に対応する数直線で…} \end{array} \right.$

(ということから)

▷ x の変化をく横の数直線—— x 軸^{よこ}という——で
 y の変化をく縦の数直線—— y 軸^{たて}という——で } 表す ことにする。

▷ この2本の数直線を、垂直に交わるように引き
 その交点を O とし、「原点」ということにする。

□ x 軸と y 軸を合わせて「座標軸」という。座標軸
 の交点が原点(O)ということになる。
 x 軸の+方向→を表す矢印)
 y 軸の+方向↑を表す矢印)をつける。

[表し方①]



▷ x と y の値を、平面上の点の位置に対応させる。

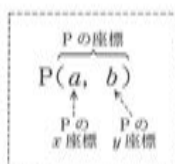
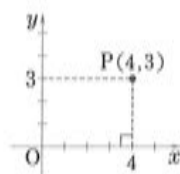
(例1) 「 $x=4, y=3$ (x が4のとき、 y は3)」を
 「(4, 3)」とし、「4 カンマ 3」と読む。

(4, 3)は、右図の点Pの位置となる。

ここでは、点Pの位置が2本の直交する数直線上の
 目盛り(x 軸上の目盛りと y 軸上の目盛り)によって
 表されている。

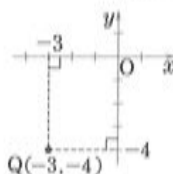
Pの位置を示すこの()つきの目盛り(4, 3)をPの 座標 という。

さらに $\left. \begin{array}{l} 4 \text{ を } P \text{ の } x \text{ 座標} \\ 3 \text{ を } P \text{ の } y \text{ 座標} \end{array} \right\}$ という。



(例2) 「 $x=-3, y=-4$ 」を表す(-3, -4)は、

右図の点Qの位置になる。



▷ 直交する数直線(=座標軸)によって、点の位置が
 座標として表されている平面を「座標平面」という。
 座標平面は4つの部分に分かれる。

x y
 + + … 第1象限
 - + … 第2象限
 - - … 第3象限
 + - … 第4象限

□ x 軸上の点の座標は(□, 0)
 y 軸上の点の座標は(0, □) } となる。
 原点Oの座標は(0, 0)

