本書の利用法

◆ 本書の特色 ◆

本書は，標準～難関高校受験を目指す中学生向けの分野別の解説書である“解法のエッセンス・シリーズ”の中の「整数編」です．

このシリーズは，‘教科書レベル’から‘難関高校入試レベル’への橋渡しを目指すものですが，特に本書で取り上げる「整数」の分野では，この2つのレベル間の格差が顕著です．教科書ではほとんど触れられておらず，しかも入試においては難問率が高いのがこの分野の特徴だからです．そこで，本書では，その深い溝を埋めるべく，以下のような特色を持たせています．

まず，教科書レベルの知識は一通り身に付けていることを前提にします．その上で，各項目ごとに，

重要な定理や公式，必須知識などを，主に例題の解説を通して学習し，
その理解度を，例題よりはやや難しめの練習問題を解くことで確認する

という流れになっています．例題・練習問題はともに，近年の高校入試問題の中から演習する価値の高い良問を精選していますが，月刊誌「高校への数学」で用いられている難易度，

A … 普通，B … 少し難，C … 難，D … かなり難

に照らすと，例題はA～B，練習問題はB～Cレベルのものが中心になっています．

◆ 本書の構成 ◆

本書は大きく，右のような3部構成になっています．

第1部：必修編
第2部：応用編
第3部：ランダム演習

‘第1部：必修編’で整数の必須事項を学んで強固な土台を作り，‘第2部：応用編’ではやや発展的な話題を通してゆるぎない実力を築き上げ，‘第3部：ランダム演習’で最後の総仕上げを図る，という構成です．

第１部では，‘約数・倍数’を中心にして，‘余り’や‘和’など，整数の基本的な事柄について学習します．また第２部は，入試でよく扱われる話題ごとに７個の Section に分類され，それぞれのテーマの攻略法が詳細に解説されています．

さらに，本書全体を通して，‘ミニ講座’や‘良問・落ち穂拾い’なども散りばめられ，巻末には，本書で用いられている「整数」以外の分野の‘定理・公式集’が用意されています．

◆ 本書で使われている記号 ◆

★ ………問題番号の右肩に付いている場合は，**難易度が C レベルの発展問題**であることを表します．

解 ……その問題の本解を表します．

別解 ……本解に対する別解を表します．

➡注 ……解答の補足や問題の背景等々の注意事項です．

■研究 …その問題についての一般論や，高校(以上)で学ぶ内容などの発展事項が述べられています．

☞ ………参照してほしいページや事項を指し示しています．

＊　　　　＊

その他，重要部分や注目してほしい部分は，太字になっていたり，網目がかけられていたり，傍線(〰〰や――など)が引かれていたりしています．そのような箇所は，特に念入りにチェックして下さい．

目　次

◈Section 1 約数の個数

1. 約数の個数の求め方

約数の個数を求めるときの**第一手は，素因数分解**です．

素因数分解とは，ある整数 N を，素数の積に分解することです．そして，　　$N=p^a\times q^b\times\cdots\times r^c$ (p，q，…，r は異なる素数)…………Ⓐ

と素因数分解されたとすると，N の約数の個数は，

$$(a+1)\times(b+1)\times\cdots\times(c+1)\ (\text{個}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\text{Ⓑ}$$

となります．

➡注 「素数」とは，約数を 2 個だけもつ(1 とその数自身)正の整数を言います．1 は素数ではなく，2 は素数であることに注意しましょう(2 以外の素数はすべて奇数)．

また，N の約数は，右の㋐，㋑，…，㋒の各グループからそれぞれ 1 数ずつを選んでかけ合わせることによって得られますから，個数は全部でⒷとなります．

㋐ $1,\ p,\ p^2,\ \cdots,\ p^a$
㋑ $1,\ q,\ q^2,\ \cdots,\ q^b$
⋮
㋒ $1,\ r,\ r^2,\ \cdots,\ r^c$

例題 1. $[n]$は，正の整数 n の正の約数の個数を表すものとする．このとき，次の各問いに答えなさい．

(1) 2016 を素因数分解すると，$2016=\boxed{}$ となる．よって，$[2016]=\boxed{}$ である．　(11 日大習志野)

(2) $[n]=8$ となる最も小さい n は $\boxed{}$ である．　(08 筑波大付)

(3) $0<n<10$ のとき，$[n]^2-[n]-2=0$ を満たす n の値をすべて求めなさい．　(08 立命館)

(4) $2\leqq n\leqq 20$ とするとき，$[n]\times[n]$の値が奇数になるような n をすべて答えなさい．　(08 大阪学芸)

(2) $8=(7+1)$，$(1+1)\times(1+3)$，$(1+1)\times(1+1)\times(1+1)$ですから，この 3 つのタイプに場合を分けます．

(3)，(4) 約数の個数が特徴的な数は，覚えておきましょう．

解 (1) $2016=2^5\times3^2\times7$ であるから,

$$[2016]=(5+1)\times(2+1)\times(1+1)=6\times3\times2=\mathbf{36}$$

(2) 以下, p, q, r を異なる素数とする.

1° p^7 の形で, 最小のものは, $2^7=128$

2° $p\times q^3$ の形で, 最小のものは, $3\times2^3=24$

3° $p\times q\times r$ の形で, 最小のものは, $2\times3\times5=30$

1°～3°の中で, 最小のものは, **24**

(3) $[n]^2-[n]-2=0$ のとき, $([n]-2)([n]+1)=0$

$[n]>0$ より, $[n]=2$

約数の個数が2個の数は素数であるから, $0<n<10$ のとき,

$$\boldsymbol{n=2,\ 3,\ 5,\ 7}$$

(4) $[n]\times[n]$ の値が奇数のとき, $[n]$ は奇数である.

約数の個数が奇数個の数は平方数であるから, $2\leqq n\leqq20$ のとき,

$$\boldsymbol{n=4,\ 9,\ 16}$$

➡**注** 前ページのⒷが奇数のとき, $(a+1)$, $(b+1)$, …, $(c+1)$ はすべて奇数, すなわち, Ⓐの指数 a, b, …, c **はすべて偶数**ですから, N は平方数です.

なお, $n=4(=2^2)$, $9(=3^2)$ のとき, 約数の個数は3個 ; $n=16(=4^2=2^4)$ のとき, 約数の個数は5個です.

―――練習問題 [解答は, ☞p.40]―――

1★ 記号 $\langle a\rangle$ は自然数 a の約数の個数を表すものとする. 例えば, $\langle 6\rangle=4$ である.

(1) $\langle a\rangle\times\langle b\rangle=4$ のとき, $\langle ab\rangle$ の値をすべて求めなさい.

(2) $\langle a\rangle\times\langle b\rangle=8$ のとき, $\langle ab\rangle$ の値をすべて求めなさい.

(07 大阪星光学院)

2. 素数

左ページにある「素数」の定義から, 例えば, “素数 N が, $N=a\times b$ (a, b は整数)と表されるとき, a, b **の一方は±1 のいずれか**である” と言えます. 以下の例題や練習問題を通して, 様々な素数の性質に触れておきましょう.

例題 2. 次の各問いに答えなさい.

(1) 100以上140以下の素数を小さいものから順にすべて列挙しなさい. (08 大阪教大付平野)

(2)(i) $x^2-36x+99$ を因数分解しなさい.

(ii) 自然数 x に対して, $p=x^2-36x+99$ とおくとき, p が素数となるような, x の値をすべて求めなさい. (10 成蹊)

(3) p, q は素数で, $p<q$ である. 自然数 $n=pq$ に対して, その正の約数の総和が q で割り切れるとき, n の値を求めなさい. (09 渋谷幕張)

(4) 次の条件を満たす自然数 n の値をすべて求めなさい.

「n^2-9n の値が2つの素数の積で表される.」 (10 大阪府)

(1) 小さい方の素数から, その倍数をどんどん消していきましょう.

(3) '適切な言い換え'ができるかどうかが鍵です.

(4) 不適な場合をきちんと説明するのが, 意外に厄介です.

解 (1) 100以上140以下の奇数のうち, 5の倍数を除いたものは右のようになる.

この中から, 3の倍数, 7の倍数, 11の倍数を除いた残りが素数である(☞注).

101, 103, 107, 109,
111, 113, 117, ~~119~~,
~~121~~, 123, 127, 129,
131, ~~133~~, 137, 139

よって答えは, **101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139**

➡注 一般に, N 以下の自然数の中から素数を選ぶには, 2の倍数, 3の倍数, 5の倍数, …と順に除いていき, **$\sqrt{N}$ 以下の最大の素数**まで調べればOKです(本問では, '11の倍数'まで調べればよい).

(2)(i) $x^2-36x+99=\boldsymbol{(x-3)(x-33)}$

(ii) $p=(x-3)(x-33)$ が素数のとき, $x-3=\pm1$, または, $x-33=\pm1$ である.

$x-3=1$ ($x=4$)のとき, $p=-29$

$x-3=-1$ ($x=2$)のとき, $p=31$

$x-33=1$ ($x=34$)のとき, $p=31$

$x-33=-1$ ($x=32$)のとき, $p=-29$

よって答えは, $\boldsymbol{x=2,\ 34}$

➡注 「素数」は, **正の**整数であることに注意しましょう.

◎ 練習問題の解答

1. ［問題は，☞p.7］（1）も（2）も，いろいろな場合があって面倒です．モレが出ないように，慎重に考えを進めましょう．

解 以下，$\langle a\rangle \leqq \langle b\rangle$ として考える(☞注)．

（1） $\langle a\rangle \times \langle b\rangle = 4$ のとき，

$\langle a\rangle = 1$，$\langle b\rangle = 4$ …①，$\langle a\rangle = \langle b\rangle = 2$ …② のいずれかである．

①のとき，$a=1$ であるから，$\langle ab\rangle = \langle b\rangle = 4$

②のとき，a と b はともに素数であり，

$a=b$ のとき，$\langle ab\rangle = \langle a^2\rangle = 3$

$a \neq b$ のとき，$\langle ab\rangle (= \langle a\rangle \times \langle b\rangle) = 4$

以上により，答えは，**3 と 4**

（2） $\langle a\rangle \times \langle b\rangle = 8$ のとき，

$\langle a\rangle = 1$，$\langle b\rangle = 8$ …③，$\langle a\rangle = 2$，$\langle b\rangle = 4$ …④ のいずれかである．

③のとき，$\langle ab\rangle = \langle b\rangle = 8$

④のとき，a は素数で，b は p^3，pq（p と q は異なる素数)のいずれかの形である．

$b=p^3$ で $p=a$ のとき，$\langle ab\rangle = \langle a^4\rangle = 5$

$b=p^3$ で $p \neq a$ のとき，$\langle ab\rangle = \langle ap^3\rangle = 2 \times 4 = 8$

$b=pq$ で $p=a$ のとき（$q=a$ のときも同様)，

$$\langle ab\rangle = \langle a^2 q\rangle = 3 \times 2 = 6$$

$b=pq$ で $p \neq a$，$q \neq a$ のとき，$\langle ab\rangle = \langle apq\rangle = 2^3 = 8$

以上により，答えは，**5 と 6 と 8**

➡**注** $\langle a\rangle \times \langle b\rangle$ も $\langle ab\rangle$ も，a，b に関して対称(a と b を入れかえても同じ式)ですから，$\langle a\rangle \leqq \langle b\rangle$ としても一般性を失いません．

2. ［☞p.9］ まず，6 つのペアを，和の大小順に並べましょう．

解 （1） $a<b<c<d$ のとき，

$$a+b<a+c<\begin{Bmatrix} a+d \\ b+c \end{Bmatrix}<b+d<c+d$$