# 本書の利用法

## ◆ 本書の特色 ◆

本書は，標準～難関高校受験を目指す中学生向けの分野別の解説書である“解法のエッセンス・シリーズ”の中の「関数・座標編」です．

このシリーズは，‘教科書レベル’から‘難関高校入試レベル’への橋渡しを目指すものですが，本書で取り上げる「関数・座標」の分野においても，この2つのレベル間の格差は小さくありません．しかも，入試における出題率が極めて高いのがこの分野です．そこで，本書では，その2つのレベル間の溝を埋めるべく，以下のような特色を持たせています．

まず，教科書レベルの知識は一通り身に付けていることを前提にします．その上で，各項目ごとに，

重要な定理や公式，必須知識などを，主に例題の解説を通して学習し，
その理解度を，例題よりはやや難しめの練習問題を解くことで確認する

という流れになっています．例題・練習問題はともに，近年の高校入試問題の中から演習する価値の高い良問を精選していますが，月刊誌「高校への数学」で用いられている難易度，

A … 普通，B … 少し難，C … 難，D … かなり難

に照らすと，例題は A ～ B，練習問題は B ～ C レベルのものが中心になっています．

## ◆ 本書の構成 ◆

本書は大きく，右のような4部構成になっています．

第1部，第2部で関数・座標の基本＆必須事項を学んで強固な土台を作り，第3部ではやや発展的な話題を通してゆるぎない実力を築き上げ，第4部で最後の総仕上げを図る，という構成です．

第1部：イントロダクション
第2部：必修編
第3部：応用編
第4部：ランダム演習

第1部は，3個の Introduction で基盤整備を行い，第2部は，'第1章：面積の Training' と '第2章：特別な多角形の Training' と '第3章：円の Training' に3分され，それぞれが3～4個の Section に分かれています．また第3部は，入試でよく扱われる話題(テーマ)ごとに8個の Section に分類され，それぞれのテーマの攻略法が詳細に解説されています．

さらに，本書全体を通して，'ミニ講座' なども散りばめられ，巻末には，本書で用いられている「関数・座標」以外の分野の '定理・公式集' が用意されています．

## ◆ 本書で使われている記号 ◆

★ ………問題番号の右肩に付いている場合は，**難易度がCレベルの発展問題**であることを表します．

解 ……その問題の本解を表します．

別解 ……本解に対する別解を表します．

➡注 ……解答の補足や問題の背景等々の注意事項です．

■研究 …その問題についての一般論や，高校(以上)で学ぶ内容などの発展事項が述べられています．

☞ ………参照してほしいページや事項を指し示しています．

*　　　　　　*

その他，重要部分や注目してほしい部分は，太字になっていたり，網目がかけられていたり，傍線(～～や――など)が引かれていたりしています．そのような箇所は，特に念入りにチェックして下さい．

# 目次

# ○第１部 イントロダクション



ここでは，「1次関数のグラフ…直線」，「2次関数のグラフ…放物線」，それに，座標の問題の過半数に関わる「面積」のそれぞれについて，最も基本となる知識を'イントロダクション'としてまとめてみます．

まずこの第1部で，座標平面の基礎知識を盤石なものにしておきましょう．

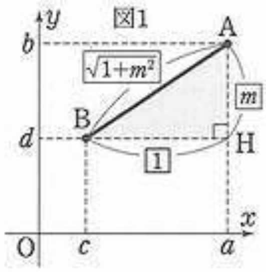
# ◇Section $\boxed{1}$ 直線のイントロダクション

## 1．直線の基本事項

まず，1次関数 $y=ax+b$（$a$，$b$ は定数）のグラフである直線に関する基本事項（定理・公式など）をまとめておくことにします．

### Ⅰ．線分

㋐ **線分の傾き**：A$(a,\ b)$ と B$(c,\ d)$ を結ぶ線分の傾きを $m$ とすると，$a \neq c$ のとき，図1で，




$$m=\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{BH}}=\frac{b-d}{a-c}$$

（$b=d$ のとき，$m=0$；

$a=c$ のとき，傾きはありません．）

㋑ **線分の長さ**：△ABH において，三平方の定理により，

$$\mathrm{AB}=\sqrt{\mathrm{BH}^2+\mathrm{AH}^2}=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$$

➡**注**　AB の傾きが $m(>0)$ のとき，図1のように，

$\mathrm{BH}:\mathrm{AH}:\mathrm{AB}=1:m:\sqrt{1+m^2}$

$\mathrm{AB}=\mathrm{BH}\times\sqrt{1+m^2}=\boldsymbol{(a-c)\times\sqrt{1+m^2}}$ ……………………………………①

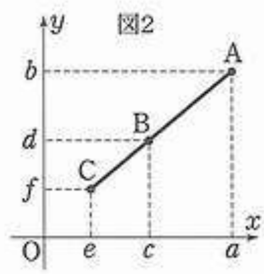
として線分の長さを求めることもできます．

この①は，$m=\pm1$ のとき（△ABH の3辺比は $1:1:\sqrt{2}$），$m=\pm2$，$\pm1/2$ のとき（3辺比は $1:2:\sqrt{5}$）などによく利用されます．

㋒ **線分の比**：同一直線上の3点 A$(a,\ b)$，B$(c,\ d)$，C$(e,\ f)$ について，線分比 AB：BC は，**座標軸方向の長さの比**でとらえます．

すなわち，$\mathrm{AB}:\mathrm{BC}=(a-c):(c-e)$

$=(b-d):(d-f)$



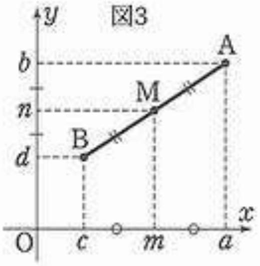

これは，上の①から導かれることですから，$m^2$ の値さえ等しければ（すなわち，**平行な2直線**においても，あるいは，**傾きが $m$ と $-m$ の2直線**においても），この手法を使うことができます．

㊁ **中点の座標**：線分 AB の中点を M$(m,\ n)$とすると，㊀より，

$$a-m=m-c,\ b-n=n-d$$

が成り立ちますから，$\mathbf{M}\left(\dfrac{\boldsymbol{a+c}}{\mathbf{2}},\ \dfrac{\boldsymbol{b+d}}{\mathbf{2}}\right)$

（$x$ 座標も $y$ 座標も，**A と B の平均**になります.）




## Ⅱ．直線

㋭ **直線の方程式**：直線は，‘2 点’あるいは‘1 点と傾き’で決まります.

ⓐ **2 点の座標**が与えられているとき；

直線の方程式を $y=mx+n$（$m$ は**傾き**，$n$ は**切片**といいます）とおいて，これに 2 点の座標を代入し，$m$ と $n$ の連立方程式を解いてもよいし，まず㋐によって傾き $m$ を求めて，次のⓑにつなげることもできます.

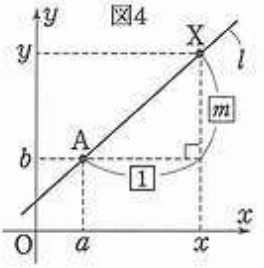
➡**注**　2 点の $x$ 座標が等しい($x=a$ とする)とき，$m$ は存在しませんが，このとき，直線の方程式は，$\boldsymbol{x=a}$ となります(以下では，$m$ が存在する場合を考えます).

ⓑ **傾きと 1 点の座標**が与えられているとき；

点 A$(a,\ b)$を通り，傾きが $m$ の直線を $l$ とし，$l$ 上の A と異なる点を X$(x,\ y)$とすると，

$$\frac{y-b}{x-a}=m \quad \therefore \quad \boldsymbol{y=m(x-a)+b} \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

この②は，X＝A のときも成り立ちますから，これが $l$ の方程式です.




㋬ **2 直線の平行・垂直**：2 直線 $y=mx+n$ と $y=m'x+n'$ において，

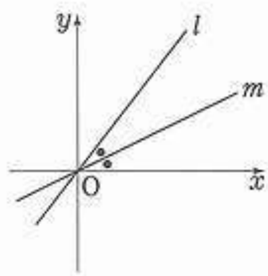
平行である条件は，$m=m'$
垂直である条件は，$m\times m'=-1$

## 2. 例題によるウォーミング・アップ

以上で解説した「基本事項」を，例題を解くことを通して確認することにしましょう．

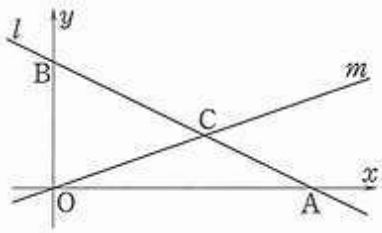
**例題** 1. 次の各問いに答えなさい．

（1） 3点 A(1, 1)，B(−5, 13)，C(5, $a$)が一直線上にあるとき，定数 $a$ の値を求めなさい． （11 佐野日大）




（2） 図のグラフにおいて，直線 $l$ は $y=\frac{4}{3}x$ のグラフです．直線 $m$ が直線 $l$ と $x$ 軸とのなす角を2等分するとき，直線 $m$ の式を求めなさい． （11 中大杉並）

（3） 図において，直線 $l$ は方程式 $x+2y=6$ のグラフであり，$x$ 軸，$y$ 軸とそれぞれ A，B で交わる．また，直線 $m$ は方程式 $ax-y=0$ ($a>0$) のグラフである．$l$ と $m$ の交点を C とする．∠BOC＝∠BCO となるとき，点 C の $x$ 座標を求めなさい． （09 西南学院）




（4） 座標平面上に3点 O(0, 0)，A(4, 7)，B(0, 5)がある．点 B を通る直線が線分 OA と交わる点を C，$x$ 軸と交わる点を D とする．このとき，△OBC : △OCD＝2 : 3 となるような点 D の座標を求めなさい． （10 市川）

（1） ‘直線の式’を求めてもよいのですが，「一直線」の条件は‘**傾き**’**だけ**でとらえられます．

（2） まずは，二等辺三角形を作って，**中点を活用**してみます．

（3） ‘等角→二等辺’の流れです．p.6 の①を使ってみましょう．

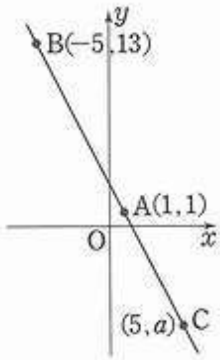
（4） D の $y$ 座標は 0 と分かっているのですから，‘線分比’を **$y$ 軸方向の長さの比**に変換します．

**解** (1) A, B, C が一直線上にあるとき，
(ABの傾き)=(ACの傾き) であるから，

$$\frac{13-1}{-5-1}=\frac{a-1}{5-1} \quad \therefore \quad -2=\frac{a-1}{4}$$

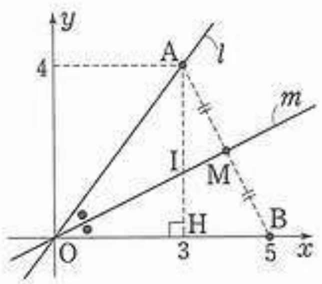
$\therefore \quad a-1=-8 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{a=-7}$

➡注 直線の式は，$y=-2x+3$ です．




(2) $l$ 上に点 A(3, 4)，$x$ 軸上に点 B(5, 0)をとると，OA=OB=5

よって，$m$ は AB の中点 M(4, 2)を通るから，その式は，$\boldsymbol{y=\frac{1}{2}x}$




➡注 M の座標は，$\left(\frac{3+5}{2},\ \frac{4+0}{2}\right)=(4,\ 2)$

**別解** [**角の二等分線の定理**を使う.]
図のように H, I をとると，角の二等分線の定理により，AI : IH=OA : OH=5 : 3

よって，I の $y$ 座標は，$4\times\frac{3}{5+3}=\frac{3}{2} \quad \therefore \quad \mathrm{I}\left(3,\ \frac{3}{2}\right)$

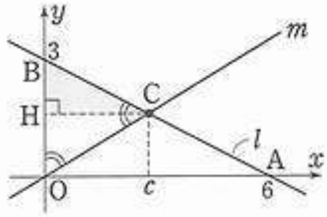
したがって，$m$ (直線 OI)の式は，$\boldsymbol{y=\frac{1}{2}x}$

(3) ∠BOC=∠BCO より，BC=BO=3

ところで，$l$ の傾きは $-\frac{1}{2}$ であるから，右図の直角三角形 BCH の 3 辺比は，

CH : BH : BC=2 : 1 : $\sqrt{5}$

よって，C の $x$ 座標は，$c=\mathrm{CH}=3\times\frac{2}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{\frac{6\sqrt{5}}{5}}$

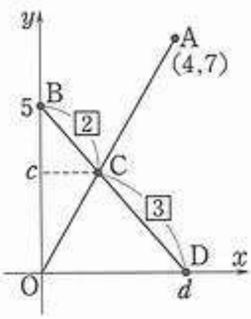



(4) △OBC : △OCD=BC : CD=2 : 3 ………①
より，右図のようになる．ここで，C の $y$ 座標を $c$ とすると，①より，$(5-c) : c=2 : 3 \quad \therefore \quad c=3$

C は直線 OA … $y=\frac{7}{4}x$ 上にあるから，$\mathrm{C}\left(\frac{12}{7},\ 3\right)$

このとき，D の $x$ 座標を $d$ とすると，

$d : \frac{12}{7}=(3+2) : 2$ より，$d=\frac{30}{7} \quad \therefore \quad \boldsymbol{\mathrm{D}\left(\frac{30}{7},\ 0\right)}$




➡注 $d<0$ の場合は，条件を満たすような点 D はありません．